

# ЕГЭ (1x)

Под редакцией  
Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова



готовимся  
к ЕГЭ

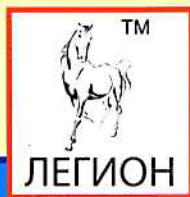
# МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
БОЙ**

ЗАДАНИЯ ЧАСТЕЙ **В** И **С**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС  
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»



**Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»**

**Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухов**

# **МАТЕМАТИКА**

## **ПОДГОТОВКА К ЕГЭ:**

### **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ**

### **БОЙ**

**ЗАДАНИЯ ЧАСТЕЙ В И С**

**Учебно-методическое пособие**



**ЛЕГИОН**  
**Ростов-на-Дону**  
**2013**

ББК 22.1  
К 65

Рецензенты: *Л. Н. Евич* — к.ф.-м.н., доцент  
*Л. Л. Иванова* — заслуженный учитель России

**Коннова Е. Г.**

К 65 **Математика. Подготовка к ЕГЭ: математический бой. Задания частей В и С** / Е. Г. Коннова, С. О. Иванов ; Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 48 с. — (Готовимся к ЕГЭ.)

ISBN 978-5-9966-0329-9

Предлагаемое пособие адресовано учащимся 10 – 11-х классов и учителям для успешной, интересной и творческой организации подготовки к ЕГЭ по математике на уроках и во внеурочные часы.

Книга посвящена **решению заданий части В и С1 – С5** при помощи технологии **математического боя** — интеллектуального соревнования команд. В процессе подготовки к единому экзамену с помощью данной книги достигаются как минимум три цели — отработка индивидуальных умений обучающихся, организация эффективного повторения материала в классе или в группе школьников и формирование коллективных навыков решения задач.

Издание включает **варианты математических боев по алгебре и геометрии двух уровней сложности**, правила математического боя, ответы и подробные указания к решениям четырех вариантов.

Пособие является частью **учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ»**, включающего книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013», «Математика. ЕГЭ-2013. Учебно-тренировочные тесты», «Математика. Повышенный уровень ЕГЭ-2013 (С1, С3). Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы» и другие.

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0329-9

© ООО «Легион», 2013

# Оглавление

От авторов .....	4
Правила математического боя .....	7
§ 1. Алгебра. Простые варианты.....	17
Вариант №1 .....	17
Вариант №2 .....	19
§ 2. Алгебра. Сложные варианты.....	21
Вариант №1 .....	21
§ 3. Геометрия. Простые варианты .....	23
Вариант №1 .....	23
Вариант №2 .....	25
§ 4. Геометрия. Сложные варианты .....	27
Вариант №1 .....	27
Ответы .....	29
Решения .....	30
Литература .....	47



# От авторов

Дорогие читатели!

Предлагаемая книга содержит две трудно совместимые, на первый взгляд, идеи — **подготовку к ЕГЭ по математике** — обязательного для всех без исключения выпускников экзамена — и популяризацию **математических боёв в школе** как одного из важных видов интеллектуальных соревнований.

Согласно ФГОС среднего (полного) общего образования, цель образования — не только сумма знаний и компетенций, но и, в числе прочих, — становление и развитие таких личностных характеристик выпускника, как уважение мнения других людей, умение вести конструктивный диалог, достигать взаимопонимания и успешно взаимодействовать. Всё это поможет выпускнику в дальнейшем стать действительно успешной и гармоничной личностью, сочетающей в себе образованность и внутреннюю культуру.

Важнейшая особенность математических боёв — соревнований двух команд в решении математических задач — в том, что школьники учатся совместно решать поставленные задачи и вести конструктивную полемику по предложенной проблеме, тем самым развивая свои мыслительные способности, настойчивость в выполнении заданий и применяя творческий подход к решению задач.

В нашем пособии предлагается **методика подготовки к ЕГЭ с использованием технологии математического боя**, что применимо не только в дополнительном образовании или во внеурочной работе, но и непосредственно в учебном процессе, на уроках.

**Немного об истории.** «Математический бой» — вторая по популярности форма проведения математических соревнований после классических олимпиад. Математический бой был изобретён в середине 60-х годов учителем из Ленинграда Иосифом Яковлевичем Веребейчиком. В отличие от олимпиад, где проявляются исключительно индивидуальные таланты и умения, математический бой способствует развитию навыков коллек-

тивного решения задач, особенно ценного в современной науке, когда зачастую одна глобальная задача решается большим коллективом научных сотрудников. За 40 лет своего существования математические бои завоевали огромную популярность в нашей стране. Ежегодно проводятся городские и областные соревнования в форме матбоёв. Без них не проходит ни одна летняя математическая школа. Ежегодно проводятся всероссийские математические турниры, традиционно собирающие самых сильных участников: Российский Фестиваль Юных Математиков и Кубок памяти А.Н. Колмогорова.

В нашей книге приведены **простые и сложные варианты по алгебре и геометрии**, которые содержат разное количество задач части В и С. Четыре варианта математических боёв представлены в книге с **подробными указаниями к решениям**. Выбор заданий, предложенных авторами для математических боёв в рамках подготовки к ЕГЭ, основан на анализе результатов единого государственного экзамена 2011 и 2012 годов. Взяты задания части В, вызвавшие наибольшие трудности при выполнении, а также задачи С1 – С5.

**В простые варианты по алгебре** входят две задачи В7, по 3 задачи В8 и В13, по одной задаче С1 и С3. В простые варианты по геометрии входят три задачи В11, по 2 задачи В6, В9, С2 и 1 задание С4.

**В сложные варианты по алгебре** входят по одной задаче В7 и В8, по две задачи В13, С1, С3 и С5. В сложные варианты по геометрии входят по одной задаче В6, В9, две задачи В11, по 3 задачи С2 и С4.

Математический бой проходит следующим образом. Сначала команды получают условия задач, и даётся определённое время на их решение. По истечении отведённого времени начинается собственно *бой*, когда команды озвучивают друг другу решения задач в соответствии с правилами матбоя.

Если одна из команд выступает в качестве **докладчика**, то другая — в качестве **оппонента**, то есть ищет в решении ошибки (недочёты). Выступления оппонента и докладчика оцениваются жюри в баллах. Если команды, обсудив предложенное решение, всё-таки не решили задачу до конца или не обнаружили допущенные ошибки, то в обсуждении решения также принимает участие жюри. Победителем боя объявляется команда, которая в итоге наберёт большее количество баллов. Подробные правила математического боя приведены в книге в отдельной главе.

Предлагаемое издание успешно дополняет **учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»** под редакцией **Ф.Ф. Лысенко и С.Ю. Кулабухова**, который включает книги «Математика. Под-

готовка к ЕГЭ-2013», «Математика. ЕГЭ-2013. Учебно-тренировочные тесты» и другие. Полный перечень книг вы можете посмотреть на сайте издательства [www.legionr.ru](http://www.legionr.ru).

Отзывы, замечания и предложения о книге просим направлять по электронной почте [legionrus@legionrus.com](mailto:legionrus@legionrus.com) или по адресу: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.

### **Вниманию учителей и методистов!**

Издательство «Легион» предлагает вам разработку любого количества вариантов математических боёв согласно вашим потребностям и в установленный вами срок. Просьба направлять вопросы и заявки в отдел математики по электронной почте [legionrus@legionrus.com](mailto:legionrus@legionrus.com) или по телефону (863) 303-05-50.

## Правила математического боя

Матбой — это соревнование двух команд (обычно по 6—8 человек) в решении нестандартных задач, подобранных жюри, в умении представлять решения у доски и в умении проверять чужие решения.

Команды получают одинаковые задачи (обычно 10 штук) и решают их в разных помещениях заданное время (обычно 2—4 часа), потом собираются вместе для проверки решений. Таким образом, матбой состоит из двух частей: решения задач и собственно боя.

Чтобы определить, кто какую задачу будет докладывать, команды делают «вызовы»: одна называет номер задачи, решение которой она хочет услышать, а другая сообщает, принят ли вызов. Обычно команды вызывают друг друга по очереди.

Если вызванная команда хочет отвечать, то она выставляет докладчика, а другая команда — оппонента для проверки решения. Команды могут брать полуминутные перерывы для помощи докладчику или оппоненту.

Если решение задачи принято жюри, то переходят к обсуждению другой задачи, а если не принято, то см. «перемена ролей» и «корректность вызова».

Если вызванная команда отказалась отвечать, то вызывавшая команда должна сама представить решение задачи. При этом если оппонент докажет, что у докладчика нет решения, то вызов считается некорректным. Тогда вызывавшая команда должна повторить вызов.

Команда может отказаться делать очередной вызов (если у нее не осталось решенных задач и она не хочет делать некорректный вызов). Тогда другая команда получает право рассказать решения любых задач, оставшихся неразобранными.

После каждого выступления жюри дает командам очки как за доклад, так и за оппонирование.

### Решение задач

Во время решения задач (1-я часть матбоя) представитель жюри регулярно посещает команды и отвечает на вопросы по условиям задач. При этом каждое уточнение условий, данное одной команде, сразу же должно сообщаться и другой команде.

Жюри не должно давать информации о степени трудности задач. В процессе решения задач и во время боя команды не должны общаться и получать информацию о количестве решённых соперниками задач. Жюри также не должно знать, сколько задач решено командами.

## Ход боя

Когда время на решение задач истекло, команды и жюри собираются вместе. Бой должен проходить в комнате с доской достаточного размера как для записи решений, так и для ведения протокола. Жюри обычно занимает место по центру комнаты — перед доской, команды — по краям. При этом каждая команда обычно садится вокруг нескольких приставленных друг к другу столов, чтобы иметь возможность обсуждать между собой рассказываемое у доски решение.

Существуют ограничения на общение участников (например, оппонент может общаться только с докладчиком и жюри, а капитан — только со своей командой и с жюри). Как правило, каждый участник может выходить к доске не более двух раз (не считая конкурса капитанов). Это число может быть изменено перед боем по решению жюри.

## Конкурс капитанов

Перед началом обсуждения необходимо определить, какая команда первой будет делать вызов. Для этого проводится Конкурс капитанов. Капитаны выходят к доске и получают достаточно простую задачу на сообразительность, в которой требуется дать только ответ.

Конкурс кончается, когда один из капитанов даст ответ. Если ответ верен, то капитан победил, а если неверен, то победил другой капитан.

Если в течение нескольких минут ни один из капитанов не выразил желание отвечать, следует поменять задачу на более простую.

Капитан, победивший в конкурсе, сообщает, какая команда сделает первый вызов.

## Вызов

Капитан вызывающей команды сообщает номер задачи, решение которой команда хочет услышать, а другая команда отвечает, принят ли вызов. На выбор задачи вызывающая команда имеет полминуты. На решение о том, принимается ли вызов, вызываемая команда также имеет полминуты.

Если вызванная команда хочет отвечать, то она сообщает, что вызов принят, и выставляет докладчика, а вызывавшая команда — оппонента для проверки решения.

Если вызванная команда отказалась отвечать, то вызывавшая команда должна сама предъявить решение (выставить докладчика, а другая команда — оппонента). В этом случае говорят, что происходит проверка корректности вызова (см. «корректность вызова»).

## Докладчик и оппонент

В идеале: сначала докладчик представляет решение, затем оппонент задает вопросы, после чего оппонент сообщает свое мнение о решении (например, «решение не принимается, т.к. такой-то факт не доказан, а на такой-то вопрос не получено удовлетворительного ответа»). И только после этого свои вопросы докладчику задает жюри.

В процессе доклада оппонент и жюри стремятся не прерывать докладчика и пользуются лишь выражениями типа: «это очевидно, можно не доказывать», «повторите, пожалуйста, этот момент».

Докладчик может не отвечать на вопросы оппонента во время доклада, но по требованию оппонента или жюри должен дать план решения, т.е. устно коротко рассказать ход решения и указать ответ.

Оппонент не должен требовать доказательства утверждений из школьной программы или круга «известных» фактов. В спорных случаях вопрос решает жюри.

Время на обдумывание вопросов у доски — 1 минута (оппоненту — чтобы задать очередной вопрос, докладчику — чтобы ответить). Также, если докладчик «застопорился» при рассказе решения, ему даётся 1 минута для продолжения (обычно не более одного раза за доклад).

Команды могут помогать докладчику и оппоненту только во время полуминутного перерыва (соперники тоже пользуются этой минутой). Во время своего полуминутного перерыва можно заменить докладчика или оппонента (при этом засчитывается выход к доске).

Если за минуту, данную на обдумывание вопроса, который жюри считает существенным, докладчик не подготовил ответ и команда не взяла полуминутный перерыв, то считается, что в решении есть пробел («дырка»).

## Полуминутные перерывы

Каждая команда получает на весь матч заранее оговоренное количество (обычно 6) перерывов (тайм-аутов) по 30 секунд. Команда может взять перерыв в любое время при докладе или оппонировании. Во время перерыва докладчик и оппонент подходят к своим командам, а сразу после окончания перерыва по сигналу жюри обязаны немедленно вернуться к доске.

Взявшая перерыв команда не вправе сокращать его длительность — время тайм-аута общее. Можно брать несколько тайм-аутов при обсуждении одной задачи.

Взять тайм-аут может только капитан (если капитан находится у доски, тайм-аут берёт заместитель капитана). Докладчик или оппонент может попросить своего капитана взять тайм-аут. При этом решение о том, брать или не брать тайм-аут, остаётся за капитаном.

### **Перемена ролей**

Если в решении имеются «дырки», обнаруженные оппонентом, то, после того как жюри задаст докладчику свои вопросы, вызывавшая команда получает право (но не обязана) «залатать» эти «дырки» (но она не имеет права «залатывать» дыры, найденные не оппонентом, а жюри; тем более, она не имеет права рассказывать свое решение). Происходит перемена ролей — теперь докладчик становится оппонентом, а оппонент — докладчиком. При этом «новый оппонент» (бывший докладчик) может получить очки за оппонирование, но повторной перемены ролей произойти не может.

Только в том случае, когда оппонент смог доказать, что у докладчика полностью отсутствует решение (и жюри согласно с этим), т.е. что имеется «дырка» размером в полное решение, вызывавшая команда получает право представить свое решение — происходит перемена ролей.

Если оппонент не нашел пробелов и его команда не взяла полуминутный перерыв, то он и его команда в обсуждении задачи больше не участвуют.

Во время перемены ролей можно заменить бывших докладчика или оппонента (при этом засчитывается выход к доске).

При проверке корректности перемена ролей никогда не происходит, даже если оппонент может доработать представленное решение или у него появится своё.

### **Корректность вызова**

Если вызов принят, то вопрос о его корректности не ставится (иногда говорят: «принятый вызов всегда корректен»).

Если вызов не принят, то вызывавшая команда должна сама представить решение, и здесь возможны два случая:

1) вызывавшая команда не стала отвечать. Тогда вызов «автоматически» считается некорректным;

2) вызывавшая команда выставила докладчика. Тогда происходит обычное обсуждение задачи докладчиком (от вызывавшей команды) и оппонентом (от вызванной) со следующими особенностями: а) перемена ролей произойти не может, так как вызванная команда уже отказалась

представлять решение; б) решающее значение имеет ответ оппонента на традиционный вопрос жюри «принимается ли решение?». Если решение не принимается, то оппонент должен строго обосновать свои претензии к решению. Если претензии необоснованны (в том числе когда «дырки» есть, но оппонент не в состоянии указать на них), то ситуация трактуется так же, как если бы оппонент согласился с решением.

Вызов признается некорректным в двух случаях:

1) вызывавшая команда не стала отвечать;

2) вызывавшая команда выставила докладчика, но представила менее половины решения (т.е. не более чем на 6 баллов), и при этом оппонент не принял решения и смог это обосновать (если оппонент принял решение, не разглядев в нем «липу», то вызов считается корректным).

При некорректном вызове оппонент получает 6 очков, а вызывавшая команда — до 6 очков за верные идеи и должна повторить вызов.

### **Отказ делать вызов**

Если у команды не осталось решенных задач, то она может отказываться делать вызов (чтобы избежать некорректного вызова). Тогда другая команда получает право представить все оставшиеся у нее решения.

После отказа от вызова команда до конца боя теряет право представлять решения задач и становится «вечным оппонентом», то есть может получать очки только за оппонирование.

### **Начисление очков**

Каждая задача стоит 12 очков (чтобы не сообщать степень трудности задач). Эти очки распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри (жюри достается остаток от 12 очков).

Очки даются как за положительный вклад в решение задачи, так и за нахождение ошибок и пробелов в решении. За чистое решение задачи дается 12 очков, а за «полное» оппонирование — 6 очков (если оппонент показал, что у докладчика совсем нет положительных результатов).

Сначала жюри определяет стоимость (в очках) представленной докладчиком части (он и получает эти очки) и стоимость каждой «дырки» в решении. За каждую найденную «дырку» оппонент получает половину стоимости этой «дырки» (если «дырку» нашло жюри, то оно и получает очки). Вторую половину стоимости этой «дырки» получит тот, кто ее «залагает» — докладчик (если ответит на вопрос оппонента), оппонент (при



перемене ролей) или жюри (если никто «дырку» не закроет). При перемене ролей для подсчета очков применяют те же самые рассуждения.

Если оппонент указал на «дырку» после окончания доклада, то он получает баллы за её нахождение независимо от того, может ли докладчик её закрыть. Если оппонент указал на «дырку» во время доклада, то он получает баллы за её нахождение только в случае, если докладчик не может её закрыть.

### Пример

Докладчик представил решение. Оппонент нашел дырку-1. Жюри задало вопросы докладчику и нашло еще две дырки: дырку-2 и дырку-3, причем дырку-2 докладчик «залатал» у доски.

Жюри разделило очки так: рассказанная часть — 2 очка, дырка-1 — 6 очков, дырка-2 — 2 очка, дырка-3 — 2 очка.

Оппонент получил право рассказывать дырку-1 — т.е. произошла перемена ролей (стоит эта дырка 6 очков, 3 из которых уже получил оппонент; значит, сейчас разыгрывается 3 очка). При этом «новый оппонент» (бывший докладчик) нашел в его рассказе дырку-4.

Жюри оценило так: рассказанная часть — 1 очко (из 3-х), дырка-4 — 2 очка (из 3-х). Общий счет:

Докладчик: 2 (рассказанная часть) + 1 (половина стоимости дырки-2 — т.к. он ее «залатал» у доски) + 1 (половина стоимости дырки-4 — т.к. он ее нашел, находясь в роли оппонента) = 4 очка. Оппонент: 3 (половина стоимости дырки-1) + 1 (рассказанная им часть при перемене ролей) = 4 очка. Жюри: оставшиеся 4 очка.

Жюри дает очки гласно, т.е. объясняет, за что они даны или сняты.

Жюри может оштрафовать команду на очко за шум, за незтичное поведение (после предупреждения). За подсказку штраф может быть больше, при этом возможно прекращение дискуссии по задаче и удаление подсказавшего.

### Итоги

После каждого вызова жюри сообщает, поясняет и записывает, сколько очков получила каждая команда. Жюри ведет протокол матча в виде таблицы, в которой указываются: фамилии выступающих, номер обсуждаемой задачи, направление вызова, взятые минутные перерывы и количество очков, полученных командами и оставшихся у жюри. На доске рисуется упрощенная таблица, без указания фамилий.

После боя очки у каждой команды и у жюри суммируются (количество очков, оставшихся у жюри, характеризует трудность задач и силу команд).

Если разность очков команд не превышает трех, то засчитывается ничья.

Если остается время, то жюри объясняет решения нерешенных во время матбоя задач или показывает более удачные решения.

### Статус жюри

Жюри является верховным толкователем правил матбоя. Если ситуация правилами не предусмотрена, жюри принимает решение по своему усмотрению. Решение жюри является обязательным для команд.

Жюри может снять вопрос оппонента (если вопрос не по существу), прекратить доклад или оппонирование (если дискуссия затягивается). Во всех подобных случаях жюри обосновывает свое решение.

Всякие соображения по уже разобранным задачам жюри рассматривает после боя. Задним числом счет изменять нельзя.

### Статус ведущего

Ведущий (один из членов жюри) обязан следить за порядком обсуждения, в частности:

- предоставлять слово докладчику;
- объявлять о завершении доклада и переходе к обсуждению;
- объявлять начало и конец минутного перерыва, взятого командой;
- фиксировать вопросы оппонента и ответы на них докладчика (например, спрашивая оппонента: «Вы удовлетворены ответом?» и т.д.);
- фиксировать мнение оппонента о докладе («Решение принимается?» или — если решение не принимается — «С чем вы не согласны в решении?»);
- объявлять о завершении обсуждения и переходе к вопросам жюри докладчику;
- не позволять оппонентам перебивать докладчика;
- не позволять обсуждению выходить за рамки научной дискуссии;
- объявлять распределение очков за решение задачи, поясняя, за что они даны или сняты.

### Статус капитана

Капитан отвечает перед командой за организацию решения задач, подготовку докладчиков и оппонентов, тактику ведения боя.

Капитан является представителем команды по всем оргвопросам: только он делает вызов, берет полуминутный перерыв, общается с жюри и т.п. (если капитан выходит к доске, то он оставляет заместителя).

Капитан заранее определяет, кто будет докладчиком и кто — оппонентом по каждой задаче, решает, взять или отдать первый вызов.

Если капитан находится у доски (докладывает или оппонирует), то все его функции выполняет заместитель капитана. Кто в команде является капитаном, а кто — заместителем, команда сообщает перед началом боя (после окончания времени, отведённого на решение задач).

### Памятка жюри

1. Жюри должно знать решения всех задач.

2. Жюри должно помнить, что своими вопросами оно помогает докладчику доработать решение у доски, а вмешиваясь в диалог, «ест хлеб» оппонента.

3. Если жюри (после вопросов оппонента) видит пробел в решении, то оно должно проверить, может ли докладчик его закрыть.

4. Сначала обсуждаются оргвыводы (наличие решения, достаточность оппонирования и т.д.), затем обсуждаются очки.

5. Если докладчик несет полную чушь, то лучше всего попросить предъявить план решения — у «лапши» не бывает плана. Но это надо делать после вопросов оппонента — см. пункт 2 этой памятки.

6. Желательно в течение боя в аналогичных ситуациях принимать аналогичные решения (правило прецедента).

7. Баллы докладчику начисляются за продвижение в решении задачи. Докладчик не получает баллов за доказательство или формулировку общеизвестных фактов. Также докладчик не получает баллов за верные утверждения (пусть и доказанные), не приводящие к продвижению в решении задачи.

8. Оппонент получает баллы за найденные в решении пробелы либо за закрывание этих пробелов (после того, как эти пробелы не смог закрыть сам докладчик). Оппонент не получает баллы просто за то, что что-то спросил или за вопросы, не выявившие «дырки» в представленном решении.

9. Следует снимать «универсальные» претензии и вопросы оппонента, применимые к любой задаче («Почему это решение правильное?», «Докажите, что доказательство было правильное», «Не изменится ли решение, если какие-нибудь точки будут расположены по-другому?» и т.п.).

### Договорные условия

(могут изменяться жюри с уведомлением капитанов перед началом решения задач)

1. Предельное число выходов к доске одного человека — 2 (не считая конкурса капитанов).

2. Число полуминутных перерывов — 6 для каждой команды.

3. Примерное время на доклад (после которого жюри решает, дать еще время или передать слово оппоненту) — 10 минут (без учета времени ответов на вопросы оппонента).

4. Примерное время на дискуссию — 7 минут (без учета времени на представление решения докладчиком).

5. Максимальная разница очков по итогам боя, при которой засчитывается ничья — 3.

6. Можно ли пользоваться литературой и калькуляторами во время решения задач — Да (но при рассказе решения команда не может ссылаться на расчёты, проведённые с помощью калькулятора, или отказаться доказывать некое утверждение, ссылаясь на книгу).

7. Можно ли выходить к доске с записанным решением — Нет (но с согласия жюри можно выйти с чертежом к геометрической задаче или с записью сложных алгебраических выкладок).

### Памятка командам

#### Решение задач

1. Капитаном следует назначать участника, лучше всего справляющегося с решением задач. Обычно такой участник известен заранее, и именно он руководит процессом решения задач до начала боя. Окончательное решение о том, кто является капитаном, команда сообщает непосредственно перед началом боя (после окончания решения задач).

2. После получения списка задач следует распределить их между членами команды для решения. На первом этапе (пока никто ничего не решил) не следует решать одну и ту же задачу разным людям — задач хватает. При этом капитану следует взяться за одну из наиболее сложных задач, а простые задачи отдать более слабым участникам.

3. Когда часть задач уже решены, несколько человек будут решать одну задачу. При этом полезно бывает делиться друг с другом продвижениями в решении — так дело пойдёт быстрее.

4. После того, как одна из задач решена, решивший её должен рассказать её решение двум другим членам своей команды (желательно последовательно, а не сразу двоим), причём один из этих двоих обязательно

должен быть капитаном. Проверяющие решение должны проверить его правильность и перебрать вопросы, которые во время боя оппонент может задать по данному решению.

5. Ближе к концу времени, отведённому для решения задач, капитан должен распределить задачи между членами команды. Не следует забывать, что у каждого только 2 выхода к доске, поэтому каждый может быть ответственным не более чем за две задачи. Если случилось так, что кто-то решил более двух задач, то часть из них следует передать другому участнику, предварительно рассказав ему решение. При этом новый ответственный за задачу должен сам уметь рассказать решение (см. пункт 4). Нерешённые задачи также должны быть распределены: участники должны быть заранее готовы к оппонированию.

### **Во время боя**

1. Докладчик и оппонент должны общаться друг с другом вежливо и корректно. Критикуя доклад, не следует критиковать докладчика.

2. Все члены команды, не находящиеся у доски, должны внимательно следить за рассказом решения. Причём здесь не важно, происходит доклад или оппонирование. Если команда заметит ошибку в своём или чужом решении, капитан может взять тайм-аут для помощи своему докладчику или оппоненту.

3. При оппонировании все существенные замечания по решению следует делать после окончания доклада. Так можно заработать больше баллов за нахождение «дырок».

4. Все члены команды, не находящиеся у доски, должны соблюдать тишину и дисциплину. Не разрешается кричать или покидать своё место без разрешения жюри. Всё общение команды с жюри или противником происходит через капитана.

### **Тактика боя**

1. Обычно рассказывать решение выгоднее, чем оппонировать. Поэтому в случае выигрыша в конкурсе капитанов следует отдать право вызова противнику (исключения бывают при применении более сложной тактики, доступной опытным игрокам).

2. Если необходимо произвести вызов, то вызывать обычно следует на наиболее сложную задачу из решённых. Вызывать на нерешённые задачи обычно не стоит, так как противник сможет «бесплатно» получить баллы на проверке корректности.

## § 1. Алгебра. Простые варианты

### Вариант № 1

1. Найдите значение выражения  $\operatorname{ctg}(-\alpha) - 6 \operatorname{ctg}(7\pi - \alpha)$ , если  $\operatorname{ctg} \alpha = 17$ .
2. Найдите значение выражения  $\frac{17 \cdot \cos 17^\circ}{\cos 343^\circ}$ .
3. На рисунке 1 изображён график функции  $f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

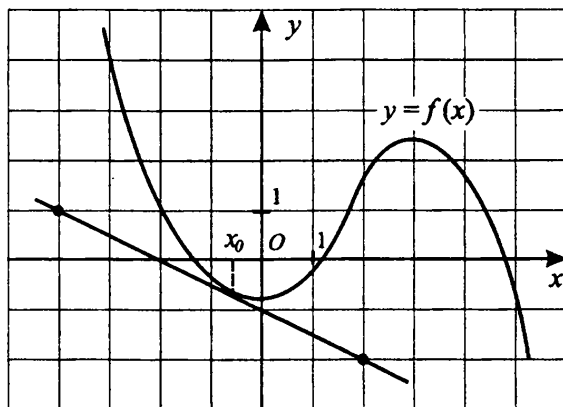


Рис. 1

4. Функция  $f(x)$  определена на интервале  $(-7; 8)$ . На рисунке 2 изображён график её производной. Найдите суммарную длину всех промежутков, на которых функция  $f(x)$  постоянна (внутри каждого отдельно взятого промежутка).

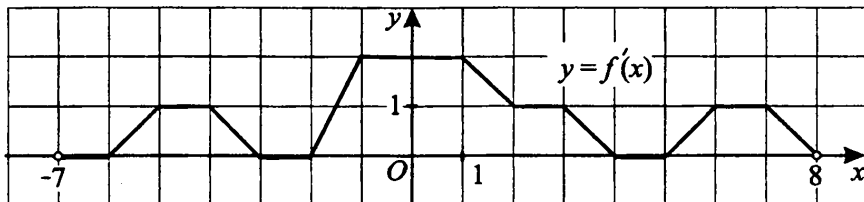


Рис. 2

5. На рисунке 3 изображён график производной функции  $f(x)$ . Определите количество точек экстремума функции  $f(x)$  на интервале  $(-5; 5)$

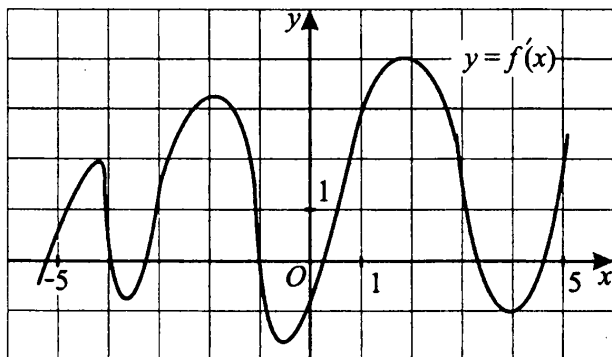


Рис. 3

6. Моторная лодка прошла против течения реки 336 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 1,5 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

7. В сосуд, содержащий 20 литров 15-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

8. На изготовление одного и того же количества деталей одному рабочему требуется 306 часов, а другому — 272. За сколько часов они могут выполнить этот объём работы, работая вместе?

9. а) Решите уравнение  $\frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{\cos x} = 0$ .

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

10. Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} \log_{x^2-2x+1}(x^2+1) \leq 1, \\ \frac{9 \cdot 3^{13-x^2} - 9^x}{x^4 - 81} \leq 0. \end{cases}$$

## Вариант № 2

1. Найдите значение выражения  $\frac{54 \cdot \sin 103^\circ \cdot \cos 103^\circ}{\sin 206^\circ}$ .
2. Найдите значение выражения  $\frac{6 \cdot \operatorname{ctg} 167^\circ}{\operatorname{ctg} 13^\circ}$ .
3. На рисунке 4 изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

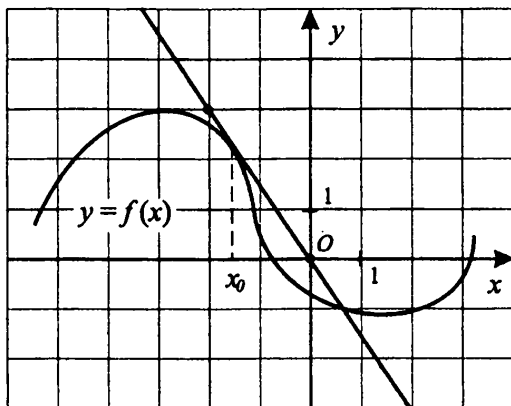


Рис. 4

4. Функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[-9; 9]$ . На рисунке 5 изображён график производной функции  $f(x)$  на интервале  $(-9; 9)$ . Определите промежутки возрастания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.
5. Две прямые, каждая из которых параллельна прямой  $y = kx$ , являются касательными к графикам функций  $f(x) = 3x^2 + 16x$  и  $g(x) = 7x^2 - 56x + 15$  соответственно в одной и той же точке  $x_0$ . Найдите  $k$ .
6. Сухогруз прошёл по течению реки 220 км, а затем 720 км по озеру. Определите скорость течения реки (в км/ч), если весь путь занял 46 ч и по озеру сухогруз двигался на 26 ч дольше, чем по реке.
7. Первая бригада строителей может построить два здания по одному проекту на 1,4 месяца быстрее, чем вторая три таких же здания, а одно такое здание первая бригада строит на 4 месяца дольше, чем вторая. За сколько месяцев первая бригада может построить одно такое здание?



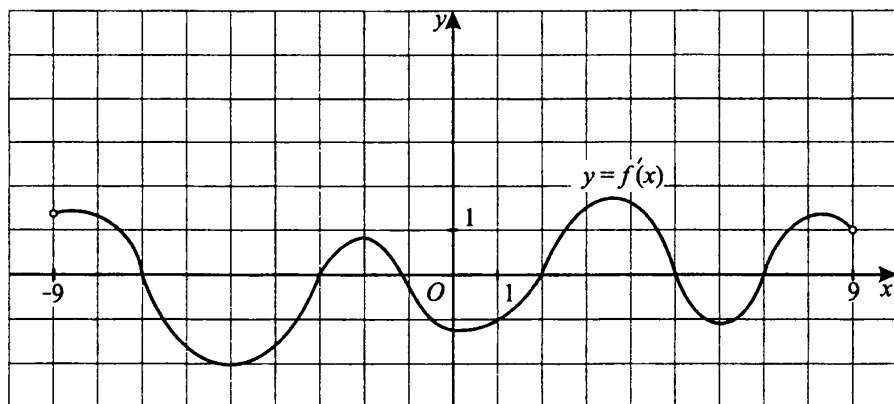


Рис. 5

8. Первый компьютер способен выполнить некоторый расчёт за определённое время, а второй этот же расчёт выполняет на 4 часа дольше. Работая вместе, они выполнили расчёт за 4,8 часа, при этом затраты на обмен данными были пренебрежительно малы. За сколько часов этот расчёт выполнил бы первый компьютер, работая самостоятельно?

9. а) Решите уравнение 
$$\frac{\sin^4 x - \frac{1}{12} \cos^2 x}{2 \sin x - 1} = 0.$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$ .

10. Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} \log_{5x-2x^2-1}(x+1) > 0, \\ 4^{x-1} \cdot 5^{2x} - \frac{15^x}{3^{x-1}} \cdot 2^{x+1} \geq -35. \end{cases}$$

## § 2. Алгебра. Сложные варианты

## Вариант № 1

1. Найдите наименьший положительный корень уравнения  $\cos^2 \frac{\pi x}{6} = \frac{3}{4}$ .
2. На рисунке 6 изображён график функции  $f(x)$  и касательная к нему в точке  $x_0$ . Определите значение производной функции  $f(x)$  в этой точке.

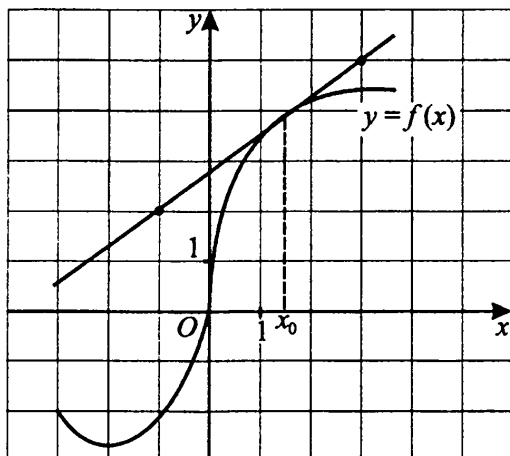


Рис. 6

3. Первая бригада способна выполнить заказ за 6 рабочих дней. Сначала вторая бригада выполнила половину заказа, после чего первая сделала  $\frac{2}{3}$  оставшейся работы, а затем к выполнению заказа вернулась вторая. При этом заказ был выполнен за 5 рабочих дней. За сколько дней вторая бригада могла бы выполнить этот заказ самостоятельно?
4. Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 594 литра она заполняет на 5 минут дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 616 литров?
5. Решите уравнение  $\frac{\sin^2 2x - \sin 2x}{\sqrt{x(3\pi - 2x)}} = 0$ .

6. а) Решите уравнение  $16^{2\cos^2 x} - \frac{11}{8} \cdot 16^{2-\sin^2 x} + 40 = 0$ .

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

7. Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} \left(\frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - x + 1}\right)^{5x^2 + x} > 1, \\ 9^{x-1} \cdot 7^{2x} - \frac{14^x}{2^{x+1}} \cdot 3^{x-1} \leq -\frac{1}{18}. \end{cases}$$

8. Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} \log_{x-3}^2 x + 16 \log_x^2 (x-3) \leq 8, \\ 3 \cdot 2^{\log_6 x} + 4 \cdot 3^{\log_6 x} \geq x + 12. \end{cases}$$

9. Найдите все положительные значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $a^{a^x} = x$  имеет единственное решение.

10. Найдите все значения параметра  $b$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} b(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 1) = y + 2 - x^2, \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

## § 3. Геометрия. Простые варианты

## Вариант № 1

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 7). Найдите его площадь (в см<sup>2</sup>).

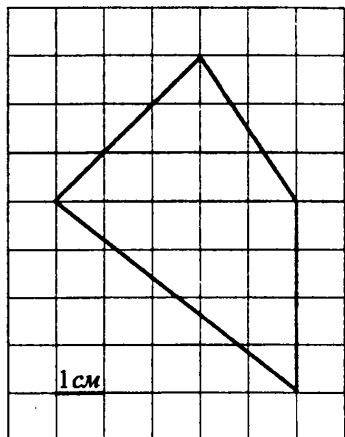


Рис. 7.

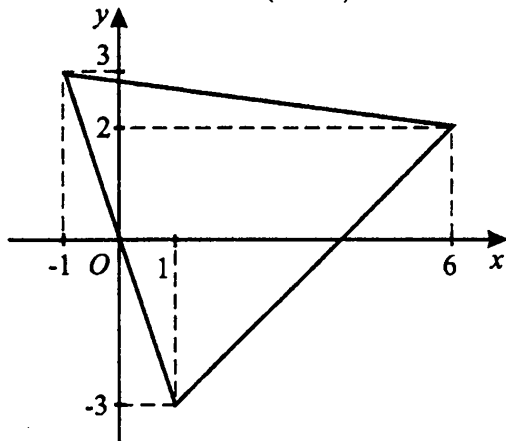


Рис. 8.

2. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты  $(-1; 3)$ ,  $(1; -3)$ ,  $(6; 2)$  (см. рис. 8).
3. Куб и пирамида имеют общее основание (см. рис. 9), высота пирамиды равна ребру куба и равна 3. Найдите объём пирамиды.

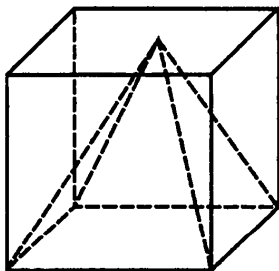


Рис. 9.

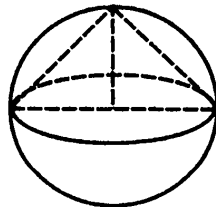


Рис. 10.

4. Найдите площадь поверхности сферы, если площадь боковой поверхности конуса, вписанного в сферу, с основанием, совпадающим с сечением сферы, проходящим через её центр (см. рис. 10), равна  $6\sqrt{2}$ .
5. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 90 см. На какой высоте будет находиться

уровень воды, если её перелить в другой сосуд такой же формы, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в см.

6. Найдите угол  $BA_1D$  многогранника, изображённого на рисунке 11. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

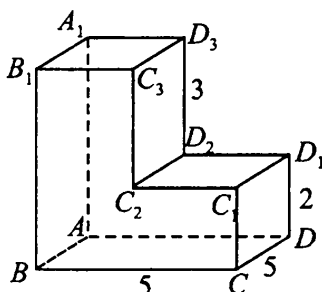


Рис. 11

7. В правильной четырёхугольной пирамиде  $NABCD$  точка  $O$  — центр основания,  $N$  — вершина,  $NO = 15$ ,  $NA = 17$ . Найдите длину отрезка  $BD$ .

8. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  точки  $K$  и  $F$  — середины рёбер  $SB$  и  $SC$  соответственно. Сторона основания пирамиды равна  $2\sqrt{3}$ , боковое ребро равно  $\sqrt{79}$ . Найдите угол между плоскостью  $AKF$  и плоскостью основания пирамиды.

9. Диагональ развёртки боковой поверхности цилиндра составляет со стороной основания развёртки угол  $30^\circ$ . Найдите угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания.

10. Площадь треугольника  $ABC$  равна 48. На сторонах  $AC$ ,  $BC$  и прямой  $AB$  взяты точки  $M$ ,  $L$  и  $K$  соответственно так, что

$$\frac{MC}{AM} = \frac{BL}{LC} = \frac{AK}{BK} = 3. \text{ Найдите площадь треугольника } KLM.$$

## Вариант № 2

1. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты  $(-4; 2)$ ,  $(-1; -2)$ ,  $(1; -2)$ ,  $(6; 2)$  (см. рис. 12).

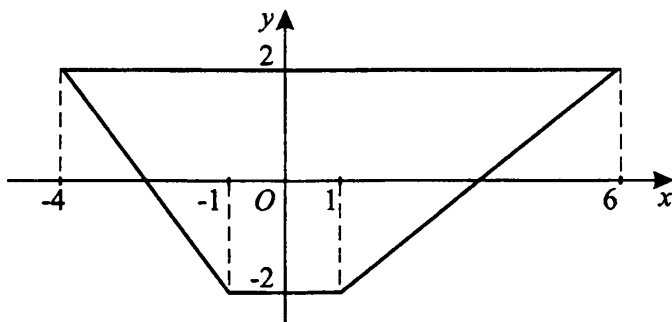


Рис. 12

2. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см  $\times$  1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 13). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

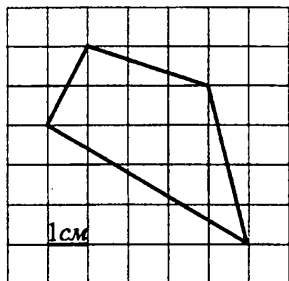


Рис. 13.

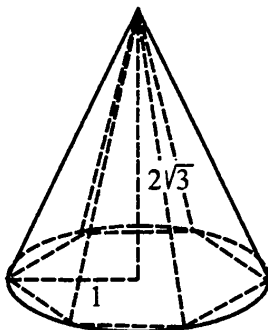


Рис. 14.

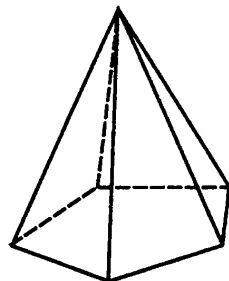


Рис. 15.

3. Правильная шестиугольная пирамида вписана в конус (см. рис. 14), радиус основания которого равен 1. Найдите объём пирамиды, если высота конуса совпадает с высотой пирамиды и равна  $2\sqrt{3}$ .
4. Стороны основания правильной пятиугольной пирамиды равны 12, боковые рёбра равны 10 (см. рис. 15). Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.
5. Если каждое ребро куба увеличить на 3, то его площадь поверхности увеличится на 126. Найдите ребро куба.

6. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известно, что  $CA_1 = 9$ ,  $CD = 6$ ,  $AD = 3$ . Найдите длину ребра  $BB_1$ .

7. Высота конуса равна 12, а диаметр основания — 10. Найдите образующую конуса.

8. В правильном октаэдре  $EAB C D F$  (вершины  $E$  и  $F$  не смежны) проведено сечение  $KEHF$ , площадь которого равна  $4\sqrt{10}$ . Найдите ребро октаэдра, если точки  $K$  и  $H$  принадлежат рёбрам  $AB$  и  $CD$  соответственно и  $\frac{AK}{KB} = \frac{CH}{HD} = \frac{1}{3}$ .

9.  $ABCA_1 B_1 C_1$  — прямая треугольная призма, основание которой — равнобедренный треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 18$ ,  $AC = BC = 15$ . Точка  $L$  лежит на ребре  $A_1 C_1$  так, что  $A_1 L : LC_1 = 2 : 1$ . Высота призмы  $AA_1 = 8$ . Найдите тангенс угла между плоскостью, проходящей через середины рёбер  $AA_1$ ,  $BB_1$  и точку  $L$ , и плоскостью основания призмы.

10. В окружность радиуса 5 вписан прямоугольный треугольник с меньшим углом, равным  $30^\circ$ . Равный ему треугольник пересекается с ним только по гипотенузе. В фигуру, ограниченную катетами этих двух треугольников, вписана окружность так, что она касается максимально возможного количества её сторон. Найдите значения, которые принимает радиус данной окружности.

## § 4. Геометрия. Сложные варианты

## Вариант № 1

1. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с клетками размером  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$  (см. рис. 16). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

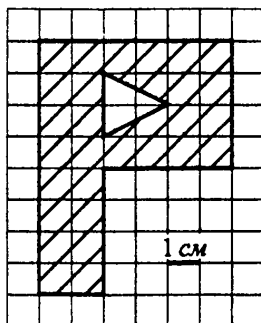


Рис. 16

2. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  диагональ  $AC_1$  образует с ребром  $AA_1$  угол  $45^\circ$ . Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, если  $AB = 6$ ,  $BC = 8$ .
3. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 17 (все двугранные углы прямые).

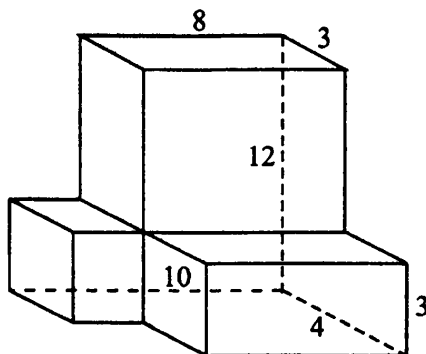


Рис. 17



4. Найдите косинус угла  $CAD_2$  многогранника, изображённого на рисунке 18. Все двугранные углы многогранника прямые.

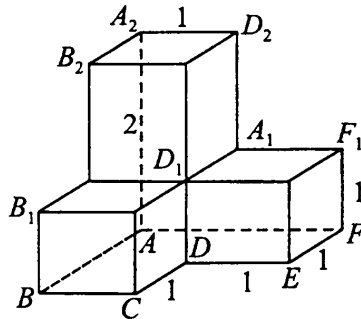


Рис. 18

5. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  высота пирамиды равна диагонали  $AC$ . Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

6. В правильной треугольной пирамиде  $ABCD$  боковое ребро в 1,5 раза длиннее, чем сторона основания  $ABC$ . Точки  $K$  и  $M$  делят пополам рёбра  $AD$  и  $CD$  соответственно. Найдите синус угла между плоскостями  $ACD$  и  $BKM$ .

7. В конус вписан шар радиуса 6. Через центр шара параллельно плоскости основания конуса проведена плоскость, отсекающая конус объёмом в 3,375 раза меньше объёма исходного конуса. Найдите образующую меньшего конуса.

8. В трапецию  $ABCD$ , боковые стороны которой равны 5,8 и 4,2, вписана окружность. Прямая, пересекающая боковые стороны трапеции в точках  $M$  и  $N$ , делит её на две трапеции, площади которых относятся как 2 : 3. Найдите длину большего основания исходной трапеции, если  $MN = 6$ .

9. В параллелограмме  $ABCD$  острый угол равен  $30^\circ$ . Найдите диагональ  $AC$ , если  $AB = 4\sqrt{3}$ ,  $S_{ABCD} = 20\sqrt{3}$ .

10. В равнобедренной трапеции  $ABCD$  тангенс острого угла при основании равен  $\frac{3}{4}$ , высота  $h = 3$ , диагональ является биссектрисой острого угла трапеции. Точка  $K$  расположена так, что треугольник  $BSK$  — равнобедренный ( $BC$  — меньшее основание трапеции), причём отношение боковой стороны этого треугольника к его основанию равно 3 : 2. Найдите расстояние от точки  $K$  до большего основания трапеции.

# Ответы

## §1. Алгебра. Простые варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вар. 1	85	17	-0,5	3	6	30	12	144	$a) (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; 6) \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$	$(-\infty; -5] \cup (-3; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$
Вар. 2	27	-6	-1,5	3	70	2	13,4	8	$a) (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; 6) -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}$	$(\frac{1}{2}; 1) \cup (\lg 14; 2)$

## §2. Алгебра. Сложные варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вар. 1	1	0,75	4,5	18	$\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{5\pi}{4}$	$a) \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$ $6) \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$	$[-\log_{21} 2; -\frac{1}{5})$	нет решений	$(0; 1] \cup \{e^{1/e}\}$	3

## §3. Геометрия. Простые варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вар. 1	17,5	20	9	24	10	60	16	$60^\circ$	$\arctg \frac{\pi}{\sqrt{3}}$	21; 39
Вар. 2	24	12	3	240	2	6	13	4	0,5	$2,5; 2,5(3 - \sqrt{3})$

## §4. Геометрия. Сложные варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вар. 1	30	480	358	0,2	$60^\circ$	$\frac{\sqrt{46}}{8}$	$8\sqrt{3}$	$6 + 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}$	$2\sqrt{67}; 2\sqrt{7}$	$5\sqrt{2} \pm 3; \frac{20\sqrt{2}}{9} \pm 3$

## Решение варианта №1. Алгебра. Простые варианты

1.  $\operatorname{ctg}(-\alpha) - 6 \operatorname{ctg}(7\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha + 6 \operatorname{ctg} \alpha = 5 \operatorname{ctg} \alpha = 5 \cdot 17 = 85.$

Ответ: 85.

2.  $\frac{17 \cos 17^\circ}{\cos(360^\circ - 17^\circ)} = 17.$

Ответ: 17.

3.  $f'(x_0) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 1}{2 - (-4)} = -\frac{3}{6} = -0,5.$

Ответ: -0,5.

4.  $f(x)$  постоянна на промежутках, где  $f'(x) = 0$ . Суммарная длина  $1 + 1 + 1 = 3.$

Ответ: 3.

5. В точках экстремума  $f'(x)$  меняет знак. Таких точек 6.

Ответ: 6.

6. Пусть скорость лодки в неподвижной воде  $x$  км/ч.

$$\frac{336}{x-2} - \frac{336}{x+2} = 1,5, \quad 336(x+2) - 336(x-2) = 1,5(x^2-4), \quad x^2-4 = 896, \\ x = 30.$$

Ответ: 30.

7. В растворе  $20 \cdot 0,15 = 3$  л вещества. Стало раствора  $(20 + 5)$  л. Тогда концентрация стала равна  $3 : 25 \cdot 100\% = 12\%.$

Ответ: 12.

8. Примем объём работы за единицу. Производительность первого рабочего  $\frac{1}{306}$ , а второго —  $\frac{1}{272}$ , совместной работы

$$\frac{1}{306} + \frac{1}{272} = \frac{578}{83232} = \frac{1}{144}. \text{ Вместе рабочие выполняют этот объём работы за 144 часа.}$$

Ответ: 144.

9. а)  $\frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{\cos x} = 0; \quad \begin{cases} 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x = 0,5, \\ \sin x = -1; \end{cases} & \sin x = 0,5, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \\ \cos x \neq 0; \end{cases}$$

б)  $x \in \left[ \pi; \frac{7\pi}{2} \right]$  (см. рис. 19).

$$x = \frac{13\pi}{6}; \quad x = \frac{17\pi}{6}.$$

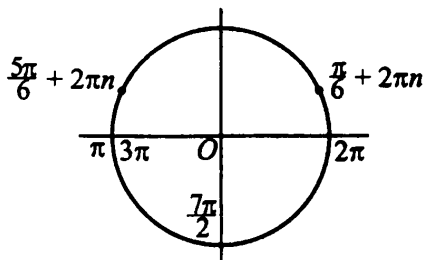


Рис. 19

Ответ: а)  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{13\pi}{6}$ ;  $\frac{17\pi}{6}$ .

$$10. \begin{cases} \log_{x^2-2x+1}(x^2+1) \leq 1, \\ \frac{9 \cdot 3^{13-x^2} - 9^x}{x^4 - 81} \leq 0. \end{cases}$$

$$\log_{x^2-2x+1}(x^2+1) \leq \log_{x^2-2x+1}(x^2-2x+1).$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0, \\ x^2 - 2x + 1 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

$$(x^2 - 2x + 1 - 1)(x^2 + 1 - x^2 + 2x - 1) \leq 0, \\ 2x^2(x - 2) \leq 0, \quad x \in (-\infty; 2] \quad (\text{см. рис. 20}).$$

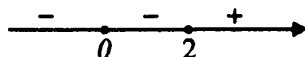


Рис. 20

Учтём ОДЗ:  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$ .

$$\frac{9 \cdot 3^{13-x^2} - 9^x}{x^4 - 81} \leq 0. \quad \text{ОДЗ: } x^4 - 81 \neq 0; \quad x \neq 3, \quad x \neq -3.$$

$$9 \cdot 3^{13-x^2} - 9^x = 0, \quad 3^{15-x^2} = 3^{2x}, \quad x^2 + 2x - 15 = 0; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -5.$$

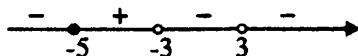


Рис. 21

$x \in (-\infty; -5] \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$  (см. рис. 21).

Найдём решения системы неравенств.

$$x \in (-\infty; -5] \cup (-3; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2).$$

Ответ:  $x \in (-\infty; -5] \cup (-3; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$

## Решение варианта №1. Алгебра. Сложные варианты

1.  $\cos^2 \frac{\pi x}{6} = \frac{3}{4}$ ,  $\cos \frac{\pi x}{6} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\frac{\pi x}{6} = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  
 $x = \pm 1 + 6k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (см. рис. 22).

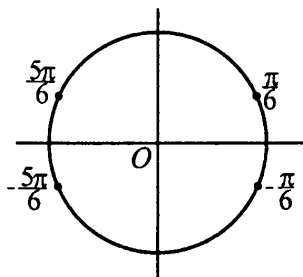


Рис. 22

Наименьший положительный корень  $x = 1$ .

Ответ: 1.

2.  $f'(x_0) = \frac{3}{4} = 0,75$ .

Ответ: 0,75.

3. Скорость первой бригады  $\frac{1}{6}$  заказа в день. Она сделала  $\frac{2}{3}$  от половины работы, то есть  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$  работы за  $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2$  часа.

Вторая бригада выполнила  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$  работы за  $5 - 2 = 3$  часа, её производительность  $\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{9}$  работы в день.

Весь заказ она выполнит за  $1 : \frac{2}{9} = 4,5$  дня.

Ответ: 4,5 дня.

4. Пусть производительность первой трубы  $x$  л/мин, а второй —  $(x + 4)$  л/мин.

$$\frac{594}{x} - \frac{616}{x+4} = 5; 5x^2 + 42x - 2376 = 0, x_1 = 18, x_2 < 0.$$

Первая труба пропускает 18 л в минуту.

Ответ: 18.

$$5. \frac{\sin^2 2x - \sin 2x}{\sqrt{x(3\pi - 2x)}} = 0; \begin{cases} \sin^2 2x - \sin 2x = 0, \\ x(3\pi - 2x) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \sin 2x = 1, \\ 0 < x < \frac{3\pi}{2}; \end{cases} & \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 0 < x < \frac{3\pi}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

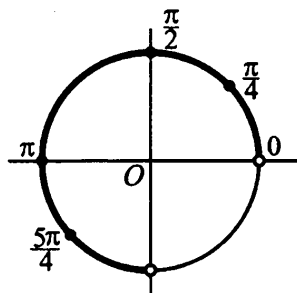


Рис. 23

Найдём решение системы (см. рис. 23).

Решениями являются  $\frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\pi$ ;  $\frac{5\pi}{4}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\pi$ ;  $\frac{5\pi}{4}$ .

$$6. \text{ а) } 16^{2\cos^2 x} - \frac{11}{8} \cdot 16^{2-\sin^2 x} + 40 = 0, \quad 16^{2\cos^2 x} - \frac{11}{8} \cdot 16^{1+\cos^2 x} + 40 = 0,$$

пусть  $16^{\cos^2 x} = t$ , тогда  $t^2 - 22t + 40 = 0$ ,  $t_1 = 20$ ,  $t_2 = 2$ .

$$16^{\cos^2 x} = 2; \cos^2 x = \frac{1}{4}; \cos x = \pm \frac{1}{2}; x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$16^{\cos^2 x} = 20; \cos^2 x = \log_{16} 20 > 1, \text{ корней нет.}$$

$$\text{б) } x \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right], x = \frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3} \text{ (см. рис. 24).}$$

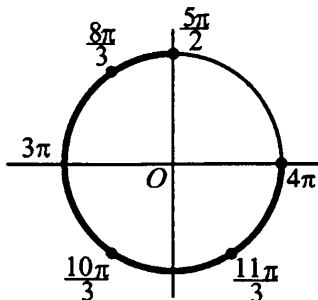


Рис. 24

Ответ: а)  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{8\pi}{3}$ ;  $\frac{10\pi}{3}$ ;  $\frac{11\pi}{3}$ .

7. Решим второе неравенство.

$$9^{x-1} \cdot 7^{2x} - \frac{14^x}{2^{x+1}} \cdot 3^{x-1} \leq -\frac{1}{18}, \quad \frac{1}{9} \cdot 3^{2x} \cdot 7^{2x} - \frac{1}{6} \cdot 7^x \cdot 3^x + \frac{1}{18} \leq 0,$$

$$2 \cdot 21^{2x} - 3 \cdot 21^x + 1 \leq 0, \quad \frac{1}{2} \leq 21^x \leq 1; \quad \log_{21} \frac{1}{2} \leq x \leq 0, \quad x \in [-\log_{21} 2; 0].$$

Решим первое неравенство  $\left(\frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - x + 1}\right)^{5x^2 + x} > 1$ .

$$2x^2 + x + 3 > 0, \quad x^2 - x + 1 > 0 \text{ для всех } x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - x + 1} > 0.$$

$$\log_2 \left(\frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - x + 1}\right)^{5x^2 + x} > \log_2 1, \quad \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - x + 1} = 2 + \frac{3x + 1}{x^2 - x + 1}.$$

Если  $x \in [-\log_{21} 2; 0]$  (из второго неравенства) и  $3x + 1 > 0$  при  $x > -\frac{1}{3}$ , а  $-\log_{21} 2 > -\frac{1}{3}$  (т.к.  $\log_{21} 2^3 < 1$ ), то  $2 + \frac{3x + 1}{x^2 - x + 1} > 2$  для всех решений второго неравенства.

Тогда  $\left(\frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - x + 1}\right)^{5x^2 + x} > 2$  при  $5x^2 + x > 0$ , то есть при  $x < -\frac{1}{5}$ ;  
 $x > 0$ .  $-\log_{21} 2 < -\frac{1}{5}$ , т.к.  $\log_{21} 2^5 > 1$ . Решением системы является  $\left[-\log_{21} 2; -\frac{1}{5}\right)$ .

Ответ:  $\left[-\log_{21} 2; -\frac{1}{5}\right)$ .

$$8. \begin{cases} \log_{x-3}^2 x + 16 \log_x^2 (x-3) \leq 8, \\ 3 \cdot 2^{\log_6 x} + 4 \cdot 3^{\log_6 x} \geq x + 12. \end{cases}$$

Решим второе неравенство  $3 \cdot 2^{\log_6 x} + 4 \cdot 3^{\log_6 x} \geq x + 12$ .  $\log_6 x = t$ ,  $3 \cdot 2^t + 4 \cdot 3^t \geq 6^t + 12$ ,  $(3^t - 3) \cdot (2^t - 4) \leq 0$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $1 \leq \log_6 x \leq 2$ ,  $6 \leq x \leq 36$ .

Решим первое неравенство  $\log_{x-3}^2 x + 16 \cdot \frac{1}{\log_{x-3}^2 x} \leq 8$  на отрезке  $x \in [6; 36]$ .

Пусть  $\log_{x-3} x = t$ , тогда  $t^2 + \frac{16}{t^2} - 8 \leq 0$ ,  $\frac{t^4 - 8t^2 + 16}{t^2} \leq 0$ ;  
 $\frac{(t^2 - 4)^2}{t^2} \leq 0$ .

Так как  $\frac{(t^2 - 4)^2}{t^2} \geq 0$  при любом значении  $t$ , неравенство равносильно уравнению  $\frac{(t^2 - 4)^2}{t^2} = 0$ ;  $t = \pm 2$ .

$$1) \log_{x-3} x = 2, (x-3)^2 = x, x^2 - 7x + 9 = 0,$$

$$x_{12} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2} \notin [6; 36].$$

2)  $\log_{x-3} x = -2$ ,  $(x-3)^{-2} = x$ ,  $x(x-3)^2 = 1$ . Но при  $x \in [6; 36]$  выполняется  $x(x-3)^2 \geq 6 \cdot (6-3)^2 = 54 > 1$ .

Исходная система решений не имеет.

Ответ: решений нет.

9.  $a^{a^x} = x$ ,  $a > 0$ ,  $a^{a^x} > 0$ , тогда  $x > 0$ .

$$\log_a a^{a^x} = \log_a x; \quad a^x = \log_a x.$$

Если  $0 < a < 1$ , то графики имеют вид, как на рисунке 25а.

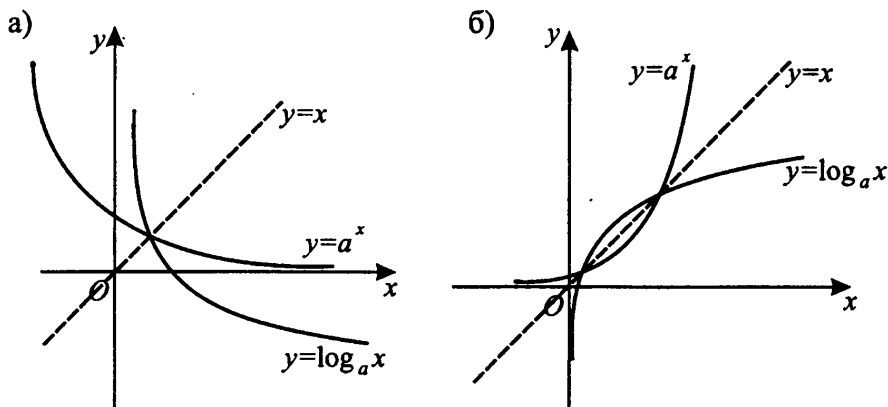


Рис. 25

Так как  $y = a^x$  и  $y = \log_a x$  — взаимно обратные функции, они пересекаются при  $x = y$ , то есть  $a^x = x$ .

При  $0 < a < 1$   $y = a^x$  — убывает,  $y = x$  возрастает, значит, одна точка пересечения.

При  $a = 1$   $1^x = x$ ,  $x = 1$  — корень.

При  $a > 1$  графики имеют только одну общую точку, если они касаются (см. рис. 25б).

$$\begin{cases} (a^x)' = (\log_a x)' \\ a^x = x; \end{cases} \quad \begin{cases} a^x \ln a = \frac{1}{x \ln a} \\ a^x = x; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ln a = \frac{1}{x \ln a}, \\ \ln a^x = \ln x; \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 \ln^2 a = 1; \\ x \ln a = \ln x; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ln a = 1, \\ x \ln a = \ln x; \end{cases} \quad \begin{cases} \ln x = 1, \\ a = x^{\frac{1}{x}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = e, \\ a = e^{\frac{1}{e}}. \end{cases}$$

Таким образом, единственное решение уравнение имеет при  $a \in (0; 1] \cup \left\{e^{\frac{1}{e}}\right\}$ .

Ответ:  $(0; 1] \cup \left\{e^{\frac{1}{e}}\right\}$ .

$$10. \begin{cases} b(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 1) = y + 2 - x^2, \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$$

Система может иметь единственное решение только при таких  $b$ , при которых её решением будет  $(x; y) = (0; y)$ , потому что если в системе есть решение  $(x_0; y_0)$ , то есть и решение  $(-x_0; y_0)$ . Найдём такие  $b$ .

$$\begin{cases} b(0 + 1) = y + 2 - 0, \\ |0| + |y| = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} b = y + 2, \\ |y| = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1, \\ b = 3; \\ y = -1, \\ b = 1. \end{cases}$$

Проверим, есть ли при  $b = 1$  и  $b = 3$  другие решения.

$$1) b = 1 \quad \begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^6 + 2x^4 + 4x^2 - 1 = y. \end{cases}$$

$$y' = 6x^5 + 8x^3 + 8x = 2x(3x^4 + 4x^2 + 4), \quad y' = 0 \text{ при } x = 0, \quad y(0) = -1, \quad y(1) = 6.$$

Из графиков на рисунке 26а видно, что решений более одного.

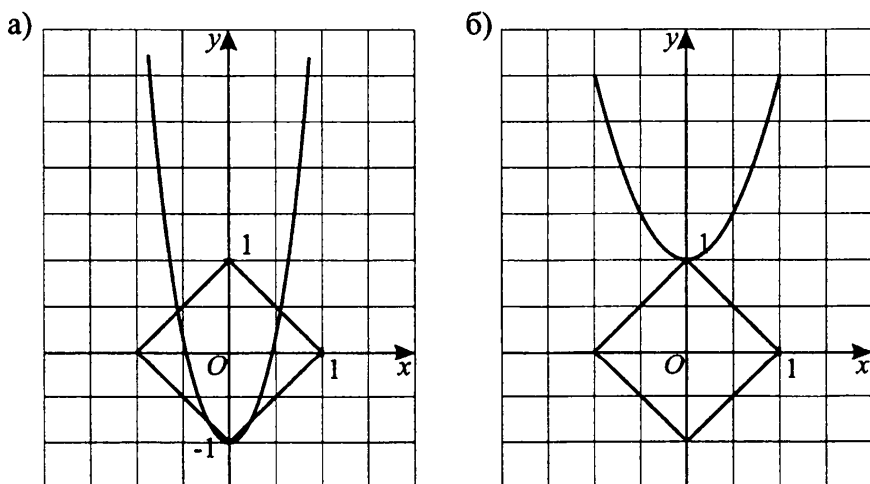


Рис. 26

$$2) b = 3 \begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ 3x^6 + 6x^4 + 10x^2 + 1 = y. \end{cases}$$

Т.к.  $3x^6 + 6x^4 + 10x^2 \geq 0$ , то  $y \geq 1$ .  $y(0) = 1$ .

Решение одно  $(0; 1)$  (см. рис. 266).

При  $b = 3$  система имеет единственное решение.

Ответ: 3.

### Решение варианта №1. Геометрия. Простые варианты

$$1. S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 17,5 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 17,5.

$$2. S = 6 \cdot 7 - \frac{6 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 7}{2} - \frac{5 \cdot 5}{2} = 20.$$

Ответ: 20.

$$3. V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 3 = 9.$$

Ответ: 9.

$$4. \text{Высота конуса } h = R_{\text{сферы}}, r_{\text{основания}} = R_{\text{сферы}}.$$

$S_{\text{бок. конуса}} = \pi Rl$ , где  $l = \sqrt{2}R$  — длина образующей.

$$\pi R \cdot \sqrt{2}R = 6\sqrt{2}; \pi R^2 = 6.$$

$$S_{\text{пов. сферы}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot 6 = 24.$$

Ответ: 24.

$$5. V = S_{\text{осн.}} \cdot h_1 = S_{\text{осн.}} \cdot 90 = \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 90, \text{ где } a_1 \text{ — сторона основания первой призмы. У второй призмы } a_2 = 3a_1, \text{ тогда}$$

$$V = \frac{a_2^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h_2 = \frac{(3a_1)^2 \sqrt{3}}{4} h_2. \quad \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 90 = \frac{(3a_1)^2 \sqrt{3}}{4} h_2,$$

$$h_2 = \frac{90}{3^2} = 10 \text{ (см)}.$$

Ответ: 10.

$$6. \text{Рассмотрим } \triangle BA_1D.$$

$$BD = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}, \quad BA_1 = \sqrt{5^2 + (2+3)^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$A_1D = \sqrt{AA_1^2 + A_1D^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$BD = BA_1 = A_1D \Rightarrow \triangle BA_1D \text{ равносторонний, } \angle BA_1D = 60^\circ.$$

Ответ: 60.

$$7. NA = ND = 17 \text{ (см. рис. 27), } \triangle NOD \text{ — прямоугольный,}$$

$$DO^2 = DN^2 - NO^2 = 17^2 - 15^2 = 64, \quad DO = 8, \quad DB = 2 \cdot 8 = 16.$$

Ответ: 16.

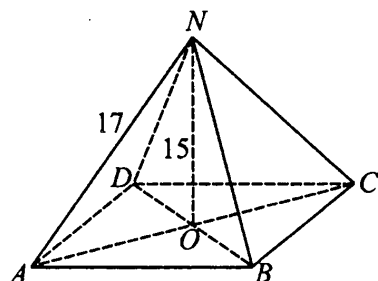


Рис. 27

8. По условию пирамида  $SABC$  — правильная (см. рис. 28), значит,  $\triangle ABC$  — равносторонний,  $O$  — центр,  $SO$  — высота. Проведём апофему  $SD$ ,  $BC \perp ASD$ .  $SD \cap KF = P$ , точку  $A$  соединим с точкой  $P$ . В плоскости  $ASD$  проведём  $MN \perp AP$ .  $KF \parallel BC$  как средняя линия  $\triangle BSC \Rightarrow KF \perp ASD \Rightarrow KF \perp MN \Rightarrow MN \perp AKF$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

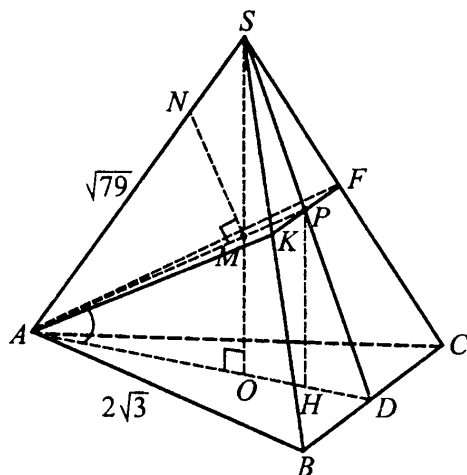


Рис. 28

Имеем:  $\vec{SO}$  вектор нормали плоскости  $ABC$ ,  $\vec{MN}$  — вектор нормали плоскости  $KAF \Rightarrow \angle NMS$  — угол между нормальными. Его величина равна величине угла между плоскостями  $ABC$  и  $KAF$ .  $\angle PAD = \angle NMS$  как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Для простоты вычислений найдём  $\angle PAD$ . Проведём  $PH \parallel SO$ , тогда  $PH \perp AD$  и  $\triangle AHP$  — прямоугольный.

В  $\triangle ABC$  высота  $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , где  $a$  — сторона  $\triangle ABC$ .

$$AD = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3, \text{ тогда } AO = 2, \quad OD = 1. \text{ Из } \triangle AOS: \\ OS = \sqrt{79 - 4} = 5\sqrt{3}.$$

В  $\triangle SOD$   $PH$  — средняя линия,  $PH = \frac{1}{2}SO = 2,5\sqrt{3}$ ,

$$OH = \frac{1}{2}OD = 0,5, \quad AH = AO + OH = 2 + 0,5 = 2,5.$$

В прямоугольном треугольнике  $AHP$   $\operatorname{tg} \angle PAD = \frac{PH}{AH} = \sqrt{3}$ , значит,  $\angle PAD = 60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

9. Искомый угол  $\alpha$  между диагональю осевого сечения цилиндра  $AB$  и плоскостью основания равен  $\angle BAC$ , т.к.  $BC \perp AC$ .  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{2R}$ , где  $R$  — радиус основания (см. рис. 29а).

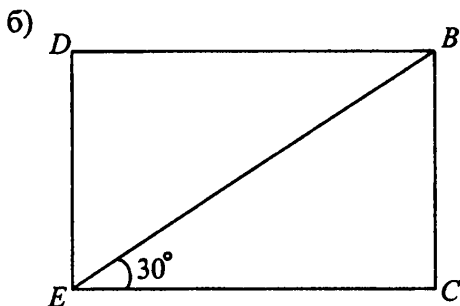
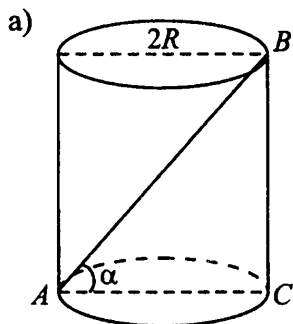


Рис. 29

Начертим развёртку боковой поверхности цилиндра (см. рис. 29б). Это прямоугольник со сторонами  $BC$  и  $EC = 2\pi R$ .  $\frac{BC}{2\pi R} = \operatorname{tg} 30^\circ$ ,

$$\frac{BC}{2\pi R} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ .

10. а) Точка  $K$  лежит на стороне  $AB$  (см. рис. 30а).

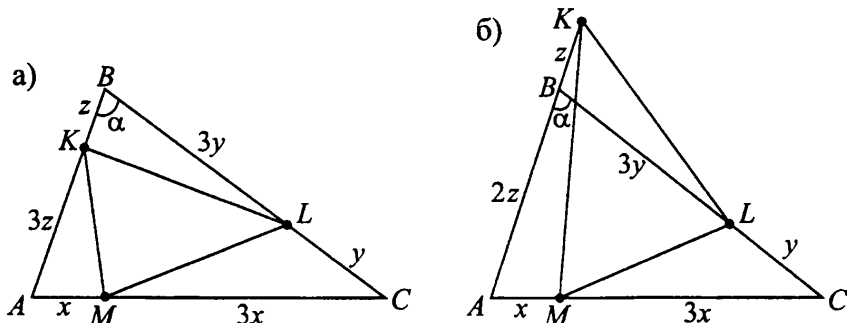


Рис. 30

$$S_{MLK} = S_{ABC} - S_{BKL} - S_{LCM} - S_{AKM}. \quad S_{ABC} = S = \frac{BA \cdot BC \cdot \sin B}{2},$$

$$S_{BKL} = \frac{BK \cdot BL \cdot \sin B}{2}.$$

$$\frac{AK}{BK} = 3. \quad \frac{S_{BKL}}{S} = \frac{BK \cdot BL}{BA \cdot BC} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{3}{16}.$$

$$\text{Аналогично } \frac{S_{MLC}}{S} = \frac{3}{16}, \quad \frac{S_{MKA}}{S} = \frac{3}{16}.$$

$$S_{MLK} = S - \frac{3}{16}S \cdot 3 = \frac{7}{16}S = \frac{7}{16} \cdot 48 = 21.$$

б) Точка  $K$  лежит на продолжении  $AB$  (см. рис. 30б).

$$S_{KLM} = S + S_{BKL} - S_{CML} - S_{AKM}.$$

$$\frac{S_{BKL}}{S} = \frac{BK \cdot BL \sin(180^\circ - \alpha)}{BA \cdot BC \sin \alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8},$$

$$S_{BKL} = \frac{3}{8}S, \quad S_{CML} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}S = \frac{3}{16}S, \quad S_{AKM} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}S = \frac{3}{8}S,$$

$$S_{MLK} = S + \frac{3}{8}S - \frac{3}{16}S - \frac{3}{8}S = \frac{13}{16}S = \frac{13}{16} \cdot 48 = 39.$$

Ответ: 21 или 39.

### Решение варианта №1. Геометрия. Сложные варианты

$$1. S = 6 \cdot 4 + 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 30.$$

Ответ: 30.

2. Сделаем чертёж (см. рис. 31).

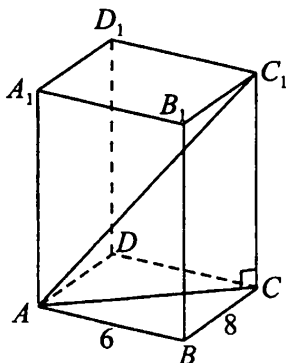


Рис. 31

$V = AB \cdot BC \cdot CC_1$ . По условию  $\angle AC_1C = 45^\circ$ , значит  $\angle C_1AC = 45^\circ$  и  $AC = CC_1$ .  $\triangle ABC$  прямоугольный,  $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ .

$$V = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480.$$

Ответ: 480.

3.  $S = (10 \cdot 12 - 2 \cdot 9) \cdot 2 + (4 \cdot 12 - 9 \cdot 1) \cdot 2 + (10 \cdot 4 - 2 \cdot 1) \cdot 2 = 204 + 78 + 76 = 358$ .

Ответ: 358.

4. В  $\triangle CAD_2$ :  $CD_2^2 = CA^2 + AD_2^2 - 2CA \cdot AD_2 \cos \angle CAD_2$ .

$$CD_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad CA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad AD_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

$$\cos \angle CAD_2 = \frac{CA^2 + AD_2^2 - CD_2^2}{2CA \cdot AD_2} = \frac{5 + 5 - 8}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{10} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

5. Проведём высоту  $SH$  (см. рис. 32),  $H$  — центр основания.  $SH = AC$ . Если  $AB = 1$ ,  $AC$  можно найти по теореме синусов.

$$\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ}, \quad \frac{AC}{\sqrt{3}/2} = \frac{AB}{1/2}, \quad AC = \sqrt{3}.$$

$$AH = AB = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{SH}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{1}, \quad \alpha = 60^\circ.$$

Ответ:  $60^\circ$ .

6. Сделаем чертёж (см. рис. 33).

По условию  $AK = KD$ ,  $DM = MC$ , значит,  $KM$  — средняя линия  $\triangle ADC$ ,  $KM \parallel AC$ . Проведём  $DH \perp AC$ , в равнобедренных  $\triangle ADC$  и  $\triangle KDM$   $AH$  и  $DP$  являются высотами и медианами  $\Rightarrow PH \perp KM$ .  $\triangle ABD = \triangle BDC \Rightarrow BK = BM \Rightarrow \triangle BKM$  равнобедренный  $\Rightarrow$

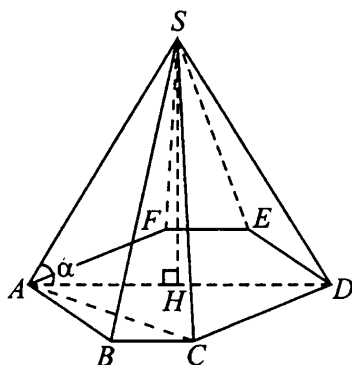


Рис. 32

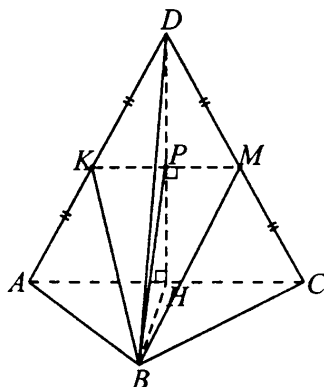


Рис. 33

медиана  $BP$  является высотой  $\Rightarrow BP \perp KM$ .  $KM$  общая линия плоскостей  $ACD$  и  $BKM \Rightarrow \angle BPH$  — искомый.

По условию (см. рис. 34)  $DB = 1,5AB$ . Пусть  $AB = 1$ , тогда  $DB = 1,5$ ,  $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  
 $DH = \sqrt{DC^2 - CH^2} = \sqrt{1,5^2 - 0,5^2} = \sqrt{2}$ ,  $PH = \frac{1}{2}DH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

По теореме косинусов для  $\triangle BDH$ :

$$\cos \angle D = \frac{BD^2 + DH^2 - BH^2}{2BD \cdot DH} = \frac{2,25 + 2 - \frac{3}{4}}{2 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3,5}{3\sqrt{2}};$$

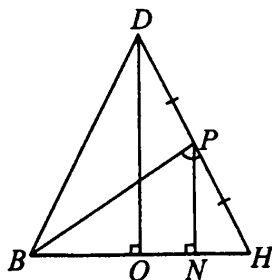


Рис. 34

$$\sin \angle D = \sqrt{1 - \left(\frac{3,5}{3\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{23}{72}}.$$

Для  $\triangle BDP$ :  $BP^2 = BD^2 + DP^2 - 2BD \cdot DP \cos \angle D$ ,

$$BP^2 = 2,25 + \frac{1}{2} - 2 \cdot 1,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3,5}{3\sqrt{2}}, \quad BP = 1. \quad \frac{BP}{\sin \angle D} = \frac{BD}{\sin \angle BPD};$$

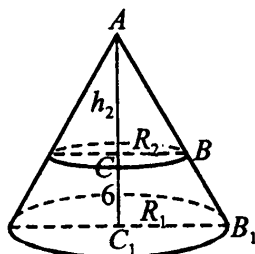
$$\sin \angle BPD = \frac{BD \cdot \sin \angle D}{BP} = \frac{1,5}{1} \cdot \sqrt{\frac{23}{72}} = \frac{3\sqrt{23}}{2 \cdot 6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{46}}{8}.$$

$$\sin \angle BPH = \sin \angle BPD = \frac{\sqrt{46}}{8}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{46}}{8}$ .

7. Пусть  $C$  — центр шара (см. рис. 35а), тогда  $CC_1 = 6$ .

а)



б)

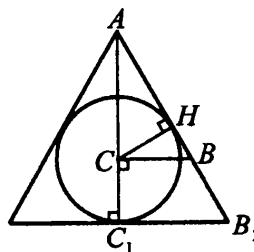


Рис. 35

$$\frac{V_{\text{конуса 1}}}{V_{\text{конуса 2}}} = 3 \frac{3}{8} = \frac{27}{8}.$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1 \Rightarrow \frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{CB}{C_1B_1}, \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{h_2}{h_1}.$$



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2} = \frac{R_1^2 h_1}{R_2^2 h_2} = \frac{h_1^3}{h_2^3} = \frac{27}{8}.$$

Отсюда  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{2}$ .  $h_1 = 6 + h_2$ , тогда  $\frac{6 + h_2}{h_2} = \frac{3}{2}$ ,  $h_2 = 12$ .

Найдём образующую  $AB$  (см. рис. 356).

В  $\triangle ABC$   $\angle ACB = 90^\circ$ , высота  $CH = 6$ ,  $AC = 12$ .

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}.$$

$$CH^2 = AH \cdot HB; HB = \frac{36}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}; AB = AH + HB = 8\sqrt{3}.$$

Ответ:  $8\sqrt{3}$ .

8. Трапеция  $ABCD$  — описанная (см. рис. 36), поэтому  $BC + AD = AB + CD = 5,8 + 4,2 = 10$ .

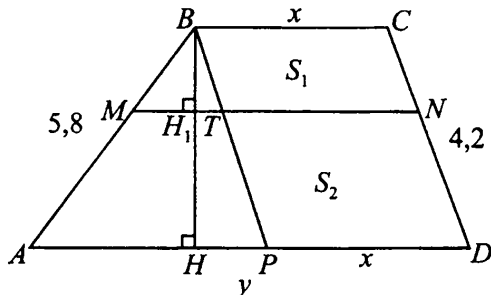


Рис. 36

$MN$  делит  $ABCD$  на две трапеции, значит,  $MN \parallel BC$ . По условию  $MN = 6$ . Пусть  $BC = x$ ,  $AD = y$ . Проведём  $BP \parallel CD$ . Тогда  $PD = BC = x$ .  $MT = 6 - x$ . Обозначим  $AP = y$ . Из подобия  $\triangle MBT$  и

$$\triangle ABP \text{ получим } \frac{MT}{AP} = \frac{BH_1}{BH}; \frac{6 - x}{y} = \frac{BH_1}{BH}.$$

$$\frac{S_1}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{x + 6}{2} \cdot BH_1}{\frac{2x + y}{2} \cdot BH} = \frac{x + 6}{2x + y} \cdot \frac{6 - x}{y}.$$

Заметим, что  $2x + y = 10$ .  $y = 10 - 2x$ .

$$\frac{S_1}{S_1 + S_2} = \frac{36 - x^2}{10(10 - 2x)}, \quad \frac{100 - 20x}{36 - x^2} = \frac{S_1 + S_2}{S_1} = 1 + \frac{S_2}{S_1}.$$

$$1) \frac{S_2}{S_1} = \frac{2}{3}; \frac{100 - 20x}{36 - x^2} = \frac{5}{3}; x = 6 \pm 2\sqrt{3}. \text{ Но } 2x < 10 \Rightarrow x = 6 - 2\sqrt{3},$$

$$x + y = 10 - x = 4 + 2\sqrt{3}.$$

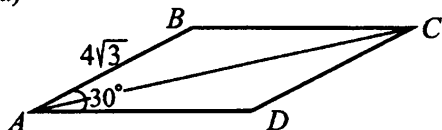
$$2) \frac{S_2}{S_1} = \frac{3}{2}; \frac{100 - 20x}{36 - x^2} = \frac{5}{2}; x = 4 \pm 2\sqrt{3}. \text{ Но } 2x < 10 \Rightarrow x = 4 - 2\sqrt{3},$$

$$x + y = 10 - (4 - 2\sqrt{3}) = 6 + 2\sqrt{3}.$$

Ответ:  $4 + 2\sqrt{3}$ ,  $6 + 2\sqrt{3}$ .

9. Сделаем чертёж (см. рис. 37а).

а)



б)

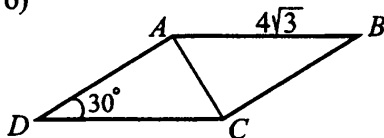


Рис. 37

$$S_{ABCD} = 20\sqrt{3}. S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 30^\circ. 4\sqrt{3} \cdot AD \cdot \sin 30^\circ = 20\sqrt{3}.$$

$$AD = \frac{20\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 10.$$

$$4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{Случай I. } \angle A = 30^\circ. \angle ABC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ,$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle B, \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$AC^2 = (4\sqrt{3})^2 + 10^2 + 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48 + 100 + 120 = 268,$$

$$AC = 2\sqrt{67}.$$

Случай II (см. рис. 37б).

$$\angle D = 30^\circ. 4\sqrt{3} \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = 20\sqrt{3}, BC = 10.$$

$$AC^2 = (4\sqrt{3})^2 + 10^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 28, AC = 2\sqrt{7}.$$

Ответ:  $2\sqrt{67}$ ,  $2\sqrt{7}$ .

10. Сделаем чертёж (см. рис. 38).

$DB$  — биссектриса,  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 1 = \angle 3$  (накрестлежащие углы при  $BC \parallel AD$ ,  $BD$  — секущая),  $\angle 2 = \angle 3$ ,  $\triangle BCD$  — равнобедренный,  $BC = CD$ .

$$\triangle ABH — \text{прямоугольный, } BH = 3, \operatorname{tg} A = \frac{3}{4}, AH = 4,$$

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, BC = 5, AD = 4 + 5 + 4 = 13.$$



# Литература

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Минобрнауки РФ № 413 от 17.05.2012.
2. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2013 году единого государственного экзамена по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: [www.fipi.ru](http://www.fipi.ru), свободный.
3. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2013 году единого государственного экзамена по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: [www.fipi.ru](http://www.fipi.ru), свободный.
4. Краснодарский центр математических соревнований школьников. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: [http://mathcent.chat.ru/\\_arcrus.htm](http://mathcent.chat.ru/_arcrus.htm), свободный.
5. Итоговый аналитический отчёт о результатах единого государственного экзамена 2012 года. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: [www.fipi.ru](http://www.fipi.ru), свободный.

*Готовимся к ЕГЭ*

Учебное издание

**Коннова Елена Генриевна  
Иванов Сергей Олегович**

**МАТЕМАТИКА  
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ  
Задания частей В и С**

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *В. Кириченко*  
Компьютерная верстка *С. Иванов*  
Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать с оригинал-макета 15.01.2013.

Формат 60х84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская.

Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,79.

Тираж 5000 экз. Заказ № 6

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»

Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.

Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.

www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

(Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов  
в ЗАО «Полиграфобъединение», 347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6 В.