

ЕГЭ

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»



МАТЕМАТИКА

Тематические тесты

ПОВЫШЕННЫЙ
УРОВЕНЬ
ЕГЭ-2012 (С1, С3)

уравнения,
неравенства,
системы

тригонометрические
логарифмические
иррациональные
показательные



Под редакцией **Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова**

МАТЕМАТИКА

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ ЕГЭ–2012 (С1, С3)

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

- ✓ **Уравнения**
- ✓ **Неравенства**
- ✓ **Системы**

Учебно-методическое пособие



ЛЕГИОН-М
Ростов-на-Дону
2011



Рецензенты:

О. Б. Кожевников — к.ф.-м.н., доцент,
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель России.

Авторы:

Лысенко Ф. Ф., *Кулабухов С. Ю.*, *Ольховая Л.С.*, *Евич Л. Н.*,
Дерезин С. В., *Ковалёва Л. Н.*, *Коннова Е. Г.*, *Авилов Н. И.*,
Войта Е. А.

М 34 Математика. Повышенный уровень ЕГЭ-2012 (С1, С3).
Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы / под
редакцией *Ф. Ф. Лысенко*, *С. Ю. Кулабухова*. — Ростов-на-
Дону: Легион-М, 2011. — 112 с. — (Готовимся к ЕГЭ)

ISBN 978-5-91724-094-7

Пособие содержит задания С1, С3 по отдельным темам, которые являются традиционными в курсе математики и поэтому, как правило, включаются в ЕГЭ. Каждой теме посвящён отдельный параграф, включающий 10 вариантов: 1 — демонстрационный с решениями и 9 — тренировочных. Каждый вариант состоит из 8 заданий.

Цель настоящей книги — выработать навыки решения заданий с развёрнутым ответом при подготовке к ЕГЭ. Предлагаемое пособие предназначено выпускникам, стремящимся получить на ЕГЭ высокий балл. Также оно будет интересно учащимся 10-х классов для закрепления пройденных тем, включаемых в спецификацию ЕГЭ. Книга также может быть полезна педагогам, осуществляющим подготовку учащихся к экзамену.

ББК 22.1

ISBN 978-5-91724-094-7

© ООО «Легион-М», 2011.

Оглавление

От авторов	4
§ 1. Иррациональные уравнения	5
§ 2. Различные приёмы при решении иррациональных уравнений	12
§ 3. Тригонометрические уравнения	19
§ 4. Различные приёмы при решении тригонометрических уравнений	27
§ 5. Показательные уравнения	35
§ 6. Различные приёмы при решении показательных уравнений .	42
§ 7. Логарифмические уравнения	49
§ 8. Различные приёмы при решении логарифмических уравнений	56
§ 9. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля	63
§ 10. Различные приёмы при решении комбинированных уравнений	71
§ 11. Неравенства	78
§ 12. Комбинированные системы уравнений	87
Ответы	97

От авторов

Предлагаемое учебное пособие «Математика. Повышенный уровень ЕГЭ-2012 (С1, С3). Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы» содержит варианты тестовых заданий по отдельным темам, которые являются традиционными в курсе математики и поэтому, как правило, включаются в ЕГЭ. Книга является частью учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ» и логическим продолжением пособий, предназначенных для отработки заданий базовой части: «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2012 (В1 – В6). Пособие для „чайников“» и «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2012 (В7 – В8, В10 – В12). Пособие для „чайников“».

Книга содержит задания повышенного уровня сложности — С1 и С3. Каждой теме посвящён отдельный параграф, включающий 10 вариантов: 1 — демонстрационный с решениями и 9 — тренировочных. Каждый вариант содержит 8 заданий. Большинство параграфов равноценны по уровню сложности. Однако внутри каждого параграфа сложность тестов возрастает от первого к последнему.

Пособие предназначено в первую очередь тем выпускникам, которые стремятся получить на ЕГЭ по математике высокий балл. Также оно будет интересно десятиклассникам для закрепления пройденных тем, включаемых в спецификацию ЕГЭ. Рекомендуем начинать систематическую подготовку к единому государственному экзамену по математике с отработки заданий базового уровня, используя названные выше пособия, предназначенные для отработки заданий В1 – В6, В7 – В8, В10 – В12.

Авторы уверены, что книга будет полезна выпускникам, имеющим различный уровень математической подготовки, так как отработка заданий повышенного уровня сложности даёт дополнительные шансы всем выпускникам укрепить позиции на экзамене, глубоко усвоить тематические блоки, включённые в ЕГЭ.

§ 1. Иррациональные уравнения

Демонстрационный вариант

1. Найдите корень уравнения или сумму всех его корней, если их несколько: $\sqrt{15 - 2x} = x$.

Решение.

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 15 - 2x = x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + 2x - 15 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \begin{cases} x = -5, \\ x = 3; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

2. Найдите произведение всех значений x , при которых значение функции $y = \sqrt{7 + x} - 2$ равно значению функции $y = 7 - \sqrt{x - 2}$.

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$\sqrt{7 + x} - 2 = 7 - \sqrt{x - 2},$$

$$\sqrt{7 + x} + \sqrt{x - 2} = 9. \quad (*)$$

Функция $f(x) = \sqrt{7 + x} + \sqrt{x - 2}$ монотонно возрастающая при $x \geq 2$, следовательно, уравнение (*) может иметь не более одного корня.

Поскольку $f(18) = \sqrt{7 + 18} + \sqrt{18 - 2} = 5 + 4 = 9$, то $x = 18$ — корень исходного уравнения, и других корней в силу монотонности функции $f(x)$ уравнение $f(x) = 9$ не имеет.

Ответ: 18.

3. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{(23 - x)^2} + 9 = 3x$?

Решение.

$$|23 - x| = 3x - 9 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 23 - x = 3x - 9, \\ 23 - x = 9 - 3x, \\ 3x - 9 \geq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 8, \\ x = -7, \\ x \geq 3; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x = 8$.

Исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: 1.

4. Найдите среднее арифметическое всех корней уравнения $(x + 2) \cdot \sqrt{x - x^2} = 0$.

Решение.

$$\left[\begin{cases} x + 2 = 0, \\ x - x^2 \geq 0, \\ x - x^2 = 0; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = -2, \\ x \geq 0, \\ x \leq 1, \\ x = 0, \\ x = 1; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = 0, \\ x = 1. \end{matrix} \right]$$

Корни уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Следовательно, среднее арифметическое найденных корней $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 1}{2} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

5. Найдите наибольший корень уравнения $2\sqrt{x} - 7\sqrt[4]{x} + 3 = 0$.

Решение. Обозначим $\sqrt[4]{x} = t, t \geq 0$.

Тогда исходное уравнение примет вид

$$2t^2 - 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} t = 3, \\ t = 0,5. \end{matrix} \right]$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{matrix} \sqrt[4]{x} = 3, \\ \sqrt[4]{x} = 0,5; \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = 81, \\ x = 0,0625. \end{matrix} \right]$$

Наибольший корень $x = 81$.

Ответ: 81.

6. Найдите наименьший корень уравнения $(2^{x-3} - 16) \cdot \sqrt{4-x} = 0$.

Решение.

$$\left[\begin{cases} 2^{x-3} - 16 = 0, \\ 4 - x \geq 0, \\ 4 - x = 0; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x - 3 = 4, \\ x \leq 4, \\ x = 4; \end{cases} \right] \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: 4.

7. Решите уравнение $\sqrt[3]{4 - \sqrt{x^2 + 2x + 1}} = -1$ и определите, сколько корней принадлежит промежутку $[-6; 5)$.

Решение. $4 - \sqrt{x^2 + 2x + 1} = -1, \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 5$.

По определению арифметического корня квадратного получаем:

$$x^2 + 2x + 1 = 25, x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = -6, \\ x = 4. \end{matrix} \right]$$

Промежутку $[-6; 5)$ принадлежат оба корня исходного уравнения.

Ответ: 2.

8. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $3 - \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x+2) + 11} = 0$.

Решение. По определению арифметического квадратного корня $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) + 11 = 9$, $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) = -2$.

Отсюда, по определению логарифма получаем:

$$x+2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, x+2 = 9, x = 7.$$

Ответ: 7.

Вариант № 1

1. Найдите корень уравнения или сумму корней, если их несколько: $\sqrt{2x-1} = 2-x$.

2. Найдите значение x или произведение всех значений, если их несколько, при которых значение функции $y = \sqrt{x+2} + 1$ равно значению функции $y = \sqrt{x-1} + 2$.

3. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{(18+x)^2} + 2 = x$?

4. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $(x-1)\sqrt{x^2-3x} = 0$.

5. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $3x = 2\sqrt{x} + 8$.

6. Найдите наибольший корень уравнения $3^{1-x} \cdot \sqrt{4-x^2} = 0$.

7. Решите уравнение $\sqrt[5]{2 - \sqrt{x^2 + 4x + 4}} = -1$ и определите, сколько корней принадлежит отрезку $[-5; 5]$.

8. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько: $4 - \sqrt{\log_2(x^2 + 3x) + 14} = 0$.

Вариант № 2

1. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $\sqrt{3x^2 - x - 2} = x - 1$.

2. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{(x+5)^2} = 3\sqrt{(x-7)^2}$, принадлежащих промежутку $[-13; 13]$.

3. Найдите произведение корней уравнения

$$2x^2 + 2x + 3\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}.$$

4. Найдите произведение различных корней уравнения $(6 - x^2 - x) \cdot \sqrt[4]{9x^2 - 81} = 0$.
5. Найдите наименьший корень уравнения $\sqrt[3]{x - 2} = \sqrt[6]{11x - 3x^2 - 5}$.
6. Найдите значение выражения $3x_0 - 5$, где x_0 — наибольший корень уравнения $\sqrt{x + 5} + 3 = 7 - \sqrt{x - 3}$.
7. Решите уравнение $19\sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x} - 10 = 0$ и укажите, сколько корней принадлежит отрезку $\left[-10; \frac{1}{2}\right]$.
8. Укажите, сколько корней имеет уравнение $\sqrt{5^{x+3} - 25} \cdot |x^2 - 6x| = 0$.

Вариант № 3

1. Найдите наибольший корень уравнения $x + 1 = \sqrt{7x - 5}$.
2. Найдите сумму значений всех x , при которых значение функции $y = 2x + 1$ равно значению функции $y = \sqrt{4x + \sqrt{72x^2 + 1}}$.
3. Сколько корней имеет уравнение $\frac{\sqrt{5-x}}{4} = \frac{5}{1 + \sqrt{5-x}}$?
4. Найдите корень уравнения или среднее арифметическое его корней, если их несколько: $x\sqrt{8-2^x} - 7\sqrt{8-2^x} = 0$.
5. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $\frac{11\sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}} = 3$.
6. Найдите сумму корней уравнения $(x^2 - 16) \cdot \sqrt{12 + 4x - x^2} = 0$.
7. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $(9 - x)(x - 10) = (\sqrt{9 - x})^2$.
8. Найдите корень уравнения или наименьший корень, если их несколько: $x + \sqrt{3x + 1} + \sqrt{(x - 3)^2} = 2$.

Вариант № 4

1. Найдите корень уравнения $\sqrt{x + 0,5} = \sqrt{x} + 0,5$.
2. Решите уравнение и найдите среднее арифметическое его корней:
 $\sqrt{x + 7} = \frac{1}{3}x + 3$.
3. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько:
 $\frac{x + 3}{\sqrt{2x + 6}} = \sqrt{2x + 6} - (x + 3)$.

4. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x-3} + 2 = \frac{3}{\sqrt[3]{2x-3}}$. В ответе укажите сумму квадратов его корней.
5. Найдите произведение корней уравнения $\sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{7-x} = x+3$.
6. Найдите модуль разности корней уравнения $(\sqrt{x}-2)^2 - 3(\sqrt{x}-2) + 2 = 0$.
7. Найдите сумму корней уравнения $(x^2 - 5x - 6) \cdot \sqrt{x^2 + 5x - 6} = 0$.
8. Решите уравнение $\sqrt{8 + \sqrt{x^2 + 48}} = x$.

Вариант № 5

1. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $\sqrt{3-2x} = 2x-1$.
2. Найдите сумму значений всех x , при которых значение функции $y = \sqrt{6x + \sqrt{8x^2 + 1}}$ равно значению функции $y = 3x+1$.
3. Сколько корней имеет уравнение $\frac{5}{2 + \sqrt{x+5}} = \frac{\sqrt{x+5}}{3}$?
4. Найдите корень уравнения или среднее арифметическое его корней, если их несколько: $4\sqrt{2^x - 8} + x\sqrt{2^x - 8} = 0$.
5. Найдите наименьший корень уравнения $\frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}} = 3$.
6. Найдите сумму корней уравнения $(x^2 - 16)\sqrt{x^2 + 4x - 5} = 0$.
7. Найдите наименьший корень уравнения $(x+6)(x+7) = (\sqrt{x+6})^6$.
8. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько: $5 + \sqrt{2 - \sqrt{x^2 - 6x + 9}} = x$.

Вариант № 6

1. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $\sqrt{1-3x} = 3+x$.
2. Найдите сумму значений всех x , при которых значение функции $y = \sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}}$ равно значению функции $y = x+1$.
3. Сколько корней имеет уравнение $\frac{3}{1 + \sqrt{x+6}} = \frac{\sqrt{x+6}}{2}$?
4. Найдите корень уравнения или среднее арифметическое его корней, если их несколько: $5\sqrt{3^x - 9} + x\sqrt{3^x - 9} = 0$.
5. Найдите наименьший корень уравнения $\frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} = 2$.

6. Найдите сумму корней уравнения $(x^2 - 9) \cdot \sqrt{x^2 + 3x - 10} = 0$.
7. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $(x - 7)(x + 1) = (\sqrt{x - 7})^2$.
8. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько: $3 + \sqrt{7 - \sqrt{x^2 - 4x + 4}} = x$.

Вариант № 7

1. Найдите сумму всех вещественных корней уравнения $x^2 - 3x + 7 = \sqrt{21 + 6x - 2x^2}$.
2. При каком значении x значение функции $y = \sqrt{13 \log_3^2 x + 7 \log_3 x + 1}$ не больше и не меньше значения функции $y = 4 \log_3 x + 1$?
3. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt{\frac{2x^2}{3x + 2}} + \sqrt{\frac{3x + 2}{2x^2}} = 2$.
4. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{2x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - x + 1}$?
5. Найдите сумму всех значений x , удовлетворяющих условию $\sqrt{x^2 + 11} = 8 \sqrt[4]{x^2 + 11} + 33$.
6. Найдите произведение корней уравнения $(3x - 12)\sqrt{3x^2 - 10x + 3} = 0$.
7. Найдите число корней уравнения $(1 - 2 \cos^2 x) \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} = 0$.
8. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = -2|x - 3|$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их сумму.

Вариант № 8

1. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько: $\sqrt{x^2 + x - 2} = 3x - 4$.
2. Найдите наименьший корень уравнения $\sqrt{3^{2x} - 8} = 3^{x+1} - 3^x - 5$.
3. Сколько корней имеет уравнение $\frac{4}{2 + \sqrt{x + 1}} = \frac{\sqrt{x + 1}}{2}$?
4. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько: $(x - 2)\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 0$.
5. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $\sqrt{2x^2 + 1} = x^2 - 1$.
6. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько: $\sqrt{x + 3} - \sqrt{7 - x} = 2$.

7. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt[4]{x^2 - 9} = 2$.

8. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько: $\sqrt{x^2 - 2x + 10} = |2x + 1|$.

Вариант № 9

1. Найдите произведение всех вещественных корней уравнения

$$x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}.$$

2. При каком значении x значение функции $y = \sqrt{\log_2^2 x + 5}$ не больше и не меньше значения функции $y = 2 \log_2 x - 1$?

3. Найдите среднее арифметическое корней уравнения

$$\sqrt{\frac{2x}{2x+1}} + \sqrt{\frac{2x+1}{2x}} = \frac{5}{2}.$$

4. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{2x^2 - 5x + 1} = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$?

5. Найдите произведение всех значений x , удовлетворяющих условию $\sqrt{x^2 + 32} = 2\sqrt[4]{x^2 + 32} + 3$.

6. Найдите сумму корней уравнения $(6x - 5)\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 0$.

7. Найдите число корней уравнения $(\sin^2 x - \cos^2 x)\sqrt{2 - x^2} = 0$.

8. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько: $\sqrt{8 - x} = |x - 2|$.

§ 2. Различные приёмы при решении иррациональных уравнений

Демонстрационный вариант

1. Решите уравнение $x^2 + 4x = 3^{\log_3(4\sqrt{x} + x\sqrt{x})}$.

Решение.

$$\begin{cases} x^2 + 4x = 4\sqrt{x} + x\sqrt{x}, \\ x > 0. \end{cases}$$

Обозначим $\sqrt{x} = t$, $t > 0$. Система примет вид:

$$\begin{cases} t^4 - t^3 + 4t^2 - 4t = 0, \\ t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - t^2 + 4t - 4 = 0, \\ t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t^2(t - 1) + 4(t - 1) = 0, \\ t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t - 1)(t^2 + 4) = 0, \\ t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Вернёмся к исходной переменной: $\sqrt{x} = 1$, $x = 1$.

Ответ: 1.

2. Найдите корни уравнения $\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\lg(-x)} = 0$.

Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0, \\ -x > 0, \\ -x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 3, \\ x < 0, \\ x \neq -1; \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -3.$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} = 0, \\ x \leq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3, \\ x = -3, \end{cases} \\ x \leq -3; \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

Ответ: -3.

3. Найдите нули функции $y = 3^{\sqrt{x-2}+3} - 25 \cdot 3^{\sqrt{x-2}} - 18$.

Решение. Решение задачи сводится к решению уравнения:

$$\begin{aligned} 27 \cdot 3^{\sqrt{x-2}} - 25 \cdot 3^{\sqrt{x-2}} - 18 &= 0, \\ 2 \cdot 3^{\sqrt{x-2}} &= 18, \quad 3^{\sqrt{x-2}} = 9, \quad \sqrt{x-2} = 2, \quad x = 6. \end{aligned}$$

Выполненные преобразования равносильны при $x = 6$, $y = 0$.

Ответ: 6.

4. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$y = -\sqrt[3]{x^3 - 1} \text{ и } y = \sqrt{1 - 2x + x^2}.$$

Решение. $-\sqrt[3]{x^3 - 1} = \sqrt{(1 - x)^2},$
 $-\sqrt[3]{x^3 - 1} = |1 - x|, \quad 1 - x^3 = (1 - x)^2 \cdot |1 - x|,$
 $(1 - x)(1 + x + x^2) - (1 - x)^2 \cdot |1 - x| = 0,$
 $(1 - x)(1 + x + x^2 - (1 - x) \cdot |1 - x|) = 0.$

1) $1 - x = 0, x = 1.$

2) $1 + x + x^2 - (1 - x) \cdot |1 - x| = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ 1 + x + x^2 - 1 + 2x - x^2 = 0, \\ 1 - x < 0, \\ 1 + x + x^2 + 1 + x^2 - 2x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x = 0, \\ x > 1, \\ 2x^2 - x + 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x = 0.$

Ответ: 0; 1.

5. При каких значениях x сумма значений функций $y = \log_2 \sqrt{x}$ и $y = \log_2 \sqrt{x - 3}$ равна 1?

Решение. $\log_2 \sqrt{x} + \log_2 \sqrt{x - 3} = 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{x(x - 3)} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 3x - 4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ \begin{cases} x = -1, \\ x = 4; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x = 4.$

Ответ: 4.

6. Найдите наименьший корень уравнения $\sqrt{x^2 + 17 - 8\sqrt{x^2 + 17}} = 3.$

Решение. $x^2 + 17 - 8\sqrt{x^2 + 17} - 9 = 0.$

Обозначим $\sqrt{x^2 + 17} = t, t \geq 0.$

Получим $\begin{cases} t^2 - 8t - 9 = 0, \\ t \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} t = -1, \\ t = 9, \end{cases} \\ t \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow t = 9.$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\sqrt{x^2 + 17} = 9, \quad x^2 = 64, \quad x = \pm 8.$$

Ответ: -8.

7. Найдите корни уравнения $\sqrt{(x-1)^2} - x = 4$.

Решение. $|x-1| = x+4 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \begin{cases} x-1 = x+4, \\ x-1 = -x-4, \\ x+4 \geq 0; \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -3, \\ x \geq -4; \end{cases} & \Leftrightarrow x = -1,5. \end{cases}$$

Ответ: $-1,5$.

8. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{10 \operatorname{tg} x + 13} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \operatorname{tg} x.$$

Решение. $\sqrt{10 \operatorname{tg} x + 13} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \operatorname{tg} x \Rightarrow$

$$\begin{cases} 10 \operatorname{tg} x + 13 = 12 + 12 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg}^2 x, \\ 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \operatorname{tg} x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x \geq -2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}, \\ \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x \geq -2; \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}, \\ \operatorname{tg} x = -1; \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{cases}$$

Наименьший положительный корень $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

Вариант № 1

1. Решите уравнение $x^2 - 2x = 2^{\log_2(x\sqrt{x}-2\sqrt{x})}$.

2. Решите уравнение $\frac{(x^2 - 2x) \cdot \sqrt{x^2 + 3x - 4}}{(x^2 - 16) \lg x} = 0$.

3. Решите уравнение $5^{\sqrt{4x^2-12}+1} - 26 \cdot 5^{\sqrt{x^2-3}} + 5 = 0$.

В ответе укажите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько.

4. Решите уравнение $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.

5. Решите уравнение $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$.

6. Решите уравнение $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} + 2\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = \frac{9}{2}$.

7. Решите уравнение $\sqrt{2 \cos x + 1} = \sqrt{3} \cos x$.

8. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + x(1 - 2\sqrt{x})} + \sqrt{4 + x - 4\sqrt{x}} = 5$.

Вариант № 2

1. Решите уравнение $2x^2 = 7^{\log_7(4x\sqrt{x}+6\sqrt{x})} - 3x$.
2. Найдите корни уравнения $\frac{\sqrt{2x^2 + 4x}}{\lg(-x)} = 0$.
3. Найдите нули функции $y = 5^{2+\sqrt{x+3}} - 10 \cdot 5^{\sqrt{x+3}} - 75$.
4. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = -\sqrt[3]{x^3 - 8}$ и $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.
5. При каких значениях x сумма значений функций $y = \log_{12} \sqrt{x-2}$ и $y = \log_{12} \sqrt{x-3}$ равна $\frac{1}{2}$?
6. Найдите произведение корней уравнения $\sqrt{x^2 + 39} - 7\sqrt{x^2 + 39} = 2\sqrt{2}$.
7. Найдите корни уравнения $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 5$.
8. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sqrt{2\sin x} = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x$.

Вариант № 3

1. При каких значениях x значение функции $y = x^2 - 7x + 10$ совпадает со значением функции $y = (x-5) \cdot \sqrt{2x-4}$?
2. Найдите наименьший корень уравнения $\sqrt{5x-15} \cdot (x^2 - 9x + 8) = 0$.
3. Найдите произведение корней уравнения $3\sqrt{(x+2)(x+6)} + 7\sqrt{-(x+2)(x+5)} = \cos \frac{\pi x}{4}$.
4. Найдите сумму корней уравнения $5\sqrt[4]{\frac{x+2}{2x+1}} - \sqrt[4]{\frac{2x+1}{x+2}} = 4$.
5. Найдите наименьший корень уравнения $\frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} = 4$.
6. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 3x} + x^2 - 3x = 6$.
7. Решите уравнение $\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x} = 1$.
8. Найдите абсциссы точек, в которых графики функций $y = \sqrt{116 - (x+1)^2}$ и $y = x - 5$ пересекаются.

Вариант № 4

1. Решите уравнение $x^2 + 2x + 2\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 3$.
2. Найдите сумму корней уравнения $(9 - x^2) \cdot \sqrt{-5x - 10} = 0$.
3. Решите уравнение $\sqrt{x + 4} - \sqrt[3]{x + 1} = 1$.
4. Найдите сумму абсцисс точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{x + 1}$ и $y = \sqrt[3]{2x + 1}$.
5. При каких значениях x сумма значений функций $y = \sqrt{2x + 7} - \sqrt{3 - x}$ и $y = \sqrt{x - 3} - \sqrt{5x - 2}$ равна 0?
6. Решите уравнение $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 4x - x^2 - 4$.
7. Определите количество корней уравнения $\sqrt[4]{(x - 4)^4} = 4 - x^2$.
8. Найдите корни уравнения $\sqrt{\sin^2 x} = \sin x + 2 \cos x$.

Вариант № 5

1. При каких значениях x пересекаются графики функций $y = \sqrt{3x^2 + x + 4}$ и $y = 3x - 1$?
2. Решите уравнение $\sqrt[3]{6 + \sqrt{x + 5}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{x + 5}} = 3$.
3. При каких значениях x значение функции $y = x^2 + 8x + 2\sqrt{x^2 + 8x}$ равно 15?
4. Найдите произведение корней уравнения $2\sqrt[6]{x^2 - 3} + \sqrt[3]{x^2 - 3} = 3$.
5. Найдите сумму корней уравнения $(x^2 + 3x - 10) \cdot \sqrt{3x^2 + 17x - 6} = 0$.
6. Решите уравнение $\sqrt{6x + 4} = \frac{2\sqrt{3x + 2}}{\sqrt[6]{3x + 2}}$.
7. Найдите нули функции $y = (2x - 1)\sqrt{2x^2 - 1} + 2 + 2x^2 - 5x$.
8. Найдите сумму корней уравнения $\frac{4}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 3}{5} = 2$.

Вариант № 6

1. При каких x значение функции $y = x^2 - 12x + 35$ совпадает со значением функции $y = 4(x - 7)\sqrt{x}$?
2. Найдите наименьший корень уравнения $\sqrt{3x - 6} \cdot (x^2 - 8x + 7) = 0$.
3. Найдите произведение корней уравнения $2\sqrt{-(x - 8)(x - 1)} - 3\sqrt[4]{(x - 9)(x - 1)} = \sin \pi x$.
4. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[4]{\frac{x + 1}{x - 2}} + \sqrt[4]{\frac{x - 2}{x + 1}} = \frac{5}{2}$.
5. Найдите наименьший корень уравнения $\frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x}} = 3$.

6. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 6x} + x^2 - 6x = 2$.

7. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x} = 1.$$

8. Найдите абсциссы точек, в которых графики функций

$$y = \sqrt{14 - \sqrt{(x-2)^2}} \text{ и } y = x - 4 \text{ пересекаются.}$$

Вариант № 7

1. Решите уравнение $5\sqrt{1 - \sin x} = \cos x$.

2. Решите уравнение $\frac{(2x - x)x^2 - x^3}{x} \cdot \sqrt{4 - x^2} = 0$.

3. Найдите все x , для которых выполняется равенство $x^2 + x = 2 + 2(x - 1)\sqrt{2x}$.

4. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{x+10} + \frac{\sin \pi x + \sqrt{1 - \cos x}}{x}} \text{ и}$$

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{2x-5} + \frac{\sin \pi x}{x} + \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}}.$$

5. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - x - 12} + \sqrt{5x - x^2 - 4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2x - 4} = 1$.

6. Найдите корни уравнения $\sqrt{\frac{2x}{x+3}} + \sqrt{\frac{2(x+3)}{x}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{x(x+3)}}$.

7. При каких x значение функции $y = \sqrt{x^2 + 16 - 8x} + 4$ не больше и не меньше значения функции $y = 5\sqrt{x - 4}$?

8. При каких x высказывание

$$\sqrt{3x+2} + 4\sqrt{3x-2} + \sqrt{3x+14} + 8\sqrt{3x-2} = 16 \text{ обращается в истинное?}$$

Вариант № 8

1. Найдите количество корней уравнения $(x^2 - 5x + 4) \cdot \sqrt{3 - x} = 0$.

2. Решите уравнение $x^2 + x - 6 = 2^{\log_2(3\sqrt{x-2} + x\sqrt{x-2})}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x} = \sqrt{2x+1}$.

4. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$y = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} + 4 \sin \pi x \text{ и } y = \sqrt{\frac{4x-1}{2x}} + 4 \sin \pi x.$$

5. Решите уравнение $\sqrt{6-x-x^2} = 4 - \sqrt{x^2+x+2}$.
6. Решите уравнение $\sqrt{\cos 2x} = 1 + 2 \sin x$.
7. Решите уравнение $\sqrt{4x+17} - 3 = |x+2|$.
8. Решите уравнение $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

Вариант № 9

1. Решите уравнение $\sqrt{1-\cos x} = \sin x$.
2. Найдите количество корней уравнения $(3x^2 - x - 2)\sqrt{4x-2} = 0$.
3. Найдите все x , для которых выполняется равенство $x^2 - 4x - 32 = 4(x-8)\sqrt{x}$.
4. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} + 3 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$ и $y = \sqrt{\frac{x+4}{3x-8}} + 3 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$.
5. Найдите наибольший корень уравнения $3\sqrt{-x^2+9x-14} - 9\sqrt[8]{x^2-5x-14} - 1 = \cos \pi x$.
6. Найдите корни уравнения $\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{3}{\sqrt{x(x-1)}}$.
7. При каких x значение функции $y = \sqrt{9-6x+x^2}$ не больше и не меньше значения функции $y = 4\sqrt{x-3} + 12$?
8. При каких x высказывание $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} + 3\sqrt{2x-5} = 7\sqrt{2}$ обращается в истинное?

§ 3. Тригонометрические уравнения

Демонстрационный вариант

1. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения (в градусах)
 $\sin 3x \cdot \cos 5x - \cos 3x \cdot \sin 5x = 0,5$.

Решение. $\sin(3x - 5x) = 0,5$, $\sin 2x = -\frac{1}{2}$,

$$2x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

При $n = 0$ $x = -\frac{\pi}{12}$, $x = -15^\circ$ — наибольший отрицательный корень.

Ответ: -15° .

2. Найдите количество различных значений аргумента $x \in [30^\circ; 270^\circ)$, при которых $f(x) = 0$, если $f(x) = 2 \sin^2 x + \sin x - 1$.

Решение. $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Промежутку $[30^\circ; 270^\circ)$ принадлежат два значения x :
 $x = 30^\circ$ и $x = 150^\circ$.

Ответ: 2.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах)
 $\sqrt{3} \sin x = -\cos x$.

Решение. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$, учитывая, что нули косинуса не являются корнями уравнения.

Получим: $\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$, $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Наименьший положительный корень $x = 150^\circ$.

Ответ: 150° .

4. Найдите сумму корней уравнения (в градусах) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2$, принадлежащих промежутку $(-180^\circ; 270^\circ)$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 2. Получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = 1, \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = 1, 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \quad x = 30^\circ + 180^\circ n, n \in Z.$$

Выполним отбор корней, принадлежащих промежутку $(-180^\circ; 270^\circ)$.

$$-180^\circ < 30^\circ + 180^\circ n < 270^\circ \quad -210^\circ < 180^\circ n < 240^\circ,$$

$$-\frac{7}{6} < n < \frac{4}{3}, \quad n \in Z, \quad n \in \{-1, 0, 1\}.$$

$$\text{Имеем: } x_1 = -150^\circ, \quad x_2 = 30^\circ, \quad x_3 = 210^\circ; \quad x_1 + x_2 + x_3 = 90^\circ.$$

Ответ: 90° .

5. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения (в градусах) $\cos 2x \cdot (\operatorname{tg} 2x + 1) = 0$.

Решение. Учитывая, что $\cos 2x \neq 0$, имеем, $\operatorname{tg} 2x = -1$,

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \quad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

$$\text{Наименьший положительный корень } x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}, \quad x_1 = 67,5^\circ.$$

$$\text{Наибольший отрицательный корень } x_2 = -\frac{\pi}{8}, \quad x_2 = -22,5^\circ.$$

$$x_1 + x_2 = 45^\circ.$$

Ответ: 45° .

6. Найдите количество положительных корней уравнения $\sqrt{3\pi - 2x} \cdot (\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$.

Решение.

$$\left[\begin{cases} \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0, \\ 3\pi - 2x \geq 0, \\ 3\pi - 2x = 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \right. \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z, \\ x \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Положительные корни } x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Ответ: 2.

7. Сколько корней уравнения $\cos 2x + \cos 6x = 0$ принадлежит промежутку $[-180^\circ; 180^\circ]$?

Решение. $2 \cos 4x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \cos 4x = 0, \\ \cos 2x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z. \end{cases}$$

Выполним отбор корней, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$:

$$1) -\pi \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \leq \pi; \quad -\frac{9}{8} \leq \frac{n}{4} \leq \frac{7}{8}; \quad -\frac{9}{2} \leq n \leq \frac{7}{2}, n \in Z.$$

Следовательно, $n = -4, 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

$$2) -\pi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \leq \pi; \quad -\frac{5}{4} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{3}{4}; \quad -\frac{5}{2} \leq n \leq \frac{3}{2}, n \in Z.$$

Следовательно, $n = -2, 0, \pm 1$.

Исходное уравнение имеет 12 корней.

Ответ: 12.

8. Пусть x_0 — наибольший отрицательный корень уравнения $\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x - 5 \cos^2 x = 0$. Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, учитывая, что нули косинуса не являются корнями уравнения. Получим:

$$\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ x = -\operatorname{arctg} 5 + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Наибольший отрицательный корень $x_0 = -\operatorname{arctg} 5$, значит, $\operatorname{tg} x_0 = -5$.

Ответ: -5 .

Вариант № 1

1. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах) $\cos 3x \cos x - \sin x \sin 3x = 1$.

2. Найдите количество корней уравнения $3 \cos^3 x - 4 \cos x + 1 = 0$, принадлежащих отрезку $[-180^\circ; 270^\circ]$.

3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения (в градусах) $\sqrt{3} \cos x = \sin x$.

4. Найдите сумму всех корней уравнения (в градусах) $\sin 5x + \cos 5x = 1$, принадлежащих промежутку $[-90^\circ; 150^\circ]$.

5. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения (в градусах) $\sin \frac{x}{3} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{4} - 1 \right) = 0$.

6. Найдите количество корней уравнения $\sqrt{9-x^2} \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$.
7. Сколько корней уравнения $\sin 3x - \sin 5x = 0$ принадлежит промежутку $(-90^\circ; 180^\circ]$?
8. Пусть x_0 — наименьший корень уравнения $3 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 1$, принадлежащий интервалу $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$.
Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

Вариант № 2

1. Найдите число корней уравнения $\left(\cos x - \frac{1}{2} \right) \log_5 (4 - x^2) = 0$.
2. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения (в градусах) $\cos 3x \cos 2x = \sin 3x \sin 2x$.
3. Найдите сумму корней уравнения (в градусах) $\operatorname{tg} x (\cos 7x + 5) = 0$ на промежутке $[-360^\circ; 0^\circ)$.
4. Укажите число корней уравнения $\sin^2 x + 3 \cos x + 3 = 0$ на промежутке $[-3\pi; \pi]$.
5. Найдите сумму корней уравнения (в градусах) $\log_2 2 \sin x + \log_2 \cos x = 0$, принадлежащих отрезку $[0; 180]$.
6. Сколько корней имеет уравнение $\sin^2 x - 3 \sin 2x - 7 \cos^2 x = 0$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi \right)$?
7. Найдите наименьший неотрицательный корень уравнения (в градусах) $\operatorname{ctg} 2x \sin x = 0$.
8. Вычислите сумму отрицательных корней уравнения $(\cos^3 3x + \cos 3x) \sqrt{90^\circ + x} = 0$.

Вариант № 3

1. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах) $\sin 6x = \sqrt{3} \sin 3x$.
2. Найдите количество различных значений аргумента $x \in (0; 2\pi)$, при которых значение функции $f(x) = \cos^3 x - 2 \cos^2 x$ равно значению функции $g(x) = 3 \cos x$.
3. Найдите сумму наибольшего и наименьшего корней уравнения (в градусах) $\sin 4x + \cos 2x = 0$, принадлежащих промежутку $(-180^\circ; 90^\circ)$.

4. Решите уравнение $5 + \cos^2 2\pi x = 5 - (4x + 1)^2$. В ответе запишите абсолютную величину наименьшего корня этого уравнения.

5. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах)

$$\frac{2 \cos x + 1}{2 \sin x - \sqrt{3}} = 0.$$

6. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения (в градусах) $\sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{2}$.

7. При каком x значение функции $y = 3 - \sin^2 \frac{5\pi x}{4}$ равно значению функции $y = \sqrt{9 + (5x - 12)^2}$?

8. Пусть x_0 — наименьший положительный корень уравнения $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$. Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

Вариант № 4

1. Найдите количество корней уравнения $1 - \operatorname{tg}^2 x = 0$, принадлежащих промежутку $[0^\circ; 360^\circ]$.

2. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах) $\sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$.

3. Найдите сумму всех корней уравнения (в градусах) $\sin x \cos x - \sin^2 x + \sin x - \cos x = 0$, принадлежащих промежутку $[0^\circ; 360^\circ]$.

4. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения (в градусах) $\sin 2x = \sin x$.

5. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения (в градусах) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$.

6. Пусть x_0 — наибольший отрицательный корень уравнения $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$. Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

7. Найдите количество корней уравнения $(1 + \operatorname{tg} x) \cos x = 0$, принадлежащих промежутку $[-360^\circ; 360^\circ]$.

8. Найдите среднее арифметическое наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения (в градусах)

$$\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1.$$

Вариант № 5

1. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах) $\sin 6x - \sin 3x = 0$.

2. Найдите количество различных значений аргумента $x \in (0; 2\pi]$, при которых значение функции $f(x) = \cos^5 x$ равно значению функции $g(x) = 7 \cos^4 x + 8 \cos^3 x$.
3. Найдите сумму наибольшего и наименьшего корней уравнения (в градусах) $\sin 2x - \sqrt{2} \cos x = 0$, принадлежащих промежутку $[-90^\circ; 270^\circ]$.
4. Решите уравнение $(\sqrt{7} - \cos 3\pi x)(\sqrt{7} + \cos 3\pi x) = 7 + (4x - 2)^2$.
В ответе запишите наибольший по абсолютной величине корень этого уравнения.
5. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах) $\frac{2 \cos x - 1}{2 \sin x + \sqrt{3}} = 0$.
6. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения (в градусах) $\cos 4x \sin 4x = \frac{1}{2}$.
7. При каких x значение функции $y = \sqrt{49 - (3x - 6)^2}$ равно значению функции $y = \cos \frac{\pi x}{4} + 7$?
8. Пусть x_0 — наименьший положительный корень уравнения $9 \cos^2 x + 7 \cos x \sin x - 1 = 0$. Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

Вариант № 6

1. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах) $\sin 4x - \sin 2x = 0$.
2. Найдите количество различных значений аргумента $x \in (0; 2\pi)$, при которых значение функции $f(x) = \cos^3 x$ равно значению функции $g(x) = 3 \cos^2 x - 2 \cos x$.
3. Найдите сумму наибольшего и наименьшего корней уравнения (в градусах) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos x = 0$, принадлежащих промежутку $(-180^\circ; 360^\circ)$.
4. Решите уравнение $(\sqrt{3} - \sin 2\pi x)(\sqrt{3} + \sin 2\pi x) = 3 + (2x - 1)^2$.
В ответе запишите наименьший по абсолютной величине корень этого уравнения.
5. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах) $\frac{2 \sin x - 1}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$.
6. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $\cos^2 3x = 0,5$.

7. При каких x значение функции $y = \sqrt{25 - (4x - 9)^2}$ равно значению функции $y = \sin^2 \frac{4\pi x}{3} + 5$?
8. Пусть x_0 — наименьший положительный корень уравнения $7 \cos^2 x + 5 \cos x \sin x - 1 = 0$. Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

Вариант № 7

1. Найдите наименьший корень уравнения $\sin \pi x + \cos 2\pi x = 0$, принадлежащий отрезку $[0; 2]$.
2. Найдите количество различных значений $x \in (0; \pi)$, при которых значение функции $f(x) = 4 \sin^4 x - 1$ равно значению функции $g(x) = \cos 2x$.
3. Найдите сумму корней уравнения (в градусах) $3 \cos x - 2 \sin^2 x = 0$, принадлежащих отрезку $[0^\circ; 500^\circ]$.
4. Сколько корней уравнения $\sin 2x - 1 = 2 \sin x - \cos x$ не принадлежат множеству $(-\infty; -2\pi) \cup [0; \pi) \cup [2\pi; +\infty)$?
5. Найдите число корней уравнения $\operatorname{tg} 5x \cdot \cos 10x - \sin 10x = \sin 5x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}\right)$.
6. Сколько корней имеет уравнение $(\sin x - 1 - \cos^2 x) \sqrt{25 - x^2} = 0$?
7. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $4 \cos x \cdot \cos 2x = 1$.
8. Пусть x_0 — наименьший положительный корень уравнения $2 \sin^2 x - \sin 2x - \cos 2x = 0$. Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

Вариант № 8

1. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах) $\cos x = -\frac{1}{2}$.
2. Найдите количество различных корней уравнения $\sin^3 x - \sin x = 0$, принадлежащих промежутку $[0; 2\pi]$.
3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения (в градусах) $\sin x = \sqrt{3} \cos x$.
4. Найдите сумму всех корней уравнения (в градусах) $\sin 3x + \cos 3x = 1$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.
5. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения (в градусах) $\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$.

6. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{1-x^2} \cdot (\sin x + \cos x) = 0$?
7. Найдите сумму корней уравнения (в градусах) $\cos x \cos 3x = -\frac{1}{2}$, принадлежащих отрезку $[0^\circ; 180^\circ]$.
8. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах) $2 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x + 1 = 0$.

Вариант № 9

1. Найдите наибольший корень уравнения $\cos 2x - \cos x = 0$, принадлежащий отрезку $[-2\pi; 0]$.
2. Найдите количество различных значений $x \in (0; 2\pi)$, при которых значение функции $f(x) = 12 \cos^4 x - 3$ равно значению функции $g(x) = \cos 2x$.
3. Найдите сумму корней уравнения (в градусах) $\cos 2x + 9 \sin x + 4 = 0$, принадлежащих отрезку $[-360^\circ; 180^\circ]$.
4. Сколько корней уравнения $\sin 2x + 2 \cos x = \sin x + 1$ не принадлежат множеству $(-\infty; -\pi] \cup \left(0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$?
5. Найдите число корней уравнения $\sin 6x + \operatorname{ctg} 3x \cdot \cos 6x = \cos 3x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.
6. Сколько корней имеет уравнение $(\cos x - 1 - \sin^2 x) \sqrt{3 - x^2} = 0$?
7. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $\sin x \cdot \sin 3x = 0,5$.
8. Пусть x_0 — наибольший отрицательный корень уравнения $\cos 2x + 5 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 0$. Найдите $\operatorname{ctg} x_0$.

§ 4. Различные приёмы при решении тригонометрических уравнений

Демонстрационный вариант

1. Решите уравнение $2^{\sin x} \cdot 2^{\sin 3x} = 16^{\cos^2 x}$.

Решение. $2^{\sin x + \sin 3x} = 2^{4 \cos^2 x}$, $\sin x + \sin 3x = 4(1 - \sin^2 x)$,
 $\sin x + 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 4 - 4 \sin^2 x$, $4 \sin^3 x - 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 4 = 0$,
 $\sin^3 x - \sin^2 x - \sin x + 1 = 0$.

Обозначим $\sin x = t$, $|t| \leq 1$. Уравнение примет вид $t^3 - t^2 - t + 1 = 0$,
 $t^2(t - 1) - (t - 1) = 0$, $(t - 1)^2(t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -1. \end{cases}$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = -1; \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2. В скольких точках произведение функций $y = \sin 8x$ и $y = \arcsin x$ равно нулю?

Решение. $\sin 8x \cdot \arcsin x = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sin 8x = 0, \\ -1 \leq x \leq 1, \\ \arcsin x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z}, \\ -1 \leq x \leq 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Выполним отбор корней, принадлежащих промежутку $[-1; 1]$:

$$k = \pm 3 \Rightarrow x = \pm \frac{3\pi}{8} \notin [-1; 1],$$

$$k = \pm 2 \Rightarrow x = \pm \frac{2\pi}{8} \in [-1; 1],$$

$$k = \pm 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{8} \in [-1; 1],$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-1; 1].$$

При $|k| > 3$ полученные значения x не принадлежат промежутку $[-1; 1]$.
Значит, произведение данных функций равно нулю в пяти точках.

Ответ: 5.

3. Решите уравнение $(4 \sin^2 x - 4 \sin x - 3) \sqrt{-51 \cos x} = 0$.

Решение.

$$\begin{cases} 4 \sin^2 x - 4 \sin x - 3 = 0, \\ \cos x \leq 0, \\ \cos x = 0. \end{cases}$$

Решая уравнение $4 \sin^2 x - 4 \sin x - 3 = 0$ как квадратное относительно $\sin x$, находим, что $\sin x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = \frac{3}{2}$.

Уравнение $\sin x = \frac{3}{2}$ не имеет решений, так как $|\sin x| \leq 1$.

Следовательно, система принимает вид:

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x \leq 0, \\ \cos x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z; \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

4. Найдите все x , обращающие в нуль произведение функций $y = \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $y = \log_{11} x$.

Решение. $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \log_{11} x = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \\ x > 0, \\ \log_{11} x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z, \\ x > 0, \\ x = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4}, \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in N, \\ x = 1. \end{cases}$$

Ответ: $1; \frac{\pi}{4}; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in N$.

5. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции $f(x) = (\sin^2 x - 1) \cdot \ln(-x)^2$ с осью Ox .

Решение. Задача сводится к решению уравнения $f(x) = 0$. Получаем

$$-\cos^2 x \ln(-x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ x \neq 0, \\ \ln(-x)^2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Ответ: $\pm 1; \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

6. Найдите корень уравнения $\cos x = x^2 - 4\pi x + 4\pi^2 + 1$.

Решение. $\cos x = (x - 2\pi)^2 + 1$.

Левая часть уравнения не больше 1, а правая — не меньше 1, поэтому уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ (x - 2\pi)^2 + 1 = 1. \end{cases}$$

Единственным решением полученной системы является $x = 2\pi$.

Ответ: 2π .

7. Решите уравнение $1 + \operatorname{tg}^2 x = x^2 + (\sqrt{4 - x^2})^2$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 2, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$x \in \left[-2; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 2\right].$$

Решим уравнение на области определения:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 4, \quad \operatorname{tg}^2 x = 3, \quad \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}, \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Заметим, что $\frac{2\pi}{3} > 2$, $-\frac{2\pi}{3} < -2$, следовательно, $x = \pm\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}$.

8. Решите уравнение $(6\sin^2 x + 19\sin x - 20)\log_4(\cos x) = 0$.

Решение. ОДЗ: $\cos x > 0$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} 6\sin^2 x + 19\sin x - 20 = 0, \\ \log_4(\cos x) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6\sin x - 5)(\sin x + 4) = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения совокупности получаем $\sin x = \frac{5}{6}$ или $\sin x = -4$.

Так как $|\sin x| \leq 1$, то остаётся только $\sin x = \frac{5}{6}$; $x = \arcsin \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

или $x = \pi - \arcsin \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Значение $\arcsin \frac{5\pi}{6}$ лежит в пер-

вой четверти, поэтому $x = \arcsin \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ удовлетворяет ОДЗ. Значение

$\pi - \arcsin \frac{5\pi}{6}$ лежит во второй четверти, поэтому $x = \pi - \arcsin \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ не удовлетворяет ОДЗ.

Из второго уравнения совокупности получаем $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\arcsin \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Вариант № 1

1. Сколько корней имеет уравнение $\arccos x \cdot \cos 5x = 0$?

2. Решите уравнение

$$2(\sin x + 1) \sin^2 x - (2 \cos^2 x - 1) \sin x + 1 - 2 \cos^2 x = 0.$$

3. Решите уравнение $2^{\cos^2 \pi x} + 2x = x^2 + 3$.

4. Решите уравнение $\frac{\log_{\sqrt{2}}^2(\sin x) + \log_{\sqrt{2}}(\sin x)}{\cos x} = 0$.

5. Решите уравнение $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^3 x + 6 \operatorname{tg} 2x} = 1$.

6. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции $y = \cos 2x - \sin x - \cos x$ с осью Ox .

7. Решите уравнение $\cos x = |\cos x| \cdot (|x^2 + x| - 1)$.

8. Решите уравнение $(2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2) \sqrt{24 \sin x} = 0$.

Вариант № 2

1. Решите уравнение $3^{\cos 4x} \cdot 3^{\cos 2x} = 3^{2 \cos^2 x}$.

2. В скольких точках график произведения функций $y = \sin 4x$ и $y = \arccos x$ пересекает ось Ox ?

3. Решите уравнение $(2 \cos x + \sqrt{3}) \log_3 \operatorname{ctg} x = 0$.

4. Найдите все x , при которых произведение функций $y = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $y = \log_{12} x$ равно нулю.

5. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции $f(x) = (\cos^2 x - 1) \cdot \ln |x|$ с осью Ox .

6. Найдите корни уравнения $4 \sin x = 4x^2 - 4\pi x + \pi^2 + 4$.

7. Решите уравнение $1 + 3 \operatorname{tg}^2 x = x^2 + \sqrt{1 - x^2}$.

8. Решите уравнение $(6 \sin^2 x + 5 \sin x - 4)\sqrt{15 \cos x} = 0$.

Вариант № 3

1. Найдите все корни уравнения $(1 + \cos 4x) \sin 2x = \cos^2 2x$ на интервале $(0; \pi)$.

2. Найдите наибольший корень уравнения $\frac{\sin 2x}{\sqrt{x(3\pi - 2x)}} = 0$.

3. Решите уравнение $\frac{5 \cos^2 x - 4 \cos x}{2 \operatorname{tg} x + 3} = 0$.

4. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = \sin 2x + \cos 2x$ и $y = \log_{1-x^2} (1 - x^2)$.

5. Укажите множество всех чисел x таких, что $|\cos x| = \cos x \cdot (x - 5)^2$.

6. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$y = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} \text{ и } y = 1 + \cos 4x.$$

7. Найдите наибольшее x , для которого произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ равно функции $h(x)$, где $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{3 - x^2}$, $h(x) = |\sin x|$.

8. Решите уравнение $(3 \cos^2 x + 5 \cos x - 2)\sqrt{-5 \sin x} = 0$.

Вариант № 4

1. Решите уравнение $1 + 3^{\operatorname{ctg} x} = 6 \cdot 9^{\frac{\sin(\frac{x}{4})}{\sqrt{2} \sin x}}$.

2. При каком значении x значения функций $y = \arcsin 4x$ и $y = \arccos 3x$ совпадают?

3. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sin 5x$ и $y = \cos 2x$.

4. Найдите наименьший положительный корень уравнения $3 \sin x + \sin 2x - 3 \cos x = 1$.

5. Решите уравнение $\sqrt{-7 \operatorname{tg} x} (4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3) = 0$.

6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin^2 x - \frac{3}{5} \cdot 5^{\log_5(\sin x)} = \frac{2}{5}.$$

7. Определите количество корней уравнения $\sin x = -x^2 + 2x + 2$.

8. Решите уравнение $(4 \sin^2 x + 13 \sin x + 3) \sqrt{-8 \cos x} = 0$.

Вариант № 5

1. Решите уравнение $4 \left(\frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} - \cos 2x \right) = 3 \sin x \cos^2 x$.

2. Укажите множество всех x таких, что $\operatorname{tg} 4x - \sin 4x = 2 \sin^2 2x$.

3. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = |\sin x|$ и $y = 3 \cos x$.

4. Найдите все x , для которых выполняется равенство

$$8 \cos^2 x + \sin 2x + 6 \sin^2 x = 6 \cdot \frac{\cos x}{\cos x}.$$

5. Решите уравнение $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = \left(\sin 2x + \frac{\cos 2x}{\sqrt{3}} \right) \cdot \sqrt{x}$.

6. Укажите наименьший корень уравнения

$$6 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = \frac{\log_2 x}{\log_4 x^2}.$$

7. Решите уравнение $\frac{6 \sin^2 x - \sin x - 2}{\sqrt{-\cos x}} = 0$.

8. Решите уравнение $(5 \cos^2 x + 19 \cos x - 4) \log_5(\sin x) = 0$.

Вариант № 6

1. Решите уравнение $2 \sin^2 x + \cos 4x = \frac{\sqrt{x(\pi - x)}}{\sqrt{x(\pi - x)}}$.

2. Найдите сумму корней уравнения $\cos x \cdot \log_2(4 - x^2) = 0$.

3. Решите уравнение $(\sqrt{2} \sin^2 x + \sin x) \sqrt{-28 \operatorname{ctg} x} = 0$.

4. Пересекаются ли графики функций $y = \sin x + \cos x$ и $y = (\sqrt{1 - x^2})^2 + x^2$? Если да, то укажите абсциссы этих точек пересечения.

5. Укажите множество всех чисел x таких, что $\sin x = |\sin x| \cdot (x - 4)^2$.

6. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$y = \frac{2 \cos x \cdot \sin 2x}{\operatorname{tg} x} + \cos 2x \text{ и } y = 2 \cos x - 1.$$

7. Найдите наибольшее x , для которого значение произведения функций $f(x)$ и $g(x)$ равно значению функции $h(x)$, где $f(x) = |\cos x|$, $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $h(x) = \cos x$.

8. Решите уравнение $(6 \sin^2 x + 11 \sin x - 2) \log_6(\cos x) = 0$.

Вариант № 7

1. Найдите все значения x , при которых выполняется равенство

$$\cos 4x + \frac{\cos x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x.$$

2. Решите уравнение $\sin 2x - \sqrt{3} \sin x - \sqrt{2} \cos x + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$.

3. Найдите все корни уравнения $\cos x - \sin x = \frac{3^{\log_9(2\pi-x)} \cdot \log_2 x}{\log_2 x^{\sqrt{2\pi-x}}}$.

4. Решите уравнение $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos x = |\sin x|$.

5. При каких значениях x значение функции $y = \cos^2 x$ совпадает со значением функции $y = \sqrt{2} \operatorname{ctg} |x|$?

6. Решите уравнение $\frac{16^{\sin^2 x} - 4^{\sqrt{3} \sin x}}{\sqrt{-8 \cos x} - 2} = 0$.

7. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \operatorname{tg} 2x$ и $y = 2^{\log_4 3} \cdot \log_{4-x^2}(4-x^2)$.

8. Решите уравнение $(3 \cos^2 x + 11 \cos x + 6) \lg(-\sin x) = 0$.

Вариант № 8

1. Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \sin 5x$.

2. Решите уравнение $4 \sin^3 x - 2 \cos^3 x - 3 \sin x + 2 \cos x = 0$.

3. Решите уравнение $\frac{\operatorname{ctg}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{ctg} x}{\sqrt{-17 \sin x}} = 0$.

4. Решите уравнение $3 \sin 3x - \sin 6x = 3 \cos 3x - 3$.

5. Найдите наименьший корень уравнения

$$2 \cos 5x \sin x + \sin 4x = \frac{\log_3 3x}{1 + \log_3 x}.$$

6. Решите уравнение $\cos 3x \cdot \cos 2x = 1$.

7. Решите уравнение $5 \sin^2 x + 8 \cos x + 1 = |\cos x| + \cos^2 x$.

8. Решите уравнение $(4 \sin^2 x + 11 \sin x + 6) \ln(-\cos x) = 0$.

Вариант № 9

1. Найдите все значения x , при которых выполняется равенство

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x.$$

2. Найдите все корни уравнения $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} + 3 = \frac{\sqrt{2\pi x - x^2}}{\sqrt{2\pi x - x^2}}.$

3. Решите уравнение $\frac{3\sqrt{3} \cos x - 9 \cos^2 x}{\sqrt{-2 \sin x - 1}} = 0.$

4. Решите уравнение $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + |\cos x|.$

5. При каких x значение функции $y = \sqrt{3} |\operatorname{tg} x|$ совпадает со значением функции $y = 2 \sin^2 x$?

6. Какие числа из промежутка $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ обращают в нуль функцию

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x}} + \cos \frac{x}{2}?$$

7. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$y = \cos 2x - \sin 2x \text{ и } y = -(\sqrt{1 - x^2})^2 - x^2.$$

8. Решите уравнение $(4 \sin^2 x + 15 \sin x + 9) \log_9(\cos x) = 0.$

§ 5. Показательные уравнения

Демонстрационный вариант

1. Пусть x_0 — корень уравнения $\sqrt[3]{25^x} \cdot (0,2)^{x+2} = 1$. Найдите значение выражения $(0,5)^{x_0}$.

Решение. $5^{\frac{2x}{3}} \cdot 5^{-x-2} = 1$, $5^{\frac{2x}{3}-x-2} = 5^0$, $\frac{x}{3} = -2$, $x = -6$.

Следовательно, $(0,5)^{-6} = 2^6 = 64$.

Ответ: 64.

2. Решите уравнение $\frac{7}{3^{5-x}} - 3^{x-6} = 180$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их сумму.

Решение. $7 \cdot 3^{x-5} - 3^{x-6} = 180$, $3^{x-6}(7 \cdot 3 - 1) = 180$, $3^{x-6} = 9$, $3^{x-6} = 3^2$, $x - 6 = 2$, $x = 8$.

Ответ: 8.

3. Найдите сумму корней уравнения $5^{4x+1} + 4 \cdot 5^{2x} = 1$.

Решение.

$$5 \cdot (5^{2x})^2 + 4 \cdot 5^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{2x} = -1, \\ 5^{2x} = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Уравнение $5^{2x} = -1$ не имеет решений, так как $5^{2x} > 0$. Уравнение $5^{2x} = 5^{-1}$ имеет единственный корень $x = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

4. Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций $y = 27 \cdot 3^x - 7^{x+1}$ и $y = 5 \cdot 7^x - 3^x$.

Решение. Задача сводится к решению уравнения $27 \cdot 3^x - 7^{x+1} = 5 \cdot 7^x - 3^x$, $28 \cdot 3^x = 12 \cdot 7^x$. Разделим обе части уравнения на $7^x \cdot 28$, учитывая, что $7^x > 0$. Получим $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{12}{28}$, $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{3}{7}$, $x = 1$.

Ответ: 1.

5. Найдите произведение корней уравнения $\left(1\frac{2}{5}\right)^{(x-1)(x+2)} = (3,4\sqrt{2})^0$.

Решение. $\left(1\frac{2}{5}\right)^{(x-1)(x+2)} = 1$, $\left(1\frac{2}{5}\right)^{(x-1)(x+2)} = \left(1\frac{2}{5}\right)^0$,

$$(x-1)(x+2) = 0, \quad x_1 \cdot x_2 = -2.$$

Ответ: -2 .

6. Найдите значение x , при котором $f(x) = 0$, если $f(x) = 3^{x+9} \cdot 5^{4x} - 15^{2x+6}$.

Решение. $3^{x+9} \cdot 5^{4x} = 3^{2x+6} \cdot 5^{2x+6}$.

Разделим обе части уравнения на $5^{2x+6} \cdot 3^{x+9}$, учитывая, что $5^{2x+6} \cdot 3^{x+9} > 0$. Получим $5^{2x-6} = 3^{x-3}$, $25^{x-3} = 3^{x-3}$, $x-3 = 0$, $x = 3$. При $x = 3$ $f(3) = 0$.

Ответ: 3 .

7. Решите уравнение $6^{1-x-2x^2} = 6^{2x^2+x} - 5$. В ответе запишите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько.

Решение. $6^{1-(2x^2+x)} = 6^{2x^2+x} - 5$. Обозначим $6^{2x^2+x} = t$, $t > 0$.

Уравнение примет вид $\frac{6}{t} = t - 5$, $\begin{cases} t^2 - 5t - 6 = 0, \\ t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1, \\ t = 6, \\ t > 0; \end{cases}$

$$\Leftrightarrow t = 6.$$

Вернёмся к исходной переменной: $6^{2x^2+x} = 6$, $2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = \frac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = -1 + \frac{1}{2} = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

8. Решите уравнение $2 \cdot 3^{2x} + 3^x \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{2x} = 0$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их произведение.

Решение. Разделим обе части уравнения на 2^{2x} , учитывая, что $2^{2x} > 0$.

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = -2, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Уравнение $\left(\frac{3}{2}\right)^x = -2$ не имеет решений, так как $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$.

Уравнение $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$ имеет единственное решение $x = 1$.

Ответ: 1 .

Вариант № 1

1. Пусть x_0 — корень уравнения $\sqrt{8^x} \cdot (0,5)^{5-x} = 1$. Найдите значение выражения $(0,2)^{-x_0}$.

2. Решите уравнение $2^{x-2} + \frac{5}{2^{3-x}} = 28$. В ответе запишите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько.

3. Решите уравнение $3^{4x-1} + 3^{2x} - 6 = 0$. В ответе запишите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько.

4. Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций $y = 4 \cdot 5^{4x} - 7 \cdot 9^{2x}$ и $y = 3^{4x+1} - 2 \cdot 25^{2x}$.

5. Решите уравнение $\left(\frac{7}{3}\right)^{x^2+2x-15} = (49\sqrt{3})^0$.

В ответе запишите корень уравнения или среднее арифметическое его корней, если их несколько.

6. Найдите значение x , при котором $f(x) = 0$, если $f(x) = 2^{x+1} \cdot 3^{4x} - 9 \cdot 6^{2x}$.

7. Решите уравнение $2 \cdot 7^{x+1} + 5 = 7^{-x}$. В ответе запишите корень уравнения или произведение его корней, если их несколько.

8. Решите уравнение $4 \cdot 3^{2x} + 5 \cdot 3^x \cdot 4^x - 9 \cdot 16^x = 0$. В ответе запишите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько.

Вариант № 2

1. Найдите произведение корней уравнения $2^{2x+2} + 4 = 17 \cdot 2^x$.

2. Найдите значение x , при котором выполняется равенство $7^{5x+5} - 24 \cdot 32^x = 2^{5x+3}$.

3. Найдите корень уравнения $3^{2x+8} - 1 = \frac{2}{3^{2x+7}}$.

4. Найдите x , при котором значение функции $y = 2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^{5x}$ равно значению функции $y = 8 + 6 \cdot 2^x$.

5. Найдите сумму всех значений x , при которых значение функции $y = 10^{2x} + 9 \cdot 20^x - 10 \cdot 2^{2x}$ равно нулю.

6. Укажите наименьший корень уравнения $11 \cdot \left(3\frac{2}{3}\right)^{x^2-5} = \log_3 27$.

7. Найдите корень уравнения $\sqrt{9^x - 72} = 3^{x-1}$.

8. Найдите сумму корней уравнения $2^x \sqrt{x} + 4 = 4\sqrt{x} + 2^x$.

Вариант № 3

1. Найдите значение выражения $23 - 13,6 \cdot x_0$, где x_0 — наименьший корень уравнения $3 \cdot 5^x - x \cdot 5^x = 3 - x$.
2. Найдите сумму корней уравнения $9^{-2x} - 12 \cdot 9^{-x} + 27 = 0$.
3. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $7 \cdot 4^x - 9 \cdot 14^x + 2 \cdot 49^x = 0$.
4. При каком x значение функции $y = \frac{9}{3^{2x-5}}$ равно значению функции $y = 3^{2x-5} + 8$?
5. Найдите значение выражения $5x_0 + 3$, если x_0 — корень уравнения $4 \cdot \left(\frac{2}{17}\right)^{5x+2} - 17 \cdot \left(\frac{2}{17}\right)^{5x+3} = 17$.
6. При каком x значение функции $f(x) = \frac{3^{x+4} \cdot 4^{x+3}}{18 \cdot 5^{x+2}}$ равно 2?
7. Найдите наибольший корень уравнения $4^{x^2+x} - 15 = 4^{2-x-x^2}$.
8. Найдите произведение корней уравнения $10 - 2^{3x+1} = \frac{16}{2^{3x+1}}$.

Вариант № 4

1. Пусть x_0 — корень уравнения $\sqrt{3^x} \cdot 2^x = 144$. Найдите $(0,3)^{x_0}$.
2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $2 \cdot 4^{x^2-1} - 3 \cdot 2^{x^2+1} + 16 = 0$.
3. При каком значении аргумента x функции $y = 9 \cdot 16^x$ и $y = 7 \cdot 12^x + 16 \cdot 9^x$ принимают одно и то же значение?
4. Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций $y = 2^{2x} + 2^{2x+3}$ и $y = 3^{2x} + 3^{2x+1}$.
5. Пусть x_0 — корень уравнения $2^{3x} - 3 \cdot 2^{3x-2} + 2^{3x-4} = 20$. Вычислите $0,4^{x_0}$.
6. При каком значении x произведение $2^{2x+1} \cdot 3^{3x+5}$ равно произведению $\frac{4}{3} \cdot 9^{x+1} \cdot 8^{x+1}$?
7. Найдите отрицательное значение x , при котором $f(x) = 0$, если $f(x) = (3 + 2\sqrt{2})^x + (3 - 2\sqrt{2})^x - 6$.
8. Найдите ординату общей точки графиков функций $y = 2^{3x-1} \cdot 3^{x-3}$ и $y = 4^{x+1}$.

Вариант № 5

1. Найдите значение выражения $11,3x_0 - 12$, если x_0 — наибольший корень уравнения $x \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x = x - 3$.
2. Найдите сумму корней уравнения $5^{-2x} - 30 \cdot 5^{-x} + 125 = 0$.
3. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$.
4. При каком x значение функции $y = 11^{x-1} - 9$ равно значению функции $y = \frac{22}{11^{x-1}}$?
5. Найдите наибольшее значение выражения $3x_0 + 1$, если x_0 — корень уравнения $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$.
6. При каком x значение функции $f(x) = \frac{4^x \cdot 5^{x+1}}{5 \cdot 20^{2-x}}$ равно 1?
7. Найдите наименьший корень уравнения $7^{x^2+x} - 48 = 7^{2-x^2-x}$.
8. Найдите произведение корней уравнения $3^{5x-1} - 12 = \frac{-27}{3^{5x-1}}$.

Вариант № 6

1. Найдите значение выражения $12,8x_0 + 17$, если x_0 — наименьший корень уравнения $3^x \cdot x - 3^x = x - 1$.
2. Найдите сумму корней уравнения $4^{-2x} - 6 \cdot 4^{-x} + 8 = 0$.
3. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $3 \cdot 25^x - 2 \cdot 15^x - 5 \cdot 9^x = 0$.
4. При каком x значение функции $y = 2^{x-3} + 7$ равно значению функции $y = 2^{6-x}$?
5. Найдите наибольшее значение выражения $2x_0 + 2$, если x_0 — корень уравнения $2 \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^{2x+1} - 13 \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^{2x+2} = 13$.
6. При каком x значение функции $f(x) = \frac{2^{x+1} \cdot 5^{x+3}}{250 \cdot 9^x}$ равно 1?
7. Найдите наименьший корень уравнения $3^{x^2+2x} - 26 = 3^{3-2x-x^2}$.
8. Найдите произведение корней уравнения $5^{2x+1} - 3 = 2 \cdot 5^{-2x}$.

Вариант № 7

1. Решите уравнение $0,2 \cdot 25^x + 4 \cdot 5^{x-1} = 1$.
2. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько:
 $2 \cdot (\sqrt[3]{3})^x + (\sqrt[3]{3})^{x-3} = 21$.
3. Найдите $2x_0 + 5$, если x_0 — наибольший корень уравнения
 $3 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 4^{2x+1} = 0$.
4. Найдите сумму корней уравнения $10 \cdot 4^{3-3x-x^2} - 4^{x^2+3x-4} = 4,5$.
5. При каком x значение функции $f(x) = \frac{7}{7^x + 301}$ не больше и не меньше значения функции $g(x) = \frac{7}{7^{x+1} + 7}$?
6. При каком x значение функции $f(x) = \frac{3^{x+3} - 3}{3^x + 23}$ равно 3?
7. Решите уравнение $\sqrt{3} \cdot 4^x = 3^{x+1} - 3^{x-1}$.
8. Найдите корень уравнения x_0 , удовлетворяющий условию $3x_0 + 1 > 0$:
 $10 \cdot 3^{\sqrt{3x^2-2x}} - 3 = 3 \cdot 9^{\sqrt{3x^2-2x}}$.

Вариант № 8

1. Решите уравнение $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.
2. Найдите наименьший корень уравнения $(\sqrt[3]{9})^x + 9(\sqrt[3]{9})^{3-x} = 30$.
3. Найдите значение выражения $2x_0 + 3$, если x_0 — наименьший корень уравнения $3^{2x+1} - 6^x - 2^{2x+1} = 0$.
4. Решите уравнение $4^x + 4^{1-x} = 5$. В ответе запишите корень уравнения или произведение его корней, если их несколько.
5. Решите уравнение $3^{x^2-x} + 3^{3+x-x^2} = 12$. В ответе запишите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько.
6. При каких значениях x значение функции $f(x) = \frac{7^{x+2} + 2}{7^{x+1} + 10}$ равно 3?
7. Решите уравнение $3 \cdot 4^x - 3^{x+\frac{1}{2}} = 2^{2x}$. В ответе запишите корень уравнения или произведение его корней, если их несколько.
8. Найдите количество отрицательных корней уравнения
 $26 \cdot 5^{\sqrt{x^2-\sqrt{5}x}} = 25^{\sqrt{x^2-\sqrt{5}x}+\frac{1}{2}} + 5$.

Вариант № 9

1. Решите уравнение $27 \cdot 9^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 1$.
2. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько:
 $(\sqrt[5]{4})^x + 4(\sqrt[5]{4})^{x-10} = 20$.
3. Найдите значение выражения $2x_0 + 2$, если x_0 — наименьший корень уравнения $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x - 5 \cdot 25^x = 0$.
4. Найдите сумму корней уравнения $2^{x^2+2x-6} - 2^{7-2x-x^2} = 3,5$.
5. При каком x значение функции $f(x) = \frac{5}{12^x + 143}$ не больше и не меньше значения функции $g(x) = \frac{5}{12^{x+2}}$?
6. При каком x значение функции $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^{x+2} - 2}$ равно 1?
7. Найдите наименьшее значение $2x_0$, если x_0 — корень уравнения $25^x + 7^{x+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{7} \cdot 7^x - 2 \cdot 5^{2x-1}$.
8. Найдите корень уравнения x_0 , удовлетворяющий условию $2x_0 + 10 \leq 8$: $17 \cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}} - 8 = 2 \cdot 4^{\sqrt{x^2-8x}}$.

§ 6. Различные приёмы при решении показательных уравнений

Демонстрационный вариант

1. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $y = 0,008^{\sqrt{x}}$ и $y = 0,2 \cdot 0,2^{\sqrt{5x+5}}$.

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$0,008^{\sqrt{x}} = 0,2 \cdot 0,2^{\sqrt{5x+5}}.$$

$$0,2^{3\sqrt{x}} = 0,2^{1+\sqrt{5x+5}} \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 1 + \sqrt{5x+5} \Leftrightarrow 3\sqrt{x} - 1 = \sqrt{5x+5} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9x - 6\sqrt{x} + 1 = 5x + 5, \\ 3\sqrt{x} \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6\sqrt{x} - 4 = 0, \\ x \geq \frac{1}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + \frac{1}{2}) = 0, \\ x \geq \frac{1}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: 4.

2. Найдите нули функции $y = 0,5 \cdot 2^{|x+1|} - 2^{|x-1|}$.

Решение. $2^{|x+1|-1} - 2^{|x-1|} = 0$, $2^{|x+1|-1} = 2^{|x-1|}$, $|x+1|-1 = |x-1|$.

$$\begin{cases} (|x+1|-1)^2 = (x-1)^2, \\ |x+1|-1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 - 2|x+1| + 1 = x^2 - 2x + 1, \\ |x+1| \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x+1| = 4x + 1, \\ \begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \begin{cases} 2|x+1| = 4x + 1, \\ x \geq 0, \\ 2|x+1| = 4x + 1, \\ x \leq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} 2x + 2 = 4x + 1, \\ x \geq 0, \\ 2x + 2 = -4x - 1, \\ x \leq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x = 0,5, \\ x \geq 0, \\ x = -0,5, \\ x \leq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$x = 0,5$.

Ответ: 0,5.

3. Найдите все x , при которых значение функции

$f(x) = 2 \cdot 3^x + 9 \cdot 4^x$ равно значению функции $g(x) = 12^x + 18$.

Решение. $2 \cdot 3^x + 9 \cdot 4^x = 12^x + 18$, $(2 \cdot 3^x - 3^x \cdot 4^x) - (18 - 9 \cdot 4^x) = 0$,
 $(3^x - 9)(2 - 4^x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 9 = 0, \\ 4^x - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 0,5. \end{cases}$

Ответ: 0,5; 2.

4. Найдите рациональные числа, которые являются корнями уравнения

$$\left| 2^{4x^2-1} - 5 \right| = 3.$$

Решение.

$$\begin{cases} 2^{4x^2-1} - 5 = 3, \\ 2^{4x^2-1} - 5 = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{4x^2-1} = 2^3, \\ 2^{4x^2-1} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 1 = 3, \\ 4x^2 - 1 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Условию задачи удовлетворяют числа ± 1 .

Ответ: ± 1 .

5. Сколько корней имеет уравнение $(9x + 8)^{\frac{x-1}{x+2}} = (9x + 8)^{2x}$?

Решение. Заметим, что $x \neq -2$. Следует рассмотреть несколько случаев:

1) Пусть $9x + 8 = 0$, тогда $x = -\frac{8}{9}$. Однако $2x < 0$, а ноль в отрицательной степени не определён, значит, $x = -\frac{8}{9}$ не является корнем.

2) Пусть $9x + 8 = 1$, тогда $x = -\frac{7}{9}$ является корнем.

3) Пусть $9x + 8 = -1$, тогда $x = -1$, при этом $\frac{x-1}{x+2} = -2$, $2x = -2$. Так как $(-1)^{-2} = (-1)^{-2}$, то $x = -1$ — корень исходного уравнения.

4) Если не выполнены условия случаев 1)–3), то $(9x + 8)^{\frac{x-1}{x+2}} = (9x + 8)^{2x} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} = 2x$ и все выражения имеют смысл.

Учитывая, что $x \neq -2$, получим $\frac{x-1}{x+2} = 2x \Leftrightarrow x-1 = 2x^2 + 4x \Leftrightarrow$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = -0,5. \end{cases}$$

При $x = -1$ и при $x = -0,5$ все выражения определены, поэтому исходное уравнение имеет решения: $-1; -\frac{7}{9}; -\frac{1}{2}$. Всего три корня.

Ответ: 3.

6. Найдите наименьший положительный корень уравнения $3^{\sin x+1} + 5 \cdot 3^{\sin x} = 24$.

Решение. $3 \cdot 3^{\sin x} + 5 \cdot 3^{\sin x} = 24$, $8 \cdot 3^{\sin x} = 24$, $3^{\sin x} = 3$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Наименьший положительный корень уравнения $x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

7. Решите уравнение $\frac{1}{3^{-x} + 5} = \frac{1}{3^{1-x} - 1}$.

Решение. $\frac{1}{3^{-x} + 5} = \frac{1}{3 \cdot 3^{-x} - 1}$. Обозначим $3^{-x} = t$, $t \neq \frac{1}{3}$.

Уравнение примет вид $\frac{1}{t + 5} = \frac{1}{3t - 1}$, $3t - 1 = t + 5$, $t = 3$.

Вернёмся к исходной переменной: $3^{-x} = 3$, $x = -1$.

Ответ: -1 .

8. Найдите значения x , при которых выполняется равенство $\sqrt{0,008 - 5^x} = 3 - |x|$.

Решение. $\sqrt{5^{-3} - 5^x} = 3 - |x|$. ОДЗ: $5^{-3} - 5^x \geq 0$, $x \leq -3$.

На ОДЗ уравнение примет вид:

$$\sqrt{5^{-3} - 5^x} = 3 + x \quad (1)$$

Функция $f(x) = \sqrt{5^{-3} - 5^x}$ — монотонно убывающая при $x \leq -3$, а функция $g(x) = 3 + x$ — монотонно возрастающая, следовательно, уравнение (1) может иметь не более одного корня. Поскольку $f(-3) = 0$ и $g(-3) = 0$, то $x = -3$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: -3 .

Вариант № 1

1. Решите уравнение $\sqrt{x} \cdot 3^{x+4} + 54 - 6 \cdot 3^{x+3} - 27\sqrt{x} = 0$.
2. Найдите нули функции $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+2x-2}} - 4^{\sqrt{x^2+2x-2}} + 2$.
3. Решите уравнение $\frac{1-4^x}{5 \cdot 2^{2x} - 16^x - 6} + 1 = \frac{1}{2-4^x}$.
4. Решите уравнение $\left| 3^{\sqrt{3x^2+4x+1}} - 2 \right| = 1$. В ответе запишите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько.
5. Решите уравнение $\sqrt{3^{2x} - 4} = 3^x - 2,5$.
6. Решите уравнение $2^{56+x} \cdot 3^{8+x} \cdot 4^{3x} = (384)^{14-x}$.
7. Решите уравнение $\sqrt{5-x^{2x+3}} = 1$.
8. Решите уравнение $3^{2x^2} - 4 \cdot 3^{x^2+2x+2} + 3^{5+4x} = 0$. В ответе запишите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько.

Вариант № 2

1. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $y = 0,09^{\sqrt{x}}$ и $y = 0,027 \cdot 0,3^{\sqrt{3x-11}}$.
2. Найдите нули функции $f(x) = \frac{1}{9} \cdot 3^{|2x+5|} - 3^{|x|}$.
3. Найдите все значения x , при которых значение функции $g(x) = 9 \cdot 7^x + 7 \cdot 3^x$ равно значению функции $f(x) = 21^x + 63$.
4. Найдите рациональные числа, которые являются корнями уравнения $\left| 3^{2x^2-16} - 7 \right| = 2$.
5. Решите уравнение $|x - 3|^{3x^2-10x+3} = 1$.
6. Найдите наименьший положительный корень уравнения $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18$.
7. Решите уравнение $\frac{1}{5^{1-x} - 55} = \frac{1}{5^{-x} + 45}$.
8. Найдите значения x , при которых выполняется равенство $\sqrt{100 - 10^x} = 2 - |x|$.

Вариант № 3

1. Решите уравнение $\frac{1}{121} (\sqrt{x+1} - 11) = \sqrt{x+1} \cdot 11^x - 11^{x+1}$.
2. Найдите все x , для которых совпадают значения функций $y = 4^x - 10 \cdot 2^x + 12$ и $y = (\sqrt{x^2 - 4})^2 - x^2$.

3. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 2^{2x+5} \cdot 5^{3x} \cdot 7^{4x-5}$ и $y = 1400^{5-x}$.
4. Сколько корней имеет уравнение $\frac{3^{5x+3} \cdot 4^{-3x-1}}{0,75 \cdot 3^{2x+2}} = \frac{\ln(x+1)}{\ln(x+1)}$?
5. Найдите сумму корней уравнения $(x+3)^{|x-2|} = 1$.
6. Найдите наименьший положительный корень уравнения $5^{2\sqrt{\sin x}} - 6 \cdot 5^{\sqrt{\sin x}} + 5 = 0$.
7. При каком x значение функции $y = 2^{-|x|}$ равно значению функции $y = \log_2(2+x^2)$?
8. Найдите наибольший корень уравнения $(8, 3^{x^2-6x+8})^{\sqrt{3-x}} = 1$.

Вариант № 4

1. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $y = 2^{\sqrt{2x-4}}$ и $y = 2 \cdot 2^{\sqrt{x+5}}$.
2. Найдите нули функции $y = 2^{|4x-6|} - 4^{|3x-4|}$.
3. Найдите все x , при которых значение функции $f(x) = 3 \cdot 4^x$ равно значению функции $g(x) = 5 \cdot 6^x - 2 \cdot 9^x$.
4. Найдите целые числа, которые являются корнями уравнения $|3^{x^2-x} - 6| = 3$.
5. Сколько корней имеет уравнение $|x-5|^{x^2-4x-5} = 1$?
6. Найдите корни уравнения $3^{x^2-4x+5} = 2 + \cos^2 2\pi x$.
7. Решите уравнение $\frac{1}{5^{-x}-2} = \frac{2}{5^{1-x}-19}$.
8. Найдите значения x , при которых выполняется равенство $\sqrt{2^x-8} = |x-3|$.

Вариант № 5

1. Решите уравнение $3 \cdot 81^x - 9^{x+1} + 10 = 19 \cdot 3^{2x} + 3^{\log_3(1-2x)} + 2x$.
2. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{6-2x^2} \cdot (4^x - 2^{x+3}) + 2^{x+4} = 2 \cdot 4^x + 14 - 7\sqrt{6-2x^2}$?
3. Найдите все x , при которых график функции $y = 6 \cdot 25^x - 17 \cdot 10^x + 5 \cdot 4^x + \sqrt{x} - \log_3 3^{\sqrt{x}}$ пересекает ось Ox .
4. При каких значениях x значение выражения $|x^2 + 2x + 1|^{2x+2}$ равно 1?
5. Решите уравнение $|\sin \pi x - 5| = 6 + (4^x - 8)^2$.

6. Найдите все x , при которых значения выражений 2^{x^2-4} и $(10^{x-2})^3 \cdot 5^{4-x^2}$ равны.
7. Найдите все корни уравнения $\sqrt{x}^{\log_{\sqrt{x}} 5^{x+3}} \cdot 5^{x^2-5x+1} = 5$.
8. Решите уравнение $4^x + x \cdot 2^{x+1} = 2^{x-1} + 14 \cdot 2^x + x - 7$.

Вариант № 6

1. Решите уравнение $2\sqrt{x} \cdot 7^x - 7^{x+1} = \frac{1}{7}(2\sqrt{x} - 7)$.
2. Найдите все x , при которых значение функции $y = 3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 30$ равно значению функции $y = x^2 + (\sqrt{3-x^2})^2$.
3. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 3^{16+x} \cdot 4^{4+x} \cdot 5^{3x}$ и $y = 540^{8-x}$.
4. Сколько корней имеет уравнение $\frac{2^{4x+2} \cdot 5^{-3x-1}}{6,25 \cdot 2^{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}?$
5. Найдите сумму корней уравнения $|x-1|^{x+2} = 1$.
6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $3^{2\sqrt{\lg x}} - 2 \cdot 3^{\sqrt{\lg x}} - 3 = 0$.
7. При каком x значение функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ равно значению функции $y = \sin^2 x + 1$?
8. Найдите наименьший корень уравнения $(7,8^{x^2-4x+3})^{\sqrt{x-2}} = 1$.

Вариант № 7

1. Найдите значения x , при которых выполняется равенство $2^{14-x} \cdot 3^{18-2x} \cdot 7^{31-4x} = 12348^{x+1}$.
2. Найдите все значения x , при которых значение функции $y = 9^x + 54 \log_{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} \left(\frac{3}{2} - x\right)$ равно значению функции $y = 12 \cdot 3^x$.
3. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $f(x) = 2x \cdot 3^x - 18x$ и $g(x) = 27 - 3^{x+1}$.
4. При каких x значение функции $y = 9^x - 2|3^x - 3|$ совпадает со значением функции $y = 2 \cdot 3^x + 3$?
5. Решите уравнение $27(\sqrt{10} - 3)^{x-4} = \left(\frac{3}{3 + \sqrt{10}}\right)^{x-4}$

6. Найдите корни уравнения $7^{2x^2-1} - 5 \cdot 7^{x^2-2x-3} = 2 \cdot 7^{4(x+1)}$.
7. Решите уравнение $|x + 5|^{x^2+3x-10} = 1$.
8. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = 3^x + 5^x$ и $g(x) = 2^{3x}$.

Вариант № 8

1. Решите уравнение $3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$.
2. Найдите все x , при которых значения функций $y = 2^{2x} - 2^{x+2} + 8$ и $y = \sqrt{2x - x^2 + 15}$ совпадают.
3. Решите уравнение $x^2 \cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1} + 2^x = 2^{\sqrt{2x+1}+1} + x^2 \cdot 2^{x-2}$.
4. Решите уравнение $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2x-4} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1-x}$.
5. Решите уравнение $36^x - 3 \cdot 4^x - 2 \cdot 9^x + 6 = 0$.
6. Сколько корней имеет уравнение $2^{3x} + 2^x - 2 = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos^2 x}$?
7. Решите уравнение $|1 - x|^{\sqrt{x^2-4x+3}} = 1$.
8. Решите уравнение $9^x = 10 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} - 9^{1+\sqrt{x}}$.

Вариант № 9

1. Найдите все значения x , при которых выполняется равенство $2^{13-x} \cdot 3^{11-2x} \cdot 5^{9-3x} = 360^{x+2}$.
2. Найдите все x , при которых значение функции $y = 4^x - 6 \cdot 2^x + 10$ равно значению функции $y = (\sqrt{2 - x^2})^2 + x^2$.
3. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $f(x) = 2^x \cdot x - 4x$ и $g(x) = 4 - 2^x$.
4. При каких x значение функции $y = 3 \cdot 7^{2x} + 7 \cdot |7^x - 5|$ совпадает со значением функции $y = 27 \cdot 7^x - 28$?
5. Найдите корень уравнения $4(\sqrt{5} - 2)^{x-12} = \left(\frac{2}{\sqrt{5} + 2}\right)^{x-12}$.
6. Найдите корни уравнения $5^{2x^2-1} - 3 \cdot 5^{(x+1)(x+2)} = 2 \cdot 5^{6(x+1)}$.
7. Решите уравнение $|x - 3|^{3x^2-10x+3} = 1$.
8. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = 2^x + 5^x$ и $g(x) = 7^x$.

§ 7. Логарифмические уравнения

Демонстрационный вариант

1. Найдите произведение корней уравнения $5^{\log_{25} 9} = \log_2(x^2 + 2x)$.

Решение. $5^{\log_{25} 9} = \log_2(x^2 + 2x)$, $\log_2(x^2 + 2x) = 3$. По определению логарифма $x^2 + 2x = 8$, $x^2 + 2x - 8 = 0$. Следовательно, $x_1 \cdot x_2 = -8$.

Ответ: -8 .

2. Найдите наименьший корень уравнения $\lg\left(x - \frac{1}{2}\right) = \lg\left(\frac{1}{2x}\right)$.

Решение. $\lg\left(x - \frac{1}{2}\right) = \lg\left(\frac{1}{2x}\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2x}, \\ \frac{1}{2x} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = -\frac{1}{2}, \end{cases} \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

3. Сколько корней имеет уравнение $\log_{\pi} x + \log_{\pi}(x + 5) - \log_{\pi}(7 - x) = 0$?

Решение. $\log_{\pi} x + \log_{\pi}(x + 5) - \log_{\pi}(7 - x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x + 5 > 0, \\ 7 - x > 0, \\ \log_{\pi} \frac{x(x+5)}{7-x} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 7, \\ \frac{x(x+5)}{7-x} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 7, \\ x^2 + 6x - 7 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 7, \\ \begin{cases} x = 1, \\ x = -7; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Исходное уравнение имеет один корень.

Ответ: 1.

4. Решите уравнение $\log_{1,5}(x - 1) + \log_{\frac{2}{3}}(2x - 3) = 1$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их сумму.

Решение. $\log_{1,5}(x - 1) + \log_{\frac{2}{3}}(2x - 3) = 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ 2x - 3 > 0, \\ \log_{1,5} \frac{x-1}{2x-3} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1,5, \\ \frac{x-1}{2x-3} = \frac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1,5, \\ 4x = 7; \end{cases} \Leftrightarrow x = 1,75.$$

Ответ: 1,75.

5. Найдите наибольший корень уравнения $2 \log_9^2 x = 2 - 3 \log_9 x$.

Решение.

$$2 \log_9^2 x + 3 \log_9 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9 x = -2, \\ \log_9 x = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{81}, \\ x = 3. \end{cases}$$

Выполненные преобразования равносильны, больший корень уравнения $x = 3$.

Ответ: 3.

6. Укажите сумму корней уравнения $\log_3 \log_2 (2^{x+3}) + \log_3 \lg (0,1^{2x-1}) = 1$.

Решение. $\log_3 \log_2 (2^{x+3}) + \log_3 \lg (10)^{1-2x} = 1$,

$\log_3 (x+3) + \log_3 (1-2x) = 1$. Следовательно,

$$\begin{cases} \log_3 ((x+3)(1-2x)) = 1, \\ x+3 > 0, \\ 1-2x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 - 5x + 3 = 3, \\ -3 < x < \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -2,5, \\ -3 < x < \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -2,5. \end{cases}$$

Сумма корней уравнения равна $-2,5$.

Ответ: $-2,5$.

7. Найдите произведение корней уравнения $\frac{5}{\log_2 x + 3} + \frac{4}{\log_2 x} = 3$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{8}$.

Обозначим $\log_2 x = t$. Уравнение примет вид:

$$\begin{cases} \frac{5}{t+3} + \frac{4}{t} = 3, \\ t \neq 0, \\ t \neq -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5t + 4t + 12 = 3t^2 + 9t, \\ t \neq 0, \\ t \neq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 4, \\ t \neq 0, \\ t \neq -3; \end{cases} \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} \log_2 x = 2, \\ \log_2 x = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ x = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Произведение корней исходного уравнения равно 1.

Ответ: 1.

8. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько:
 $x \cdot \ln(x - 5) = 0$.

Решение.

$$x \ln(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x - 5 > 0, \\ \ln(x - 5) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x > 5, \\ x - 5 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ: 6.

Вариант № 1

1. Решите уравнение $\log_3(x^2 + 3x) = 7^{\log_7 4}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

2. Решите уравнение $\log_2\left(\frac{4x-1}{3}\right) + \log_2 x = 0$.

В ответе запишите наименьший корень этого уравнения.

3. Сколько корней имеет уравнение $\log_7(x+1) - \log_7(7-x) + \log_7(x+2) = 0$?

4. Решите уравнение $\log_{\frac{5}{3}}(x+3) + \log_{0.6}(2x-1) = 1$. В ответе запишите корень уравнения или произведение его корней, если их несколько.

5. Найдите наибольший корень уравнения $3 \log_8^2 x + 5 \log_8 x = 2$.

6. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $\log_4 \log_3 3^{x+2} + \log_4 \log_2 4^{4-x} = 2$.

7. Решите уравнение $\frac{6}{1 + \log_2 x} - \frac{5}{3 + \log_2 x} = 1$. В ответе запишите корень уравнения или произведение его корней, если их несколько.

8. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько:
 $\sqrt{2x^2 + 5x + 2} \cdot \lg(x+1) = 0$.

Вариант № 2

1. Укажите наименьший корень уравнения $2 \log_4^2 x - \log_4 x^{13} = 7$.
2. Найдите корень уравнения $\log_5 \log_{\frac{1}{2}} \log_9 x = 0$.
3. Найдите сумму корней уравнения $\lg x + \lg(4x - 1) = \lg(5x - 2)$.
4. Сколько корней имеет уравнение $\log_8(3x - 5) = \frac{1}{3} - \log_8 x$?
5. Укажите наименьший корень уравнения $2 \log_5 \cos x = \log_{0.2} 4$, принадлежащий промежутку $[-90^\circ; 90^\circ]$.
6. Найдите сумму корней уравнения $\lg(x - 9) = 1 - \lg x$.
7. Найдите произведение корней уравнения $\sqrt{5x - x^2} \cdot \ln(x - 1) = 0$.
8. Найдите наименьший корень уравнения $\log_3 3^{3x+5} + 5^{\log_5(7x-5)} = x^2$.

Вариант № 3

1. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько:
 $\ln(5 - x) = \ln \frac{10}{2 - x}$.
2. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $\lg(x + 1,4) = \lg 6 - \lg 5x$.
3. Сколько корней имеет уравнение $\frac{7^{\log_7(x^2 - 4x + 4)} \cdot (x - 25)}{2 - \log_5 x} = 0$?
4. Найдите корень уравнения или среднее арифметическое его корней, если их несколько: $\log_3(3^x - 3\sqrt{3}) + \log_3(3^x + 3\sqrt{3}) = \log_3(6 \cdot 3^x)$.
5. Найдите произведение корней уравнения $5^{2(\log_2 x)^2} - 26 \cdot 5^{(\log_2 x)^2} + 25 = 0$.
6. Укажите наименьший корень уравнения $3 \log_4 x - x \log_4 x = x - 3$.
7. Решите уравнение $f(x) = f\left(\frac{x}{3} + 2\right)$, если $f(x) = \log_{\frac{1}{7}}(6x - 1)$.
8. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $(x^2 - 49) \log_5(6 - x) = 0$.

Вариант № 4

1. Найдите сумму корней уравнения $\log_2(x^2 + 3) - \log_2 x = 2$.
2. Решите уравнение $\log_{5x} \frac{5}{x} = -\frac{1}{3}$.
3. Найдите произведение корней уравнения $\log_2(x - 2)^2 + \log_2|x - 2| = 6$.
4. Решите уравнение $\log_2 x + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 \sqrt[3]{x} = 5,5$.
5. Найдите нецелый корень уравнения $2 \log_5(2x + 3) = 1 + \log_5(2x + 1,8)$.
6. Найдите сумму квадратов корней уравнения $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$.
7. Найдите наименьший корень уравнения $\frac{3 \log_2 x}{\log_2 x - 1} = \frac{\log_2 x - 2}{\log_2 x}$.
8. Найдите произведение корней уравнения $4 \log_x 3 - 3 \log_{3x} 3 = 1$.

Вариант № 5

1. Найдите сумму корней уравнения $\ln \frac{12}{x + 2} = \ln(x + 6)$.
2. Найдите произведение корней уравнения $\ln \left(\frac{3}{5} + x \right) = \ln \frac{2}{5} + \ln \frac{1}{x}$.
3. Сколько корней имеет уравнение $\frac{9^{\log_2((x+4)(x+11))} \cdot (x - 9) \cdot (x^2 - 16)}{2 - \log_3 x} = 0$?
4. Решите уравнение $\log_3(5^x - 5) = \log_3(24 \cdot 5^x) - \log_3(5^x + 5)$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их среднее арифметическое.
5. Найдите произведение целых корней уравнения $3^{2 \log_2^2 x} - 82 \cdot 3^{\log_2^2 x} + 81 = 0$.
6. Укажите больший корень уравнения $x \log_3 x - 2 \log_3 x = x - 2$.
7. Решите уравнение $f(x) = f\left(\frac{2x}{3} + 1\right)$, если $f(x) = \log_6(3x)$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их среднее арифметическое.
8. Найдите сумму корней уравнения $(x + 2) \log_4(x - 3) = 0$.

Вариант № 6

1. Найдите сумму корней уравнения $\ln \frac{8}{x+2} = \ln(x+4)$.
2. Найдите произведение корней уравнения $\lg\left(\frac{3}{4} + x\right) = \lg \frac{1}{4} - \lg x$.
3. Сколько корней имеет уравнение $\frac{5^{\log_5((x-6)(-x+8))} \cdot (x-7)}{1 - \log_7 x} = 0$?
4. Решите уравнение $\log_2(2^x - 4) + \log_2(2^x + 4) = \log_2(6 \cdot 2^x)$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их среднее арифметическое.
5. Найдите произведение корней уравнения $2^{2(\log_5 x)^2} - 15 \cdot 2^{(\log_5 x)^2} - 16 = 0$.
6. Укажите наименьший корень уравнения $x \log_2 x + \log_2 x = x + 1$.
7. Решите уравнение $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + 3\right)$, если $f(x) = \log_5 4x$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их среднее арифметическое.
8. Найдите сумму корней уравнения $(x-3) \log_3(x-7) = 0$.

Вариант № 7

1. Найдите корень уравнения $\log_{x^2} 81 + \log_{3x} 27 = 2$, принадлежащий отрезку $[2\pi; 10]$.
2. Найдите наименьший корень уравнения $\frac{2}{\log_4(x+1)} = \frac{\log_4(x+1)^4}{0,5}$.
3. Решите уравнение $\ln\left(\frac{\pi^x}{e^x} + 2x - 10\right) = x(\ln \pi - 1)$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их сумму.
4. Найдите сумму корней уравнения $5^{2(\log_5 x)^2} + 5^{(\log_5 x)^2} - 2 = 0$.
5. Найдите произведение корней уравнения $3 \lg(4x^2) - 2 \lg^2(-2x) = 4$.
6. При каком целом x значение функции $y = 0,5 \cdot (x+3)^{\lg(x+3)}$ равно 5?
7. Найдите значение $3x_0$, если x_0 — наименьший корень уравнения $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$, где $f(x) = \log_3(x^2 + 2)$.
8. Найдите сумму корней уравнения $(4x+3) \log_3(4x+5) = 0$.

Вариант № 8

1. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько: $\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x + 3)$.
2. Найдите наименьший корень уравнения $\frac{\log_4(x + 2)}{2} = \frac{2}{\log_4(x + 2)^4}$.
3. Сколько корней имеет уравнение $\frac{7^{\log_{49}(2x-1)}(7-x)}{\log_7 x - 1} = 0$?
4. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $x^2 \log_5 x + 4 = 4 \log_5 x + x^2$.
5. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $3^{2 \log_3^2 x} - 3^{\log_3^2 x} = 6$.
6. Решите уравнение $(2x + 1)^{\log_2(2x+1)} = 16$. В ответе запишите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько.
7. Решите уравнение $f(x) = f(x^2 - 2)$, если $f(x) = \log_5(2x - 3)$. В ответе запишите корень уравнения или произведение его корней, если их несколько.
8. Решите уравнение $(x^2 - x - 12) \log_{0.2}(2 - x) = 0$. В ответе запишите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько.

Вариант № 9

1. Выберите корень уравнения $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$, принадлежащий отрезку $[\pi; 7]$.
2. Найдите наибольший корень уравнения $\frac{\log_2(x + 3)}{6} = \frac{3}{\log_2(x + 3)^2}$.
3. Решите уравнение $\lg(2^x + x - 13) = x - x \lg 5$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их произведение.
4. Найдите произведение корней уравнения $7^{2(\log_3 x)^2} - 8 \cdot 7^{(\log_3 x)^2} + 7 = 0$.
5. Найдите сумму корней уравнения $2 \lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$.
6. При каком целом x значение функции $y = (x + 5)^{\log_7(x+5)}$ равно 7?
7. Решите уравнение $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + 5\right)$, если $f(x) = \log_2(8x - 2)$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их произведение.
8. Найдите сумму корней уравнения $(6x - 5) \cdot \log_2(2x - 2) = 0$.

§ 8. Различные приёмы при решении логарифмических уравнений

Демонстрационный вариант

1. Решите уравнение $(\log_3 x - 3)^2 = \frac{\log_{x-2} 16}{\log_{x-2} 2}$.

Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 2 > 0, \\ x - 2 \neq 1; \end{cases} \Rightarrow x \in (2; 3) \cup (3; +\infty);$$

$$(\log_3 x - 3)^2 = \frac{\log_{x-2} 2^4}{\log_{x-2} 2};$$

$$(\log_3 x - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x - 3 = 2, \\ \log_3 x - 3 = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 243, \\ x = 3. \end{cases}$$

$x = 3$ не входит в ОДЗ.

Ответ: 243.

2. Найдите наибольший корень уравнения

$$\log_2^2 x + 2 \log_2 x + x + 0,2^{\log_{\frac{1}{5}}(1-x)} = 4.$$

Решение.

$$\begin{cases} \log_2^2 x + 2 \log_2 x + x + 1 - x = 4, \\ x > 0, \\ 1 - x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x + 2 \log_2 x - 3 = 0, \\ 0 < x < 1; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \log_2 x = 1, \\ \log_2 x = -3, \end{cases} \\ 0 < x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2, \\ x = \frac{1}{8}, \end{cases} \\ 0 < x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

3. Найдите все значения x , при которых значения функций

$$y = \log_5 \left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ и } g = 4 + 3 \log_5 \frac{x}{x+1} \text{ совпадают.}$$

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$\log_5 \left(\frac{x+1}{x} \right) = 4 + 3 \log_5 \left(\frac{x}{x+1} \right).$$

$$\text{ОДЗ: } \frac{x+1}{x} > 0, x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$$

$$\log_5 \left(\frac{x+1}{x} \right) + 3 \log_5 \left(\frac{x+1}{x} \right) = 4, \quad \log_5 \left(\frac{x+1}{x} \right) = 1, \quad \frac{x+1}{x} = 5, \\ x = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

4. Найдите произведение корней уравнения $\log_4 x - 2 = 3 \log_x 4$.

Решение. ОДЗ: $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$\log_4 x - 2 = \frac{3}{\log_4 x}, \quad \log_4^2 x - 2 \log_4 x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_4 x = -1, \\ \log_4 x = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ x = 64. \end{cases}$$

Произведение корней равно 16.

Ответ: 16.

5. Найдите наименьший корень уравнения $\log_8 (x^2 - 3) + \log_x 1 = 0$.

Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 3 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > \sqrt{3}, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \Rightarrow x > \sqrt{3}.$$

$$\begin{cases} \log_8 (x^2 - 3) = 0, \\ x > \sqrt{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 1, \\ x > \sqrt{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4, \\ x > \sqrt{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \\ x > \sqrt{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: 2.

6. Решите уравнение $\log_{13} x \cdot \log_2 (x - 2) - \log_{13} x^3 = 0$.

Решение. ОДЗ: $x > 2$.

$$\log_{13} x \cdot \log_2 (x - 2) - 3 \log_{13} x = 0, \quad (\log_2 (x - 2) - 3) \log_{13} x = 0 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \log_{13} x = 0, \\ x > 2, \\ \log_2 (x - 2) - 3 = 0, \\ x > 2. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Из второй системы имеем:

$$\begin{cases} \log_2(x-2) = 3, \\ x > 2; \end{cases} \Leftrightarrow x = 10.$$

Ответ: 10.

7. Найдите корни уравнения $\log_{(x+3)^2}(2x^2 + 5x + 3) = 1$.

Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x^2 + 5x + 3 > 0, \\ x + 3 \neq 0, \\ x + 3 \neq 1, \\ x + 3 \neq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -1,5, \\ x > -1, \end{cases} \\ x \neq -3, \\ x \neq -2, \\ x \neq -4. \end{cases}$$

$$2x^2 + 5x + 3 = (x+3)^2, \quad 2x^2 + 5x + 3 = x^2 + 6x + 9, \quad x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 3. \end{cases}$$

$x = -2$ не входит в ОДЗ.

Ответ: 3.

8. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y(x) = \log_7(1 - 6 \cdot 7^x)$ и $g(x) = 2x + 1$.

Решение. ОДЗ: $1 - 6 \cdot 7^x > 0$, $7^x < \frac{1}{6}$, $x < -\log_7 6$.

Функция $y(x)$ — монотонно убывающая при $x < -\log_7 6$. Функция $g(x)$ — монотонно возрастающая. Следовательно, данные функции могут иметь не более одной общей точки. Поскольку $y(-1) = -1$ и $g(-1) = -1$, то $x = -1$ — абсцисса единственной точки пересечения этих функций.

Ответ: -1.

Вариант № 1

1. Решите уравнение $(2 - \log_2 x)^2 = \frac{8 \log_{4x} 4}{\log_{4x} 2}$.

2. Решите уравнение $\log_5^2 x - 3 \log_5 x + x + 0,4^{\log_2(3-x)} = 7$.

3. Найдите все значения x , при которых значения функций

$$y = \log_2 \left(2 + \frac{3}{x} \right) \text{ и } y = 1 - 2 \log_2 \frac{x}{3 + 2x} \text{ совпадают.}$$

4. Решите уравнение $\log_7 x \cdot \log_2(2x - 5) = \log_7 x^5$.

5. Решите уравнение $\log_2(x+1) - 2 = 4 \log_{x+1} 4$. Если уравнение имеет более одного решения, в ответе запишите произведение его корней.
6. Решите уравнение $\log_{(x+1)^2}(2x^2 + 4x - 2) = 1$. Если уравнение имеет более одного решения, в ответе запишите сумму его корней.
7. Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = \sqrt{15 - 4x}$ и $y = \log_2(x - 3)$?
8. Решите уравнение $\log_{\sin x}(\sin 2x + 3 \cos^2 x + \sin^2 x) = 0$.

Вариант № 2

1. Решите уравнение $(\log_4 2x + 2)^2 = \frac{\log_{x+\frac{1}{2}} 81}{\log_{x+\frac{1}{2}} 3}$.
2. Найдите наибольший корень уравнения $3 \log_{27}^2 x - 4 \log_{27} x + 2x + 0,5^{\log_{\frac{1}{2}}(26-2x)} = 25$.
3. Найдите все значения x , при которых функции $y = \log_3\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ и $y = 6 + \log_3 \frac{x}{x-1}$ принимают равные значения.
4. Найдите произведение корней уравнения $2 \log_7 x + 1 = \log_x 7$.
5. Найдите наименьший корень уравнения $\log_7(x^2 - 8) - \log_{x^2} 1 = 0$.
6. Решите уравнение $\log_{17} x \cdot \log_3(2x - 3) - \log_{17} x^4 = 0$.
7. Найдите корни уравнения $\log_{(x-2)^2}(2x^2 - 3x - 8) = 1$.
8. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = \log_4(4^x - 1)$ и $g(x) = 2x - 1$.

Вариант № 3

1. Решите уравнение $\log_3^2 x - \log_3 x - 3 = (\sqrt{3 - x^2})^2 + x^2$.
2. Найдите наибольший корень уравнения $\log_2^2 x - \log_2 x - 8 = \frac{-2\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}}$.
3. Найдите все значения x , при которых выполняется равенство $3 \log_4 \left(2 + \frac{30}{2x-11}\right) = 2 \log_4 \left(2 - \frac{15}{x+2}\right) + 8$.
4. Найдите корень уравнения $2^{\log_5 x} + 3 \cdot x^{\log_5 2} = 8$.
5. Найдите произведение корней уравнения $\log_2^2(x+3) + \sqrt{(x+3)(x+2)} = 0$.

6. Найдите наименьший корень уравнения $x^{\log_2 x - 4} = \frac{2 - \log_2 x}{16 - 8 \log_2 x}$.
7. Найдите сумму корней уравнения $(x^2 + 2x - 8) \log_5 (7 - x^2 - 5x) = 0$.
8. Найдите все значения x , которые обращают в нуль произведение функций $y = \log_3 (x^2 + 4x + 4)$ и $y = \operatorname{tg}(2\pi x)$.

Вариант № 4

1. Решите уравнение $\log_9 (x + 8) \log_{x+2} 3 = 1$.
2. Найдите наибольший корень уравнения $\log_{\frac{1}{5}}^2 25x + \log_5 \left(\frac{1}{125} x^2 \right) = 8$.
3. Найдите все значения x , при которых значения функций $y = 4 \log_{3x+1} (x - 3) - 4$ и $y = -\log_{x-3} (3x + 1)$ совпадают.
4. Найдите все значения x , при которых функции $y = 2^{\lg x} - 16$ и $y = -x^{\lg 2}$ принимают равные значения.
5. Найдите корень уравнения или произведение корней уравнения, если их несколько: $\log_2 x + 2 \log_{2x} \left(\frac{2}{x} \right) = 1$.
6. Решите уравнение $\log_{x-1} (x^2 - 6x + 5)^2 = 2$. Найдите $2x_1 - x_2$, если x_1, x_2 — корни этого уравнения и $x_1 < x_2$.
7. Найдите произведение корней уравнения $\log_x 3 - \log_9 x + \frac{1}{2} = 0$.
8. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \log_5 (25^x - 20 \cdot 5^x)$ и $y = x + 1$.

Вариант № 5

1. Решите уравнение $(8\sqrt{x})^{\log_4 x} = \frac{1 - 4x}{4 - 16x}$.
2. Найдите все значения x , при которых пересекаются графики функций $y = \log_2 (25^{x+3} - 1)$ и $y = \log_2 (5^{x+3} + 1) + 2$.
3. Найдите сумму корней уравнения $\log_{0,5x} \frac{1}{2x} + \log_x^{-2} 0,5 = 1$.
4. Найдите корни уравнения $\log_5 (-20 + 5^x) = 3 - x$.
5. Решите уравнение $1 + \log_{(x-2)} 2 \cdot \log_2 (2x - 1) = 2 \log_{(x-2)} 3$.
6. Найдите произведение корней уравнения $2^{\log_7 x^2} + (x^2)^{\log_7 2} = 4$.
7. Найдите наименьший корень уравнения $\frac{1}{\log_3 x - 6} + \frac{5}{\log_3 x + 2} = 1$.

8. Решите уравнение $2 \log_9^2 x - 5 \log_9 x = \frac{3\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}}$.

Вариант № 6

1. Решите уравнение $\log_2^2 x - 10 \log_2 x + 16 = (\sqrt{16 - x^2})^2 + x^2$.

2. Найдите наибольший корень уравнения $\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 4 = \frac{\sqrt{x-8}}{\sqrt{x-8}}$.

3. Найдите все значения x , при которых выполняется равенство

$$4 \log_6 \left(3 - \frac{3}{2x+3} \right) - 4 = 5 \log_6 \left(2 + \frac{1}{x+1} \right).$$

4. Найдите сумму корней уравнения $x^{\lg 25} + 25^{\lg x} = 10$.

5. Найдите произведение корней уравнения

$$\log_3^2(x-7) + \sqrt{(x-7)(x-8)} = 0.$$

6. Найдите наименьший корень уравнения $x^{\log_7 x - 3} = \frac{1 - \log_7 x}{49 - 49 \log_7 x}$.

7. Найдите сумму корней уравнения $(x^2 - x - 2) \log_7(1 - x^2 - 3x) = 0$.

8. Найдите все значения x , которые обращают в нуль произведение функций $y = \log_4(x^2 - 2x + 1)$ и $y = \operatorname{ctg} \pi x$.

Вариант № 7

1. Решите уравнение $\log_2^2 x - \log_2 x^8 + x^2 - 8x = (\sqrt{4-x})^4 - 23$.

2. Найдите сумму корней уравнения

$$\ln \left(\frac{3x}{(3-x)(x+1)} - \frac{1}{x^2 - 2x - 3} \right) = 2 \ln \frac{(3-x)(x+1)}{3x+1}.$$

3. Решите уравнение $16^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x^4} - 32 = 0$.

4. Найдите наименьший корень уравнения $\lg^2 x^4 + 20 \lg x^2 = 24$.

5. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $2^{\log_7 x^3} - x^{\log_7 8} = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$.

6. Найдите все значения x , при которых значение функции

$$y = \log_{3-x}(11x^2 - 25x + 15 - x^3) \text{ равно } 3.$$

7. Решите уравнение $\log_{2x+1}(8x^3 - 35x^2 + 52x - 35) \cdot \log_{2x-3}(2x+1) = 3$.

8. Найдите значение функции $f(x) = \arcsin \frac{x}{4}$ при x , которое обращает

функцию $y = \frac{\sqrt{\log_x(64x^{13})}}{\log_x(64x)}$ в единицу.

Вариант № 8

1. Решите уравнение $\log_3^2 x - 2 \log_3 x + 3 = 2 - |x - 3|$.
2. Решите уравнение $2 \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-3} \right) + \log_{\frac{1}{2}} \left(7 - x - \frac{32}{x+5} \right) + 1 = 0$. В ответе запишите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько.
3. Решите уравнение $x^{\lg 25} - 4 \cdot 5^{\lg x} = 5$.
4. Решите уравнение $\log_{x-1}(x+5) = 2$.
5. Решите уравнение $\log_{x^3+2x^2} \left(\frac{(x-4)^2}{x+2} \right) = 1$.
6. Решите уравнение $x^{\log_{x-2} 3} = \frac{1 + \log_3 x}{3 + 3 \log_3 x}$.
7. Решите уравнение $\log_{x+2}(x^3 + 2x^2 - 1) \cdot \log_{x+1}(x+2) = 2$.
8. Решите уравнение $(x^2 - 3x) \log_2(x^3 - 7x^2 + 15x - 9) = 0$. В ответе запишите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько.

Вариант № 9

1. Решите уравнение $\log_3^2 x + \log_3 x - 2 = (\sqrt{4 - x^2})^2 + x^2$.
2. Найдите сумму корней уравнения $\log_2 \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) + 4 = 3 \log_2 \left(x - 4 + \frac{18}{x+5} \right)$.
3. Найдите все корни уравнения $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$.
4. Найдите наибольший корень уравнения $\lg^2 x^3 + \lg x^2 = 40$.
5. Найдите корень уравнения или произведение всех его корней, если их несколько: $5^{\log_6 x} + x^{\log_6 5} = x^2 - 6x - 16 + 2x^{\log_6 5}$.
6. Найдите все x , при которых значение функции $y = \log_{2-x}(2x^2 - 5x + 2)$ равно 2.
7. Решите уравнение $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1}(x+1) = 3$.
8. Найдите значение функции $y = 6x$ при x , которое обращает в нуль функцию $y = \sqrt{\log_x(8x^4) + \log_x(8x^2)}$.

§ 9. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

Демонстрационный вариант

1. Найдите наибольший корень уравнения $f(x) = g(x)$, если $f(x) = |2x - 1|$, $g(x) = \sqrt{(x + 5)^2}$.

Решение. $|2x - 1| = |x + 5| \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x - 1 = x + 5, \\ 2x - 1 = -x - 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ x = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Наибольший корень уравнения $x = 6$.

Ответ: 6.

2. Найдите значения x , при которых произведение функций $y = 2^{|x|}$ и $y = 2^{|x-1|}$ равно 32.

Решение. $2^{|x|} \cdot 2^{|x-1|} = 2^5$, $|x| + |x - 1| = 5$.

Нули выражений, стоящих под знаком модуля:

$$\begin{cases} x = 0, \\ x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x < 0, \\ -x + 1 - x = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x = -2; \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

$$2) \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x + 1 - x = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \cdot x = 4; \end{cases} \text{ решений нет.}$$

$$3) \begin{cases} x > 1, \\ x + x - 1 = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x = 3; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: -2; 3.

3. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $y = \lg(4 - 3|x|)$ и $y = \lg x^2$.

Решение. $\lg(4 - 3|x|) = \lg x^2$.

$$\begin{cases} 4 - 3|x| = x^2, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3|x| - 4 = 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1, \\ |x| = -4. \end{cases}$$

Уравнение $|x| = -4$ не имеет решений. Решая уравнение $|x| = 1$, получим $x = \pm 1$.

Ответ: ± 1 .

4. Найдите значения x , при которых $y = 6$, если $y = |x + 8| - |x|$.

Решение. $|x + 8| - |x| = 6$. Нули выражений, стоящих под знаком модуля:

$$\begin{cases} x = 0, \\ x + 8 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -8. \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x < -8, \\ -x - 8 + x = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -8, \\ 0 \cdot x = 14; \end{cases} \text{ решений нет.}$$

$$2) \begin{cases} -8 \leq x \leq 0, \\ x + 8 + x = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq x \leq 0, \\ x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

$$3) \begin{cases} x > 0, \\ x + 8 - x = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 \cdot x = -2; \end{cases} \text{ решений нет.}$$

Ответ: -1 .

5. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\cos 2x - 1 = \frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

$$\textbf{Решение.} -2 \sin^2 x = \frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

Имеем: $|\cos x| > 0$, $-2 \sin^2 x \leq 0$, следовательно, $\cos x < 0$.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -2 \sin^2 x = \frac{\cos x}{-\cos x}, \\ \cos x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{2}, \\ \cos x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\sin x| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

Наименьший положительный корень уравнения $x = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.

6. Найдите нули функции $f(x) = |x + 2|x - 1|| - 4x + 1$.

$$\textbf{Решение.} |x + 2|x - 1|| = 4x - 1.$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x + 2|x - 1| = 4x - 1, \\ x + 2|x - 1| = 1 - 4x, \\ 4x - 1 \geq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2|x - 1| = 3x - 1, \\ 2|x - 1| = 1 - 5x, \end{cases} \\ x \geq \frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{cases} \begin{cases} 2 - 2x = 3x - 1, \\ 2 - 2x = 1 - 5x, \end{cases} \\ \frac{1}{4} \leq x < 1, \\ \begin{cases} 2x - 2 = 3x - 1, \\ 2x - 2 = 1 - 5x, \end{cases} \\ x \geq 1; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \begin{cases} x = 0,6, \\ x = -\frac{1}{3}, \end{cases} \\ \frac{1}{4} \leq x < 1, \\ \begin{cases} x = -1, \\ x = \frac{3}{7}, \end{cases} \\ x \geq 1; \end{cases} \right] \Leftrightarrow x = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

7. Найдите абсциссы точек, в которых график функции $y = |x^2 - 4x| - 5$ пересекает ось Ox .

Решение. Задача сводится к решению уравнения $|x^2 - 4x| - 5 = 0$.

$$|x^2 - 4x| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 5, \\ x^2 - 4x = -5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0, \\ x^2 - 4x + 5 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 5. \end{cases}$$

Ответ: -1; 5.

8. Решите уравнение $\sqrt{(1 - 3\log_2 x)^2} = 1 - 3|\log_2 x|$.

Решение. Обозначим $\log_2 x = t$. Уравнение примет вид:

$$\sqrt{(1 - 3t)^2} = 1 - 3|t|, \quad |1 - 3t| = 1 - 3|t|.$$

Нули выражений, стоящих под знаком модуля:

$$\begin{cases} 1 - 3t = 0, \\ t = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3}, \\ t = 0. \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} t < 0, \\ 1 - 3t = 1 + 3t; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0, \\ t = 0; \end{cases} \Rightarrow \text{решений нет.}$$

$$2. \begin{cases} 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ 1 - 3t = 1 - 3t; \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \frac{1}{3}.$$

$$3. \begin{cases} t > \frac{1}{3}, \\ 3t - 1 = 1 - 3t; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > \frac{1}{3}, \\ t = \frac{1}{3}; \end{cases} \Rightarrow \text{решений нет.}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} 0 \leq \log_2 x \leq \frac{1}{3}, \\ \log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 2^{\frac{1}{3}}; \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \sqrt[3]{2}.$$

Ответ: $[1; \sqrt[3]{2}]$.

Вариант № 1

1. Решите уравнение $x^2 + 3|x + 1| - 1 = 0$.
2. Найдите значения x , при которых произведение функций $y = 3^{|x+4|}$ и $y = 3^{|x+2|}$ равно 9.
3. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \log_2(5 - |x|)$ и $y = \log_2(x^2 - 1)$.
4. Решите уравнение $\frac{|x| - 2x + 1}{|3 - x|} = 1$.
5. Найдите нули функции $y = |3x - |x - 2|| - 2x - 3$.
6. Пересекаются ли графики функций $y = \sqrt{9 + 4 \cdot 2^x - 4^x}$ и $y = |2^x - 4| + 3$? Если да, то укажите абсциссы точек пересечения.
7. Решите уравнение $|2|x + 1| - 3|x - 2|| = x - 5$.
8. Решите уравнение $\sqrt{|1 - 3 \log_2 x|} = |1 + \log_2 x|$.

Вариант № 2

1. Найдите наименьший корень уравнения $f(x) = g(x)$, если $f(x) = |3x - 5|$, $g(x) = \sqrt{(5 - 2x)^2}$.
2. Найдите значения x , при которых произведение функций $y = 3^{|x-1|}$ и $y = 3^{|x-3|}$ равно 9.
3. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $y = \ln(5|x| + 6)$ и $y = \ln x^2$.
4. Найдите значения x , при которых $y = 3$, если $y = |x - 3| + |x + 2| - |x - 4|$.
5. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin 4x + 1 = \frac{2 \sin x}{|\sin x|}$.
6. Найдите нули функции $f(x) = ||3 - x| - x + 1| - x - 6$.
7. Найдите абсциссы точек, в которых график функции $y = |x^2 - x + 3| - x - 2$ пересекает ось Ox .
8. Решите уравнение $\sqrt{|1 - 2 \log_3 x|} = 1 - 2|\log_3 x|$.

Вариант № 3

1. Найдите наименьший корень уравнения $2^{|x+3|} = 8^{3x-5}$.
2. Найдите произведение корней уравнения $\frac{|x^2 - 9|}{x - 3} \cdot x - 4x - 12 = 0$.
3. Найдите все значения x , удовлетворяющие равенству $\cos x = |\cos x| \cdot (x + 3)^2$.
4. При каких значениях x значение функции $y = |2^x - 4|$ равно значению функции $y = (3x - 14)(2^x - 4)$?
5. Найдите сумму корней уравнения $|\log_2 x - 3| = (5 - 10x)(\log_2 x - 3)$.
6. Решите уравнение $\frac{|x + 2| - x}{|1 - x|} = 3$.
7. При каких значениях x значения функций $y = |3x - 9|$ и $y = \frac{4}{|x - 3|} - (x - 3)^2$ совпадают?
8. Пересекаются ли графики функций $y = \sqrt{(5^x - 8)^2} + \sqrt{(7 - 5^x)(5^x + 4)}$ и $y = 8 - 5^x$? Если да, укажите абсциссы точек их пересечения.

Вариант № 4

1. Найдите произведение корней уравнения $|3x - 4| = \sqrt[4]{(x + 2)^4}$.
2. Найдите сумму значений x , при которых произведение функций $y = 3^{|x-2|}$ и $y = 3^{|x-3|}$ равно 9.
3. Найдите произведение абсцисс общих точек графиков функций $y = \log_2(x^2 + 2)$ и $y = \log_2 3|x|$.
4. Найдите нули функции $y = ||x - 2| + 4| - 5$.
5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin x = \sqrt{3}|\cos x|$.
6. Решите уравнение $\sqrt{x - 2\sqrt{x + 3}} + 4 = x$.
7. Найдите сумму корней уравнения $|x^2 - 8x| - 9 = 0$.
8. Найдите отношение $\frac{x_1}{x_2}$, где $x_1 < x_2$ и x_1, x_2 — корни уравнения $\log_{|4x+1|} 7 + \log_{|9x|} 7 = 0$.

Вариант № 5

1. Найдите сумму корней уравнения $5^{|3x-7|} = 0,2^{-2|x+1|}$.
2. Найдите наименьший корень уравнения $\frac{2}{|x-1|} + \frac{4}{x+3} = 3$.
3. Найдите все x , для которых выполняется равенство $|2^x - 8| + 2^x = 4^x - 8$.
4. Найдите наименьший корень уравнения $|\log_3(x+5)| = ((x+5)(x+2)+1) \log_3(x+5)$.
5. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 2x - 2$.
6. Укажите число корней уравнения $|\operatorname{tg} x| \cdot \sqrt{25 - x^2} = 4 \operatorname{tg} x$.
7. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \left| \frac{3x+8}{x} \right|$ и $y = 5 + \frac{2}{|x|}$.
8. Найдите корни уравнения $\log_2 x = 4 + (2x+1) \cdot |\log_2 x - 4|$.

Вариант № 6

1. Найдите наименьший корень уравнения $3^{|5-x|} = 9^{2x-5}$.
2. Найдите произведение корней уравнения $\frac{|x^2-1|}{x+1} \cdot x + 5x - 5 = 0$.
3. Найдите все значения x , удовлетворяющие равенству $\sin x = |\sin x| \cdot (x+2,5)^2$.
4. При каких x значение функции $y = |e^x - 1|$ равно значению функции $y = (4x-7)(e^x - 1)$?
5. Найдите сумму корней уравнения $|\log_3 x - 1| = (2-4x)(\log_3 x - 1)$.
6. Решите уравнение $\frac{|x+1| - x}{|2-x|} = 2$.
7. При каких значениях x значения функций $y = |2x-4|$ и $y = \frac{3}{|x-2|} - (x-2)^2$ совпадают?
8. Пересекаются ли графики функций $y = \sqrt{(2^x-7)^2} + \sqrt{(5-2^x)(2^x+1)}$ и $y = 7 - 2^x$? Если да, укажите абсциссы точек их пересечения.

Вариант № 7

1. При каком значении x выражение $|2x - 3y - 8| + |4x - 3y - 7|$ будет равно нулю?

2. Решите уравнение $\frac{|\cos x|}{\cos^2 x} + \frac{1}{1 - \sin^2 x} = 2 \operatorname{tg}^2 x$.

3. Найдите все значения x , при которых график функции $y = |\cos x|$ пересекается с графиком функции $y = \sin x$.

4. Решите уравнение $2x - 3 + |3x - 1| = |5x - 4|$.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{10 - \sin^2 x - 6 \cos x} = \frac{1}{2} + 2\sqrt{\cos x(\cos x - 2) + 1}.$$

6. Решите уравнение $\frac{2|x + 5| - |x - 1|}{|2 - x|} = 2$.

7. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $y = |3^{x+2} - 1|$ и $y = |3 - 3^{x+1}|$.

8. Решите уравнение $|\sin^2 x - 5| + \operatorname{ctg}^2 x = 5\frac{1}{2}$.

Вариант № 8

1. Решите уравнение $2|x + 2| + 3 = (x + 2)^2$.

2. Решите уравнение $\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x + 1} = 2$.

3. Решите уравнение $|x^2 - 9| + |x - 2| = 5$.

4. Решите уравнение $x + 1 + |2x + 1| = |3x + 2|$.

5. Решите уравнение $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = x$.

6. Решите уравнение $\frac{|x^3| - |5x|}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0$.

7. Найдите абсциссы общих точек пересечения графиков функций $y = |\log_5 x - 1|$ и $y = (2 - 5x) \log_5 \frac{x}{5}$.

8. Решите уравнение $|3^{x+2} - 20| = 10 - 3^x$.

Вариант № 9

1. При каких значениях x сумма функций $f = |3x + y - 6|$ и $g = |x - 3y + 7|$ обращается в нуль?
2. Найдите все решения уравнения $|\sin^2 x - 2| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$.
3. Найдите все x , при которых график функции $y = \left| \cos x - \frac{1}{2} \right|$ пересекается с графиком функции $y = \sin x - \frac{1}{2}$.
4. Найдите все x , при которых значение функции $y = 9^{|x-2| \sin x}$ равно значению функции $y = 3^{x|\sin x|}$.
5. Решите уравнение
$$2\left(\sqrt{\cos^2 2x + 1 + 2(2 \sin^2 x - 1)} - \sqrt{(7 - 6 \cos 2x)^2}\right) = \sqrt{50} - 12.$$
6. Найдите корни уравнения
$$\sqrt{(7 - 3 \ln x)^2} + \sqrt{(\ln x + 1)(\ln x - 2)} = 3 \ln x - 7.$$
7. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = |2^{x+1} - 7|$ и $y = 5 - 2^x$.
8. Найдите корни уравнения $|\log_4 x - 1| = (2x + 5)(\log_4 x - 1)$.

§ 10. Различные приёмы при решении комбинированных уравнений

Демонстрационный вариант

1. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $25^{\log_5 \cos x} = 1$.

Решение.

$$5^{2 \log_5 \cos x} = 1, \begin{cases} \cos^2 x = 1, \\ \cos x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\cos x| = 1, \\ \cos x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1.$$

Наименьший положительный корень $x = 2\pi$, наибольший отрицательный $x = -2\pi$. Сумма корней: $2\pi - 2\pi = 0$.

Ответ: 0.

2. Найдите наибольший корень уравнения $|x - 3|^{x^2 - 3x} = 1$.

Решение.

$$\begin{cases} x - 3 = -1, \\ x - 3 = 1, \\ \begin{cases} x - 3 \neq 0, \\ x^2 - 3x = 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 4, \\ \begin{cases} x \neq 3, \\ \begin{cases} x = 0, \\ x = 3; \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 4, \\ x = 0. \end{cases}$$

Наибольший корень исходного уравнения $x = 4$.

Ответ: 4.

3. Найдите сумму корней уравнения $3 \cdot |3^x + 2| + |4 - 5 \cdot 3^x| = 10$.

Решение. Учитывая, что $3^x + 2 > 0$, имеем $3 \cdot 3^x + 6 + |4 - 5 \cdot 3^x| = 10$;

$$|4 - 5 \cdot 3^x| = 4 - 3 \cdot 3^x \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4 - 5 \cdot 3^x = 4 - 3 \cdot 3^x, \\ 4 - 3 \cdot 3^x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4 - 5 \cdot 3^x = 3 \cdot 3^x - 4, \\ 4 - 3 \cdot 3^x \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Первая система решений не имеет. Решим вторую систему.

$$\begin{cases} 5 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x = 8, \\ 0 < 3^x \leq \frac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1, \\ 0 < 3^x \leq \frac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: 0.

4. Найдите значения x , при которых выполняется равенство $f(x) = g(x)$, если $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, $g(x) = |x| + 1$.

Решение. $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = |x| + 1$, $E_f = [-1; 1]$, $E_g = [1; +\infty]$,

следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ |x| + 1 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: 0.

5. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $\sqrt{\sin^2 x} - \sin x = 2 \cos x$.

Решение. $|\sin x| - \sin x = 2 \cos x$;

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ 2 \cos x = 0, \\ \sin x < 0, \\ \sin x = -\cos x; \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \\ \begin{cases} \sin x < 0, \\ \operatorname{tg} x = -1; \end{cases} \end{cases} & \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z. \end{cases} \end{cases}$$

Наименьший положительный корень $x = \frac{\pi}{2}$, наибольший отрицательный $x = -\frac{\pi}{4}$. Сумма наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

6. Решите уравнение $\log_x (\log_4 (5 \cdot 2^x - 4)) = 1$.

Решение. Заметим, что $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. При указанных значениях x выполняется $5 \cdot 2^x - 4 > 1$, значит, $\log_4 (5 \cdot 2^x - 4) > 0$.

$\log_4 (5 \cdot 2^x - 4) = x$, тогда $5 \cdot 2^x - 4 = 4^x$, $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2^x = 1, \\ 2^x = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

$x = 0$ не удовлетворяет условию $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: 2.

7. Найдите нули функции $f(x) = \frac{|4x - 3| - x^2}{\sqrt{2 - x^3}}$.

Решение.

$$\frac{|4x-3|-x^2}{\sqrt{2-x^3}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |4x-3|-x^2 = 0, \\ 2-x^3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 = x^2, \\ x^3 < 2, \\ 4x-3 = -x^2, \\ x^3 < 2; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x < \sqrt[3]{2}, \\ x^2 + 4x - 3 = 0, \\ x < \sqrt[3]{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = 3, \end{cases} \\ x < \sqrt[3]{2}, \\ x = -2 \pm \sqrt{7}, \\ x < \sqrt[3]{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -2 \pm \sqrt{7}. \end{cases}$$

Ответ: $-2 \pm \sqrt{7}; 1$.8. Сколько корней имеет уравнение $\sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sqrt{17-x^2} = \sin \frac{\pi x}{3}$?**Решение.** $\sin \frac{\pi x}{3} (\sqrt{17-x^2} - 1) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{3} = 0, \\ 17-x^2 \geq 0, \\ 17-x^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3n, n \in Z, \\ |x| \leq \sqrt{17}, \\ x = \pm 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3, \\ x = 0, \\ x = \pm 4. \end{cases}$$

Исходное уравнение имеет 5 корней.

Ответ: 5.**Вариант № 1**

1. Решите уравнение $|1-x|^{\sqrt{x^2-4x+3}} = 1$.
2. Решите уравнение $2^{2x} - |2^{x+1} - 2| = 14 - 2^x$.
3. Решите уравнение $\cos(\pi\sqrt{x}) \cdot \cos(\pi\sqrt{x-4}) = 1$.
4. Решите уравнение $3\sqrt{x^2+2x+1} = 7+x+(\sqrt{-x^2-5x-4})^2$.
5. Решите уравнение $4\log_3^2(5x-6)^3 + 18\log_3^2 \frac{1}{x} = 3\log_3(5x-6)^3 \cdot \log_3 x^6$.
6. Решите уравнение $\log_5(3 \cdot 2^{1+x} - 2^{-x} \cdot 5^{2x+1}) = x + \log_5 13$.
7. Решите уравнение $\sqrt{12\sin x + 13} = 3\sin x + 2$.
8. Найдите нули функции $y = \frac{|x^2+4x-5|-x^2}{\sqrt{x^2-9}}$.

Вариант № 2

1. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $36^{\log_6 \sin x} = 1$.
2. Найдите сумму корней уравнения $|x + 4|^{x^2 + 4x} = 1$.
3. Найдите корень уравнения $2 + |5^{2x} - 5^x + 3| = |5^x + 4|$.
4. Найдите значения x , при которых выполняется равенство $f(x) = g(x)$, если $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 1$, $g(x) = x^2 + 2$.
5. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $\cos x + \sqrt{\cos^2 x} = 2 \sin x$.
6. Решите уравнение $\log_x (\log_9 (12 \cdot 3^x - 27)) = 1$.
7. Найдите нули функции $g(x) = \frac{x^2 - |5 - 6x|}{\sqrt{3 - x^2}}$.
8. Сколько корней имеет уравнение $\cos \pi x \cdot \sqrt{10 - x^2} = \cos \pi x$?

Вариант № 3

1. Найдите наименьший корень уравнения $x^2 + 3x - 3 = 5^{\log_5 (x+2)}$.
2. Найдите произведение корней уравнения $\left(23\sqrt{(2x-5)(x-4)}\right)^{x-1} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}$.
3. Решите уравнение $\sqrt{3x + 4y - 26} + \sqrt{4x - y - 3} = 0$.
4. Найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = 3^{-|x|}$ и $y = \frac{1}{2} \sin x + 1$.
5. При каких x значение функции $y = \log_3 (|x| + 9)$ равно значению функции $y = 2 \cos x$?
6. При каких значениях x разность функций $y = 12 \cdot 3^{\sqrt{\sin 3x}}$ и $y = 3^{2\sqrt{\sin 3x}}$ равна 27?
7. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $y = \sqrt{x^2 - 9} - \sqrt[6]{9 - x^2}$ и $y = \cos \frac{\pi}{2} x$.
8. Найдите все корни уравнения $2 - \sqrt{x} = 5^x + 5^{-x}$.

Вариант № 4

1. Найдите наименьший положительный корень уравнения $9^{\log_3(\sin x)} = 1$.
2. Найдите наибольший корень уравнения $(2x - 4)^{x^2 - 9} = (2x - 4)^{8x}$.
3. Найдите корни уравнения $|5^x - 8| + |2 \cdot 5^x + 3| = 13$.
4. Найдите значения x , при которых выполняется равенство $f(x) = g(x)$, если $f(x) = \sin x + 1$ и $g(x) = \left|x - \frac{\pi}{2}\right| + 2$.
5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sqrt{\cos^2 x} - \cos x = \sin 2x$.
6. Сколько корней имеет уравнение $\log_x(\log_9(4 \cdot 3^x - 3)) = 1$?
7. Найдите нули функции $f(x) = \frac{x^2 - |6 - 5x|}{\sqrt{5 - x^2}}$.
8. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{10 - x^2} \cdot (\cos \pi x - 1) = \cos \pi x - 1$?

Вариант № 5

1. Решите уравнение $\sqrt{\sin x - 1} = \log_2 \left(\frac{2x}{\pi} + 2|\cos x| \right)$.
2. Найдите все корни уравнения $\log_{\sin x} \cos^2 x + \log_{\cos x} \sin^2 x = 4$.
3. Найдите абсциссы общих точек графиков $y = 2 + \sin^9 x$ и $y = 3 + (2x - \pi)^2$.
4. Найдите сумму корней уравнения $\sin x (\log_7(4x - x^2 + 12) - 1) = 0$.
5. При каких значениях x сумма функций $y = \sqrt{\frac{2x}{x+5}} + \sqrt{\frac{x+5}{2x}}$ и $y = 3^{(x-5)^2}$ равна 3?
6. Сколько корней имеет уравнение $|2^x + \sin x + 2| + x^2 + 5 = 2x$?
7. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3 - x} = \log_8(x - 2)$.
8. Найдите все значения x , при которых верно равенство $\log_5 25^{\sqrt{1-8x}} = 2\sqrt{7x^2 + 5x - 1}$.

Вариант № 6

1. Найдите наибольший корень уравнения $2^{\log_2(3-x)} = x^2 - 5x - 9$.
2. Найдите произведение корней уравнения
$$\left(17\sqrt{(x-5)(8-x)}\right)^{x-2} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}.$$
3. Решите уравнение $|y + 3x - 13| + |x + 4y - 19| = 0$.
4. Найдите наибольший корень уравнения $x^2 + 2 = \cos x + 1$.
5. При каких x значение функции $y = (x-1)^2 + 2$ равно значению функции $y = 2 \cos(x-1)$?
6. При каких значениях x сумма функций $y = 2^{2\sqrt{\cos 2x}}$ и $y = 3 \cdot 2^{\sqrt{\cos 2x}}$ равна 4?
7. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $y = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt[4]{4 - x^2}$ и $y = \sin \pi x$.
8. Найдите все корни уравнения $2^x + 2^{-x} = 2 \cos x$.

Вариант № 7

1. Решите уравнение $2x^2 - 8x + 5 = 2^{\log_8(2-x)^3}$.
2. При каких значениях x функция $y = x^{3+\log_2 2x}$ принимает значение 32?
3. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции $y = \log_{\cos x}(3 \cos x - 2 \sin x) - 1$ с осью Ox .
4. Решите уравнение $\log_4 2^{x+2} + \log_4 \left(\frac{4^x + 1}{4^x}\right) = \log_2 \sqrt{10}$.
5. Найдите сумму целых корней уравнения $(2x^3 - 21x^2 + 58x - 24) \cdot \log_2(x-4) \cdot \log_{8-x} x = 0$.
6. Решите уравнение $x^2 + 64\pi^2 + 1 = \cos x + 16\pi x$.
7. Найдите все значения x , при которых графики функций $y = 2^x + 2^{3x} + |\sin(x^2 - 3x)|$ и $y = 2^{2x+1}$ имеют общие точки.
8. При каких значениях x верно равенство
$$\left(\sqrt[5]{9 + 4\sqrt{5}}\right)^x - \left(\sqrt[5]{9 - 4\sqrt{5}}\right)^x = 4?$$

Вариант № 8

1. Решите уравнение $\sqrt{\cos x} = 1 - 2 \cos x$.
2. Решите уравнение $(2 + \sqrt{3})^{|x^2 - 2x| + 1} + (2 - \sqrt{3})^{|x^2 - 2x| - 1} = \frac{4}{2 - \sqrt{3}}$.
3. Решите уравнение $\log_5 |x^2 - 1| = \log_{\sqrt{5}} |x|$.
4. Решите уравнение $\log_3 2^{x+1} + \log_3 (1 + 2^{1-2x}) = 2$.
5. Решите уравнение $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 32$.
6. Решите уравнение $5 + x^2 \log_3 (2x - x^2) = 4x + (5 - 4x) \log_3 (2x - x^2) + x^2$.
7. Решите уравнение $\log_{x-1} (4 - \sqrt{9 - 6x + x^2}) = 0,5$.
8. Решите уравнение $5\sqrt{1 + |x^2 - 1|} = 3 + |5x + 3|$.

Вариант № 9

1. Решите уравнение $16^{\log_{16}(1-x)} = x^2 + 3x - 20$.
2. При каких значениях x функция $y = x^{2+\log_2 x}$ принимает значение, равное 8?
3. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции $y = \log_{\sin x} (\sqrt{3} \sin x - \cos x)$ с осью Ox .
4. Найдите все корни уравнения $9^{\cos 2x} + 9^{\cos^2 x} = 4$ на промежутке $\left[-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$.
5. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 2007 \sqrt[6]{x^2 - 9} + 2008 \sqrt[4]{9 - x^2}$ и $y = \cos \frac{\pi x}{2}$.
6. Найдите корень уравнения $x^2 - 5\pi x + \frac{25\pi^2}{4} = \sin x - 1$.
7. Найдите все x , при которых график функции $y = 4^x + 4^{-x}$ пересекает график функции $y = 2 \cos \frac{18x + 7x^2}{9}$.
8. При каких значениях x верно равенство $\left(\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = 2$?

§ 11. Неравенства

Демонстрационный вариант

1. Найдите произведение целочисленных решений неравенства $\frac{x-4}{x-2} \leq 0$.

Решение. $\frac{x-4}{x-2} \leq 0$.

$2 < x \leq 4$. Произведение целочисленных решений: $3 \cdot 4 = 12$.

Ответ: 12.

2. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{3}{2x^2 + x - 6} \leq 0$.

Решение. $2x^2 + x - 6 < 0$; $(x+2)(2x-3) < 0$.

$-2 < x < 1,5$. $x = -1$ — наименьшее целое решение.

Ответ: -1.

3. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{3x+5}{1,5^x} > 0$.

Решение. Учитывая, что $1,5^x > 0$, исходное неравенство равносильно неравенству $3x+5 > 0$, $x > -\frac{5}{3}$.

$x = -1$ — наименьшее целое решение.

Ответ: -1.

4. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{x+9}{(\log_5 x)^2} \geq 0$.

Решение.

$$\begin{cases} x+9 \geq 0, \\ x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -9, \\ x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

$x = 2$ — наименьшее целочисленное решение.

Ответ: 2.

5. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{2^x + 3} < 0.$$

Решение. Учитывая, что $2^x + 3 > 0$, неравенство выполняется, если $x^2 - 2x - 8 < 0$, $(x + 2)(x - 4) < 0$.

$$-2 < x < 4.$$

Промежуток $(-2; 4)$ содержит пять целых чисел, следовательно, исходное неравенство имеет пять целочисленных решений.

Ответ: 5.

6. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{3}{(2^x + 1)(x - 3)} \leq 0$.

Решение. Умножим обе части неравенства на $2^x + 1$, учитывая, что $2^x + 1 > 0$. Получим $\frac{3}{x - 3} \leq 0$, $x - 3 < 0$, $x < 3$.

$x = 2$ — наибольшее целое решение.

Ответ: 2.

7. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{x + 3}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{6}} \geq 0$.

Решение.

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi x}{6} \neq 0, \\ \cos \frac{\pi x}{6} \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3, \\ \frac{\pi x}{6} \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi x}{6} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3, \\ x \neq 6n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq 3 + 6n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

В силу того, что при $n = -1$ $x \neq 3 + 6 \cdot (-1)$, $x \neq -3$. Следовательно, $x = -2$ — наименьшее целое решение исходного неравенства.

Ответ: -2.

8. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{2 - \sin x}{3x + 4} < 0, \text{ удовлетворяющих условию } x + 5 > 0.$$

Решение. Учитывая, что $|\sin x| \leq 1$, имеем $2 - \sin x > 0$. Задача

сводится к решению системы $\begin{cases} 3x + 4 < 0, \\ x + 5 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{4}{3}, \\ x > -5. \end{cases}$

Промежуток $\left(-5; -\frac{4}{3}\right)$ содержит три целых числа, следовательно, неравенство $\frac{2 - \sin x}{3x + 4} < 0$ имеет три целочисленных решения, удовлетворяющих условию $x + 5 > 0$.

Ответ: 3.

Вариант № 1

1. Найдите наибольшее отрицательное решение неравенства $\frac{x+5}{x+1} \geq 0$.
2. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $\frac{2}{3x^2 - 5x - 12} \geq 0$.
3. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{3^x + 1}{4x + 2} < 0$.
4. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства $\frac{x - 7}{(\log_3(-x))^2} \leq 0$.
5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\frac{x^2 + x - 6}{2 + 3^x} \leq 0$.
6. Найдите наименьшее целочисленное решение неравенства $\frac{5}{(2x - 5)(7^x + 2)} \geq 0$.
7. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства $\frac{x - 4}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{4}} \leq 0$.
8. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\frac{1 + \sin x}{x + 8} > 0$, удовлетворяющих условию $(x - 2) \cdot 2^x < 0$.

Вариант № 2

1. Найдите сумму целочисленных решений неравенства $\frac{2x-7}{x+4} \leq 0$.
2. Найдите сумму целочисленных решений неравенства $\frac{4}{15-7x-2x^2} \geq 0$.
3. Найдите произведение целочисленных решений неравенства $\frac{3^x-9}{5-x} \geq 0$.
4. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\frac{\log_7 x}{6-2x} > 0$.
5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\frac{5^x+3}{x^2+3x-10} \leq 0$.
6. Найдите произведение целочисленных решений неравенства $\frac{2}{(2^x-4)(x-5)} < 0$.
7. Найдите количество неположительных целочисленных решений неравенства $\frac{x+7}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}} > 0$.
8. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\frac{1-\sin^2 x}{x-4} \leq 0$, удовлетворяющих условию $3^x(x+3) > 0$.

Вариант № 3

1. Найдите сумму целочисленных решений неравенства $\frac{x+3}{x-2} \leq 0$.
2. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{1}{2x^2-7x-4} < 0$.
3. Найдите произведение целочисленных решений неравенства $\frac{2x-3}{2^x-16} \leq 0$.
4. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\frac{\log_3 x}{x-4} < 0$.

5. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{3^x + 1} < 0.$$

6. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{4}{(3^x - 1)(x + 2)} \leq 0$.

7. Найдите количество неотрицательных целочисленных решений неравенства $\frac{x - 5}{\sin \pi x} \leq 0$.

8. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{\cos^2 x + 1}{2x + 5} > 0, \text{ удовлетворяющих условию } x - 7 < 0.$$

Вариант № 4

1. Найдите сумму целочисленных решений неравенства $\frac{x - 2}{(x + 4) \log_3 x} \leq 0$.

2. Найдите произведение целочисленных решений неравенства

$$\frac{5x - 4 - x^2}{\log_4(x + 4)} \geq 0.$$

3. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{9^x - 2 \cdot 3^x - 3}{2x + 7} < 0$.

4. Найдите сумму целочисленных решений неравенства

$$\frac{\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 4}{6 - x} > 0.$$

5. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{4^x - 18 \cdot 2^x + 32}{\sin^2 \frac{\pi x}{3}} \leq 0.$$

6. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$8^{x-1} - 2^{2x+3} < 0, \text{ удовлетворяющих условию } \log_{0,3}(x + 1,9) < 2.$$

7. Найдите сумму целочисленных решений неравенства

$$\frac{1 - 2^{x^2 + 2x - 15}}{(\log_{1,7} |x - 1|)^2} > 0.$$

8. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{\log_3^2 x + 2 \log_3 x - 3}{2x + 1} \leq 0.$$

Вариант № 5

1. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{(x+5)\log_5 x}{x-1} \leq 0.$$

2. Найдите произведение целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2 - x - 6}{\log_3(x+1)} \leq 0.$$

3. Найдите сумму целочисленных решений неравенства

$$\frac{25^x - 3 \cdot 5^x - 10}{\log_2 x} \leq 0.$$

4. Найдите сумму целочисленных решений неравенства

$$\frac{8-x}{\log_5^2(x-3) - 2\log_5(x-3) + 1} \geq 0.$$

5. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{25,2 \cdot 5^x - 5 - 25^x}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}} \geq 0.$$

6. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$3^{3x+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} > 0, \text{ удовлетворяющих условию } \log_3(2x-1) - 1 \leq 0.$$

7. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{3^{x^2+4x-10} - 9}{|\log_3 x^2|} \leq 0.$$

8. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{\log_5^2 x - 4}{2x - 31} \leq 0.$$

Вариант № 6

1. Найдите сумму целочисленных решений неравенства

$$\frac{2x-5}{(x+6)\log_2 x} < 0.$$

2. Найдите произведение целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2 + x - 20}{\log_5(x + 3)} \leq 0.$$

3. Найдите наибольшее отрицательное целочисленное решение неравенства

$$\frac{3x + 4}{4^x - 5 \cdot 2^x + 2^2} < 0.$$

4. Найдите наименьшее целочисленное решение неравенства

$$\frac{\log_3^2 x - 2 \log_3 x + 1}{2^x - 5} > 0.$$

5. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{9^x - 28 \cdot 3^x + 27}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4}} \leq 0.$$

6. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$49^{2x-3} - 7^{3x+5} > 0, \text{ удовлетворяющих условию } \log_2(x - 1) < 4.$$

7. Найдите сумму целочисленных решений неравенства $\frac{6^{x^2-4x-5}-1}{(\log_{0,4}|x|)^2} \leq 0.$

8. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{\log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3}{x - 4} < 0.$

Вариант № 7

1. Найдите сумму неотрицательных целых решений неравенства

$$\frac{\log_5(3x^2 - 11x + 1) - 1}{7 - 49^{x-1}} \geq 0.$$

2. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{1}{2^{|x-1|-2}} + 3 \geq 2^{|x-1|}.$$

3. Найдите сумму целочисленных решений неравенства $\frac{x^2 - 6x}{2^{|2x-1|} - 32} \leq 0.$

4. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{1 - \log_3 \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + x - 2} > 0.$$

5. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{3}}{|2x + 5| - |x - 3| - 1} < 0.$$

6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\cos \frac{\pi x}{6} \geq 0$, удовлетворяющих условию $18 + 3x - x^2 \geq 0$.

7. Найдите сумму целочисленных решений неравенства

$$\frac{0,12 \cdot 15^x - 75 \cdot 3^x + 5^{x-2} - 25}{x+1} \leq 0.$$

8. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{(x+4) \log_{12}(5-x)}{x-1} > 0, \text{ удовлетворяющих условию } |x+3| + 2x + 3 > 0.$$

Вариант № 8

1. Найдите сумму неотрицательных целых решений неравенства

$$\frac{\log_4(2x^2 - 11x + 10) - 2}{2^{x+1} - 8} \leq 0.$$

2. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$9^{\frac{1}{4}|x+2|} + 1 \leq \frac{4}{9^{\frac{1}{4}|x+2| - \frac{1}{2}}}.$$

3. Найдите сумму целочисленных решений неравенства

$$\frac{125 - 5^{|x-3|}}{x^2 - x - 6} \geq 0.$$

4. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2 + 3} + 2} > 0.$$

5. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{|x+2| - |3x-7| + 3}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{8}} \geq 0.$$

6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{5} \geq 0$,

удовлетворяющих условию $x^2 - 3x - 10 \leq 0$.

7. Найдите сумму целочисленных решений неравенства

$$\frac{2 \cdot 4^{x+1} + 2^{x+1} - 8^x - 16}{1 - \cos^2 \frac{\pi x}{3}} \geq 0.$$

8. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{\log_7(x+1)} \leq 0, \text{ удовлетворяющих условию } 3x - 5 - |x-1| \geq 0.$$

Вариант № 9

1. Найдите сумму положительных целых решений неравенства

$$\frac{\log_5(2x^2 - 9x - 2) - 1}{6^{2x} - 36} \leq 0.$$

2. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$(\sqrt{5})^{\sqrt{x^2-4}} - \frac{2}{(\sqrt{5})^{\sqrt{x^2-4}-2}} \leq 3.$$

3. Найдите сумму всех целочисленных решений неравенства

$$\frac{3^{|x-2|} - 27}{x^2 + 2x - 35} \leq 0.$$

4. Найдите сумму всех целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2 + 9x + 8}{1 - \log_6 |x - 4|} \geq 0.$$

5. Найдите произведение целочисленных решений неравенства

$$\frac{|2x - 3| - |3x + 6| - 2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{6} + 4} > 0.$$

6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\frac{1}{\sin \frac{\pi x}{4}} \leq 0$,

удовлетворяющих условию $x^2 + x - 20 \leq 0$.

7. Найдите сумму целочисленных решений неравенства

$$\frac{1,5 \cdot 6^x - 4 \cdot 3^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-1} + 12}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{2} + 3} \leq 0.$$

8. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{(x-3)}{(x-1)\log_4(x+4)} \geq 0, \text{ удовлетворяющих условию } |2x+5| + 3x < 7.$$

§ 12. Комбинированные системы уравнений

Демонстрационный вариант

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (2 - 3\sqrt{\sin x})(5y - 4) = 0. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $\sin x \geq 0$. Так как $\sin x \geq 0$, то из первого уравнения системы следует, что $-1 \leq y \leq 0$. Второе уравнение равносильно сово-

купности $\begin{cases} 2 - 3\sqrt{\sin x} = 0, \\ \begin{cases} 5y - 4 = 0, \\ -1 \leq y \leq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{4}{9}, \\ \begin{cases} y = 0,8, \\ -1 \leq y \leq 0; \end{cases} \end{cases}$ решений нет.

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{4}{9} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из первого уравнения системы следует: $y = -\sin x$, $y = -\frac{4}{9}$.

Ответ: $\left\{ \left((-1)^k \arcsin \frac{4}{9} + \pi k; -\frac{4}{9} \right), k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5^x = 0,2^{2y}, \\ 2^{x-4} = 2^{3y+1}. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 5^x = 5^{-2y}, \\ 2^{x-4} = 2^{3y+1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y, \\ x - 4 = 3y + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y, \\ -2y - 4 = 3y + 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y, \\ y = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(2; -1)$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_7(x + y) = \log_7 9, \\ x - y = 1. \end{cases}$

Решение. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} x + y = 9, \\ x - y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 10, \\ y = x - 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 4. \end{cases}$$

Ответ: $(5; 4)$.

4. Найдите значение выражения $x_0 + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 11^{|x|} = 121, \\ \ln x = \ln(y + 1). \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 11^{|x|} = 11^2, \\ \ln x = \ln(y+1); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 2, \\ x = y + 1, \\ x > 0, \\ y > -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$x_0 + y_0 = 2 + 1 = 3.$$

Ответ: 3.

5. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{y_0}{x_0}$, если $(x_0; y_0)$ — решение

системы уравнений $\begin{cases} 7^{x^2} - 7^{y-x} = 0, \\ \lg(x+4) = \lg y. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 7^{x^2} = 7^{y-x}, \\ x+4 = y, \\ x > -4, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y-x, \\ y-x = 4, \\ x > -4, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4, \\ y = x+4, \\ x > -4, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 6, \\ x = -2, \\ y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y_0}{x_0} = 3, \\ \frac{y_0}{x_0} = -1. \end{cases}$$

Ответ: 3.

6. Найдите значение выражения $x_0 \cdot y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{x} + \log_7 y = 5, \\ 3\sqrt{x} - 2\log_7 y = 4. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + \log_7 y = 5, \\ 3\sqrt{x} - 2\log_7 y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x} + 2\log_7 y = 10, \\ 3\sqrt{x} - 2\log_7 y = 4; \end{cases}$$

$7\sqrt{x} = 14$; $\sqrt{x} = 2$; $x = 4$. Подставим $\sqrt{x} = 2$ в первое уравнение системы. Получим: $2 \cdot 2 + \log_7 y = 5$; $\log_7 y = 1$; $y = 7$. Выполненные преобразования равносильны, $(4; 7)$ — решение исходной системы. $x_0 \cdot y_0 = 4 \cdot 7 = 28$.

Ответ: 28.

7. Найдите наибольшее значение выражения $x_0 + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — ре-

шение системы уравнений $\begin{cases} \frac{e^{x^2-5}}{e^y} = 1, \\ \sqrt{y-x} = 1. \end{cases}$

Решение. Так как $e^y > 0$, то система примет вид:

$$\begin{cases} e^{x^2-5} = e^y, \\ y - x = 1, \\ y \geq x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5 = y, \\ y = x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ y = x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x = 3, \\ x = -2, \\ y = x + 1; \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x = 3, \\ y = 4, \end{cases} & x_0 + y_0 = 3 + 4 = 7, \\ \begin{cases} x = -2, \\ y = -1. \end{cases} & x_0 + y_0 = -2 - 1 = -3. \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ответ: 7.

8. Найдите значение выражения $y_0 - x_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x - y} = y, \\ 2 \log_2 y = \log_2(x + 1). \end{cases}$

Решение. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} 2x - y = y^2, \\ y^2 = x + 1, \\ y > 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выразим x : $x = y^2 - 1$. Подставим $x = y^2 - 1$ в первое уравнение. Система примет вид:

$$\begin{cases} 2y^2 - 2 - y = y^2, \\ x = y^2 - 1, \\ y > 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы: $y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ y = 2. \end{cases}$

$y = -1$ не удовлетворяет условию $y > 0$. При $y = 2$ $x = 2^2 - 1 = 3$.
 $y_0 - x_0 = 2 - 3 = -1$.

Ответ: -1.

Вариант № 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^{2|x|} = 81, \\ \lg x = \lg(3y - 1). \end{cases}$
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (\ln |\sin x| - 2)(2 \sin y - 1) = 0. \end{cases}$
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^{-x} + 4^y = 6, \\ 2 \cdot 4^y - 3 \cdot 2^{-x} = 2. \end{cases}$

4. Найдите значение выражения $x_0 + 3y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} \frac{7^{x+2}}{7^{3y}} = 1, \\ 7^{2y} = 7^{x+1}. \end{cases}$$
5. Найдите значение выражения $2x_0 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1, \\ y - 2x = 1. \end{cases}$$
6. Найдите значение выражения $x_0 + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} 2^{4+y} = 2^{2x-1}, \\ \log_5(2x + 3) = \log_5(2 - y). \end{cases}$$
7. Найдите значение выражения $2y_0 - 3x_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{2+x} = \sqrt{1-y}, \\ x^2 - 3y - 7 = 0. \end{cases}$$
8. Найдите значение выражения $x_0 + 2y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+2} = x + y, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Вариант № 2

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 9^{2y} - 3 \cdot 9^{y+1} + 72 = 0, \\ \cos x = y. \end{cases}$$
2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \lg(x + y - 1) = 2 \lg x, \\ y + 2x = 7. \end{cases}$$
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3^{2x} - 3^{2+y} = 8, \\ x - y = 3. \end{cases}$$
4. Найдите значение выражения $x_0 + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} 5^{2x+4} = 2^{3y+6}, \\ x - y = 0. \end{cases}$$
5. Найдите значение выражения $x_0 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 2, \\ 6^{\frac{x}{3}} \cdot 2^{\frac{x}{3}} = 144. \end{cases}$$
6. Найдите наименьшее значение выражения $x_0 \cdot y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} 2 \log_3 x + y^2 = 9, \\ 2y - \log_3 x = -6. \end{cases}$$
7. Найдите значение выражения $x_0^2 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} |x| = 5, \\ \sqrt{x^2 + y} = 6. \end{cases}$$

8. Найдите значение выражения $\frac{y_0}{x_0}$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \cos y = 0, \\ 2 \operatorname{tg} x - \cos y = 3 \end{cases}$ и $x_0, y_0 \in [0; \pi]$.

Вариант № 3

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (3\sqrt{\sin x} - 2)(6y - 3) = 0. \end{cases}$
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 27^x - 9^y = 0, \\ 81^x : 3^y = 243. \end{cases}$
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 8, \\ \log_3(2x - y) = 2. \end{cases}$
4. Найдите значение выражения $4x_0 - 2y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_2(y - x) = 2. \end{cases}$
5. Найдите значение выражения $\frac{10}{x_0} - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} e^{x^2+2} - e^6 = 0, \\ \ln(x^3 + y) = \ln x. \end{cases}$
6. Найдите значение выражения $4x_0 - 7y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 3 \cdot \sqrt[5]{x-3y} = \log_3(27x), \\ \log_3 x + 4\sqrt[5]{x-3y} = 4. \end{cases}$
7. Найдите значение выражения $x_0 - 8y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 10, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{8}{3}. \end{cases}$
8. Найдите значение выражения $3x_0 + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} x - \sin y = 1, \\ 2x - \sin y = 2, \end{cases}$ причём $y_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант № 4

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (6\sqrt{\cos x} - 1)(5y + 4) = 0. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4^x = 0,25^{2y}, \\ 5^{x-4} = 5^{5y+3}. \end{cases}$
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_5(2x - y) = \log_5 7, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$
4. Найдите значение выражения $x_0 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \ln(x + 3) = \ln y, \\ 13^{|y|} = 169. \end{cases}$
5. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{y_0}{x_0}$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 5^{x^2} - 5^{x+y-1} = 0, \\ \ln x = \ln(y - 1). \end{cases}$
6. Найдите значение выражения $\frac{x_0 \cdot y_0}{x_0 + y_0}$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \log_6 y - 2\sqrt{x} = -3, \\ 2\log_6 y + \sqrt{x} = 4. \end{cases}$
7. Найдите наибольшее значение выражения $3x_0 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \frac{4^{x^2+3}}{4^y} = 1, \\ \sqrt{x+y} = 3. \end{cases}$
8. Найдите наименьшее значение выражения $x_0 + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 2^x = 4^y, \\ \sqrt{2x+1} = x - 5. \end{cases}$

Вариант №5

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ \frac{5^{2y}}{3^x} = 15 \cdot 125. \end{cases}$
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (1 - 5\sqrt{\cos x})(3y - 8) = 0. \end{cases}$
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 8, \\ \log_3(2x + 3y) = 3. \end{cases}$

4. Найдите значение выражения $\frac{2}{7}(x_0 + y_0)$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 2^{x^2} = 16, \\ \log_4(6x - 2y) = \log_4 x. \end{cases}$
5. Найдите значение выражения $\frac{4}{x_0} + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} e^{2x^2+4} - e^{12} = 0, \\ \ln(3x^2 + y) = \ln x. \end{cases}$
6. Найдите значение выражения $\frac{x_0}{3y_0}$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x+3y} = \log_3 9x, \\ 2\sqrt[3]{x+3y} - \log_3 x = 1. \end{cases}$
7. Найдите значение выражения $3x_0 - 2y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x+y} = 3, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2. \end{cases}$
8. Найдите значение выражения $\frac{x_0}{\pi} + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} y - \sin x = 1, \\ 2y - \sin x = 3, \end{cases}$ при этом $x_0 \in [0; \pi]$, $y_0 \in R$.

Вариант № 6

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 2, \\ \frac{7^y}{3^x} = 21 \cdot 49. \end{cases}$
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 12 = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 4, \\ \log_2(3x + y) = 5. \end{cases}$
4. Найдите значение выражения $\frac{3}{4}(x_0 + y_0)$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 3^{x^2} = 81, \\ \log_3(5x + 4y) = \log_3 x. \end{cases}$

5. Найдите значение выражения $\frac{2}{x_0} + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы

уравнений
$$\begin{cases} e^{x^2-1} - e^3 = 0, \\ \ln(x^2 - y) = \ln x. \end{cases}$$

6. Найдите значение выражения $2x_0 + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы

уравнений
$$\begin{cases} 2\sqrt[3]{2x+y} = \log_2 4x, \\ \log_2 x + 3\sqrt[3]{2x+y} = 3. \end{cases}$$

7. Найдите значение выражения $x_0 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы

уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 5, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

8. Найдите значение выражения $x_0 + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы

уравнений
$$\begin{cases} y + \cos x = 2, \\ 2y + \cos x = 3, \end{cases} \quad \text{причём } x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Вариант № 7

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x - y = 5, \\ \frac{2^x}{6^y} = 96. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2y + 3 \cos x = 0, \\ (\ln(\cos x) + 1)(y - 1) = 0. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 6 \cdot 2^{y-1} = 24, \\ 5 \cdot 2^y - 3 \cdot 2^{x+1} = 7. \end{cases}$$

4. Найдите значение выражения $x_0 \cdot y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы

уравнений
$$\begin{cases} y^2 \cdot x = 4x, \\ \log_4(xy) = \log_4 y - \log_4 x. \end{cases}$$

5. Найдите значение выражения $y_0 - 2x_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы

уравнений
$$\begin{cases} 5^x - y = 20, \\ \log_5 y + 1 = x. \end{cases}$$

6. Найдите значение выражения $5(y_0 - x_0)$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы

уравнений
$$\begin{cases} \log_{0,3}(x+2) + \log_{0,3} 2 = \log_{0,3}(y+4), \\ \log_3(x+2y) = 0. \end{cases}$$

7. Найдите значение выражения $y_0 - 3x_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{y - x + 2} - 3 = 0, \\ x - \sqrt{y - 2x + 3} = -2. \end{cases}$$

8. Найдите значение выражения $x_0 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} x - \cos y = 2, \\ 3x + \cos y = 10 \end{cases} \text{ и } x_0, y_0 \in [0; \pi].$$

Вариант № 8

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y - \sin x = 0, \\ (8\sqrt{\sin x} - 1)(3y - 4) = 0. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 3^x + 3^{2y} = 36. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2^{2x} - 3^y = 1, \\ 4^x + 3^y = 7. \end{cases}$$

4. Найдите значение выражения $2x_0 - 3y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} 5^x - 2^{2y} = 21, \\ 5^x - 4^{y+1} = 9. \end{cases}$$

5. Найдите значение выражения $4x_0 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} \log_2(x + 2y) = 2, \\ 3^x + 3^{2y} = 18. \end{cases}$$

6. Найдите значение выражения $x_0 + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} 5^y - 5^x = 124, \\ \log_3(x + y) = 1. \end{cases}$$

7. Найдите значение выражения $2y_0 - 3x_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} 2y - \sqrt{3y - 2x} = 2, \\ y - x = 1. \end{cases}$$

8. Найдите значение выражения $2x_0 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} 2y - x = 1, \\ x - \sqrt{2x - y} = 1. \end{cases}$$

Вариант № 9

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 1, \\ \frac{3^y}{5^x} = 45. \end{cases}$
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (\sqrt{\cos x} - 3)(2 \sin y - \sqrt{2}) = 0. \end{cases}$
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 10 \cdot 3^y - 3 \cdot 3^x = 2, \\ 2 \cdot 3^x + 3^{y+1} = 18. \end{cases}$
4. Найдите значение выражения $3(x_0 - y_0)$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} x^3 \cdot y = 2 - y^4, \\ \log_7 x + \log_7 y = \log_7 \frac{x}{y}. \end{cases}$
5. Найдите значение выражения $2y_0 - 3x_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} x + 3^y = 10, \\ \log_3 x + 2 = y. \end{cases}$
6. Найдите значение выражения $3(x_0 + y_0)$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \log_{0,7} y - \log_{0,7} 4 = \log_{0,7}(x + 1), \\ \log_2(2x + y) = 3. \end{cases}$
7. Найдите значение выражения $x_0 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{x - y + 3} - 2 = 0, \\ y - \sqrt{y - x + 10} = -1. \end{cases}$
8. Найдите значение выражения $x_0 + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} y + \sin x = 6, \\ 2y + \sin x = 12 \end{cases}$ и $x_0 \in \left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Ответы

§ 1. Иррациональные уравнения

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	1,5	4	2	2	−3
2	1	17	0	−9	3	7	1	3
3	3	2	1	3	64	8	9	0
4	0,0625	−4,5	−2,5	148	−4	7	1	4
5	1	0	1	3	0,0625	0	−6	5
6	−1	2	1	2	81	0	7	5
7	3	1	0,75	2	0	4	2	3
8	2	1	1	5	−4	6	−10	−2
9	−12	4	−0,25	0	−49	2,5	4	3

§ 2. Различные приёмы при решении иррациональных уравнений

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	нет решений	2	-4	1; 2; 10	3	-2, 2; 2	$2\pi n, n \in Z$	7
2	4	-2	-2	0; 2	6	-25	$[-1; 4]$	$\frac{\pi}{6}$
3	2; 4; 5	3	-2	1	$\frac{625}{81}$	-1; 4	$2\pi n, n \in Z$	9
4	-1	-5	$0; 2\sqrt{2} - 1$	1	3	2	2	$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k,$ $k \in Z;$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
5	1, 5	-1	1; -9	-4	$-3\frac{2}{3}$	2	-5; 1	13
6	7; 25	2	1	1	256	$3 \pm \sqrt{10}$	$\frac{\pi}{2}$	7
7	$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$	$[-2; 0) \cup$ $\cup (0; 2]$	1; 2	20	4	-6; 3	5; 20	9
8	2	3	$\frac{13 + 5\sqrt{7}}{4}$	1	-2; 1	$\pi n, n \in Z$	-2	$[5; 10]$
9	$\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k; k \in Z$	2	4; 8	1	7	-1; 2	39	15

§ 3. Тригонометрические уравнения

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	90	3	−120	198	−360	4	8	−3
2	4	−18	−540	3	45	2	45	−120
3	10	3	−90°	0,25	240°	45°	2,4	1
4	4	270	360	−60	−135	−3	4	−180
5	20	3	180	0,5	60	−22,5	2	8
6	30	2	180	0,5	150	0	2,25	6
7	0,5	2	780	5	4	4	0	1
8	120	5	−120	810	−180	3	360	45
9	0	4	−180	3	7	3	0	−1

§ 4. Различные приёмы при решении тригонометрических уравнений

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	$\pm \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	1	$(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\pi k;$ $\pm \arctg 2 +$ $+\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$2\pi n;$ $-\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	1; $\frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$ $\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$
2	$\frac{\pi k}{2},$ $k \in \mathbb{Z}$	4	$\frac{\pi}{4} + \pi k,$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	1; $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,$ $n = 0, n \in \mathbb{N}$	1; -1; $\pi k, k \in \mathbb{Z},$ $k \neq 0$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6} + 2\pi k,$ $\frac{\pi}{2} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$
3	$\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4};$ $\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}$	π	$\pm \arccos 0,8 +$ $+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$	6; $\frac{\pi}{2} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{12} (6k \pm 1),$ $k \in \mathbb{Z}$	$\sqrt{2}$	$-\arccos \frac{1}{3} +$ $+2\pi k, \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$
4	$\frac{\pi}{2} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	0,2	$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3},$ $k \in \mathbb{Z};$ $\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7},$ $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{4}$	$\pi k,$ $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$-\frac{3\pi}{2}$	2	$\arcsin \frac{1}{4} +$ $+(2k + 1)\pi,$ $\frac{\pi}{2} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$

№ вар.	Номер задания			
	1	2	3	4
5	$x = 0; x = \arcsin \frac{1}{3};$ $x = \pi - \arcsin \frac{1}{3}$	$\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$	$\pm \arctg 3 + 2\pi k, k \in Z$	$-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$
6	$\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$	0	$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$	0
7	$\frac{4}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi n;$ $\frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi n;$ $n \in Z$	$(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n;$ $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n;$ $n \in Z$	$\frac{3}{2}\pi$	$\pi k, k \in Z$
8	$\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2};$ $\frac{5\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$	$\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n;$ $-\arctg 3 + \pi n, n \in Z$	$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$	$\frac{2\pi n}{3};$ $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$
9	$\frac{\pi}{12} + \pi k; k \in Z;$ $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}; n \in Z$	$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$	$\pi \left(2k - \frac{1}{2} \right)$	$2\pi n; n \in Z;$ $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$

№ вар.	Номер задания			
	5	6	7	8
5	$x = 3; x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},$ $k \in \mathbb{N}$	$\operatorname{arctg} \frac{2}{5}$	$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$ $\pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$\arccos \frac{1}{5} + 2\pi k,$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
6	$3; \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n;$ $n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2}$	$\arcsin \frac{1}{6} + 2\pi k,$ $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
7	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\pi(1 + 2k), k \in \mathbb{Z}$	$-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}$	$\arccos \frac{2}{3} + (2k + 1)\pi,$ $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
8	$\frac{\pi}{12}$	$2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\arcsin \frac{3}{4} + (2k + 1)\pi,$ $(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$
9	$\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$-\arcsin \frac{3}{4} + 2\pi k, 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

§ 5. Показательные уравнения

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	25	5	0,5	0,25	−1	1	−1	0
2	−4	−1	−3,5	0,6	0	−2	2	3
3	23	−1,5	0,5	2,5	0	−2	1	0
4	0,0081	10	2	1	0,16	−4	−1	256
5	21,9	−3	0,5	2	10	1	−2	0,24
6	17	−1,5	1	3	0	0	−3	0
7	0	6	5	−3	2	1	1,5	1
8	3	1,5	3	0	2	0	−0,5	1
9	−2	10	0	−2	0	0	1	−1

§ 6. Различные приёмы при решении показательных уравнений

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	-3; 1	0	$-2\frac{2}{3}$	нет решений	3	± 2	4
2	4; 100	-7; -1	1; 2	-3; 3	$\frac{1}{3}; 2; 4$	$\frac{\pi}{6}$	-2	2
3	120	$x = 3$	2	0	-4	90°	0	3
4	20	1; 1,4	0; 1	-1; 2	3	2	-1	3
5	$-\frac{1}{2}$	3	1	0; -2	$\frac{3}{2}$	1; 2	3	-1; 3
6	12,25	1	2	0	0	$-\frac{3\pi}{4}$	0	2
7	4	1	-1,5; 2	1	7	-1	-6; -4; 2	1
8	-4; 1	1	2; 4	3	0,5	1	0; 3	0; 1; 4
9	$\frac{7}{4}$	1	-1; 2	$1; 1 - \log_7 3$	14	-1; 4	$\frac{1}{3}; 2; 4$	1

§ 7. Логарифмические уравнения

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	−3	1	1	2	2	1	0,125	−0,5
2	0,5	3	1,5	1	−60	10	10	10
3	0	0,6	0	2	1	0,25	3	−1
4	4	25	−12	8	−0,5	2,25	0,25	1
5	0	0,4	1	2	4	3	3	4
6	0	0,25	0	3	1	2	6	8
7	9	−0,5	5	1	250	7	−2	−1,75
8	5	−1,75	0	10	1	1,125	2	−2
9	4	5	13	1	−100	2	10	1,5

§ 8. Различные приёмы при решении логарифмических уравнений

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	64	$\frac{1}{5}$	-2	18,5	-11,25	-2	0	$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
2	$\frac{1}{512}$	3	$-\frac{1}{26}$	$\frac{\sqrt{7}}{7}$	-3	42	-4	0,5
3	$\frac{1}{9}$	8	$6\frac{4}{7}$	5	-2	2	-9	$-1; -3; \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
4	1	5	8	1000	2	2	3	2
5	$\frac{1}{16}$	-2	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{7}{2}$	-7	9	$\frac{1}{3}$
6	1	нет решений	-2	$\sqrt{10}$	8	49	-4	$\frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z}$
7	2	-1	$\frac{1}{2}; 2$	-0,001	10	-3	4	$\frac{\pi}{2}$
8	3	1,5	10	4	1	$1 + \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	7
9	$\frac{1}{27}$	1	$\frac{1}{6}; 6$	100	8	-1	3	3

§ 9. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-1	$[-4; -2]$	± 2	-1	$-\frac{1}{6}$	да 2	6,5	$1; \frac{1}{32}$
2	0	$[1; 3]$	± 6	-6; 2	$-\frac{11\pi}{8}$	$-\frac{2}{3}$	1	$1; \sqrt{3}$
3	2,25	-12	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	2; 5	8,6	$\frac{1}{3}; \frac{5}{3}$	2; 4	$\log_5 7$
4	1,5	5	4	1; 3	$\frac{\pi}{3}$	1	16	-4
5	10	-1	2	-4	$[5; +\infty)$	4	$3; -\frac{3}{4}$	16
6	3	-5	$\pi n, n \in Z; -3,5$	0; 2	3,75	1,5; 2,5	1; 3	$\log_2 5$
7	-0,5	$\pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$	$\frac{\pi}{4} + 2\pi m; \frac{3}{4}\pi + 2\pi n; m, n \in Z$	$[\frac{4}{5}; +\infty)$	$\pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in Z$	-1; 15	-1	$\pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$
8	-5; 1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-3; 2; \frac{\sqrt{65}-1}{2}$	$-1; [-\frac{1}{2}; +\infty)$	$[2; 3]$	$-\sqrt{5}$	0,6; 5	$1; \log_3 \frac{5}{4}$
9	1,1	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$\frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in Z; \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in Z$	$\pi n, n \in Z; \frac{4}{3}$	$\pm \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in Z$	$e^2; e^{-1}$	2; 1	4

§ 10. Различные приёмы при решении комбинированных уравнений

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0; 3	2	4	-3	1,5; 1,44	-1	$\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	нет решений
2	$-\pi$	-8	0	0	$-\frac{3\pi}{4}$	2	$-3 + \sqrt{14}; 1$	8
3	$-1 + \sqrt{6}$	10	$x = 2; y = 5$	(0; 1)	0	$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3};$ $n \in \mathbb{Z}$	± 3	0
4	$\frac{\pi}{2}$	9	$\log_5 2$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	1; 2	5
5	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2}$	$4 + \pi$	5	0	3	-2
6	-2	40	(3; 4)	0	1	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},$ $n \in \mathbb{Z}$	2; -2	0
7	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}; 2$	$\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	-1; 1	11	8π	0	2,5
8	$\pm \arccos \frac{1}{4} +$ $+2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$1 - \sqrt{2};$ $1; 1 + \sqrt{2}$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	-1; 2	$\frac{1}{4}; \frac{1}{4}$	1	5	$(-\infty; -1] \cup$ $\cup \left\{ \frac{1}{5} \right\}$
9	-7	$\frac{1}{8}; 2$	$\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}$	-3; 3	$\frac{5\pi}{2}$	0	1,5

§ 11. Неравенства

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	−5	−2	−1	−2	6	3	3	9
2	0	−9	24	1	6	12	3	6
3	−5	3	6	2	0	−1	0	9
4	2	24	0	11	3	7	−10	3
5	0	6	2	22	2	2	6	10
6	2	0	−2	4	2	5	14	18
7	4	5	14	4	6	7	10	2
8	11	5	14	1	5	2	3	4
9	5	−2	−21	7	240	3	4	3

§ 12. Комбинированные системы уравнений

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$(2; 1)$	$\left((-1)^{n+1} \arcsin \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} \right), n \in Z$	$(-1; 1)$	4	-1	-2	-7	6
2	$\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{1}{2} \right), n \in Z$	$(2; 3)$	$(1; -2)$	-4	8	-81	14	4
3	$\left((-1)^n \arcsin \frac{4}{9} + \pi n; -\frac{4}{9} \right), n \in Z$	$(2; 3)$	$(1; -7)$	-4	11	4	10	3
4	$\left(\pm \arccos \frac{1}{36} + 2\pi n; \frac{1}{36} \right), n \in Z$	$(2; -1)$	$(2; -3)$	-3	1,5	2,4	-1	12
5	$(-1; 2)$	$\left(\pm \arccos \frac{1}{25} + 2\pi n; \frac{1}{25} \right), n \in Z$	$(-3; 11)$	2	-8	-1,5	3	2,5

№ вар.	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
6	$(-1; 3)$	$\left(\frac{1}{2}; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right),$ $n \in Z$	$(9; 5)$	0	3	1	15	1
7	$(4; -1)$	$\left(\pm \arccos \frac{1}{e} + 2\pi n;$ $-\frac{3}{2e}\right), n \in Z$	$(\log_2 3; \log_2 5)$	2	1	1	5	3
8	$\left((-1)^n \arcsin \frac{1}{64} + \pi n;$ $\frac{1}{64}\right), n \in Z$	$(3; 1)$	$(1; 1)$	1	7	3	1	4
9	$(-1; 2)$	$\left(\pm \arccos \frac{\pi}{4} + 2\pi n;$ $\frac{\pi}{4}\right), n \in Z$	$(\log_3 6; \log_3 2)$	0	1	22	1	6

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

**МАТЕМАТИКА.
ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ ЕГЭ-2012 (С1, С3).
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ.**

Уравнения. Неравенства. Системы

Учебно-методическое пособие

Под редакцией **Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова**

Обложка *А. Вартанов*

Компьютерная верстка *А. Ковалевская*

Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать 04.07.2011.

Формат 60х84¹/₁₆. Бумага типографская.

Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,7.

Тираж 10 000 экз. Заказ № 2037.

Издательство ООО «ЛЕГИОН-М» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 2 от 13.01.2011, зарегистрирован в Минюст 08.02.2011 № 19739.

ООО «ЛЕГИОН-М»

Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.

Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Долмановский, 55.

www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

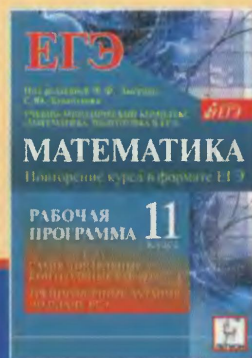
142300, Чехов Московской области.

E-mail: marketing@chpk.ru Сайт www.chpk.ru

Телефон 8(495) 988-63-87 Факс 8(496) 726-54-10

Учебно-методический комплекс
«Математика. Подготовка к ЕГЭ»
под редакцией Ф.Ф. Лысенко и С.Ю. Кулабухова
включает следующие пособия для учащихся и учителей:

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012
- Решебник. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012
- Математика. Устные вычисления и быстрый счет. Тренировочные упражнения за курс 7-11 классов
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2012 (В1-В6). Пособие для «чайников»
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2012 (В7, В8, В10 – В12). Пособие для «чайников»
- Математика. Тематические тесты. Повышенный уровень ЕГЭ-2012 (С1, С3). Уравнения, неравенства, системы
- Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание С5
- Математика. Повторение курса в формате ЕГЭ. Рабочая программа. 11 класс. Самостоятельные, контрольные работы. Тренировочные задания по плану ЕГЭ
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012. Учебно-тренировочные тесты
- Карманный справочник по математике



Издательство включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 2 от 13.01.2011, зарегистрирован в Минюст 08.02.2011 № 19739.

ISBN 978-5-91724-094-7



9 785917 240947

344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550
Тел. (863) 303-05-50, 248-14-03

Сайт, интернет-магазин: www.legionr.ru
e-mail: legionrus@legionrus.com

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН



Опт, мелкий опт, интернет-магазин, книга — почтой