

ПОДГОТОВКА

ЕГЭ 2013

МАТЕМАТИКА

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

Выпуск 3-й

Библиотечка
СтатГрад



ФГОС

РАЗРАБОТАНО МИОО • WWW.MIOO.RU

Центр дистанционных технологий мониторинга
образовательной деятельности

Математика

Подготовка к ЕГЭ в 2013 году

Диагностические работы

Под редакцией А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Библиотечка СтатГрад

Издание соответствует новому Федеральному государственному
общеобразовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2013

УДК 373:51
ББК 22.1я72
М34

Составители:

И. Р. Высоцкий, А. В. Семенов, И. В. Яценко

В сборнике использованы задания, предложенные

И. В. Яценко, М. А. Волчкевичем, И. Р. Высоцким, Р. К. Гординым,
Д. Д. Гушиным, П. И. Захаровым, В. А. Панферовым, С. Е. Посицельским,
М. А. Посицельской, П. В. Семеновым, И. Н. Сергеевым, В. А. Смирновым,
С. А. Шестаковым, Д. Э. Шнолём

М34 Математика. Подготовка к ЕГЭ в 2013 году. Диагностические работы. — М.: МЦНМО, 2013. — 98 с.

ISBN 978-5-4439-0421-4

Пособие включает 6 вариантов работ для подготовки выпускников 11 класса к единому государственному экзамену в 2013 году. Книга содержит ответы на тестовые задания и критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом. Данное пособие адресовано выпускникам средней школы, абитуриентам, школьным учителям.

Авторы книги являются разработчиками тренировочных и диагностических работ для системы СтатГрад (<http://statgrad.mioo.ru>).

Издание соответствует Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включен в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

Оригинал-макет издания подготовлен в Центре дистанционных технологий мониторинга образовательной деятельности (statgrad@mioo.ru).

Математика

Подготовка к ЕГЭ в 2013 году. Диагностические работы.

Подписано в печать 27.06.2012 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 7. Тираж 3000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–72–85. E-mail: biblio@mcsme.ru

ISBN 978-5-4439-0421-4

© Коллектив авторов, 2013.

© МЦНМО, 2013.

Введение

Сборник предназначен для подготовки к единому государственному экзамену по математике и содержит шестнадцать фрагментов различных вариантов работ, составленных в соответствии с нормативными документами ЕГЭ по математике. При составлении вариантов использовались задания из открытого банка заданий ЕГЭ (www.mathge.ru).

Десять фрагментов содержат только задания первой части. Каждый фрагмент состоит из 14 заданий B1–B14.

Шесть фрагментов содержат только задания второй части. Каждый фрагмент состоит из 4–6 заданий C1–C6.

Таким образом, сборник позволяет скомпоновать 60 различных вариантов, пользуясь готовыми фрагментами.

Ответы имеются ко всем заданиям. К заданиям второй части приводятся решения, позволяющие проверить полноту и точность ваших рассуждений.

Можно дать несколько практических рекомендаций, как пользоваться этой книгой. Какие задания выбрать для самостоятельного решения или для работы в классе – зависит, в первую очередь, от того, какую цель вы ставите перед собой.

1. Вы по математике успеваете слабо, и ваша цель – преодолеть минимальный порог, чтобы получить аттестат. Тогда мы советуем вам сосредоточиться на заданиях B1–B6 и B10. Задания B1, B2, B4 и B10 ориентированы на математическую подоплёку ситуаций повседневной жизни. Задание B3 – вычисление площади с помощью разграфленной бумаги или системы координат. Решить задачу можно, не зная формул, пользуясь лишь здравым смыслом и представлениями о целом и его части. Задание B5 содержит простейшее уравнение, которое можно решить почти без преобразований, пользуясь только элементарными понятиями школьного курса. Если вы уверенно решаете 6–7 заданий, то это означает, что вы владеете минимальной математической культурой и наверняка достигнете своей цели на ЕГЭ.

2. Ваша цель на ЕГЭ – подтвердить свою школьную оценку и самооценку; хороший балл вам важен для поступления в вуз. Тогда ваш экзамен состоит из всех заданий группы B и заданий C1 и C2 второй части. Эти задания – стандартные с точки зрения школьных программ. Обратите также внимание на задания C3 и C4. Они сложнее, но если у вас есть фантазия – попробуйте.

3. Вы собираетесь поступать на математическую специальность в институт или университет. Вам нужен очень высокий балл на ЕГЭ. Тогда вы должны уверенно решать все задания первой части и задания C1, C2 (как ни странно, наиболее подготовленные учащиеся часто ошибаются именно здесь по небрежности). Вам нужно уметь выполнять задания C3 и C4. Основным объектом вашего внимания – задание C5, требующее умения комбинировать геометрические и алгебраические идеи. Задание C6 не требует много знаний. Вопрос в том, как применить имеющиеся знания. Здесь нужна высокая математическая культура и хорошая подготовка.

Как пользоваться готовыми решениями вариантов

1. Вы не можете решить задачу и решили посмотреть решение. Разберитесь в нём тщательно. Недостаточно просто прочесть решение и понять, что там написано. Нужно проделать самостоятельно все пропущенные выкладки, понять не только ход решения, но и снять все возникающие вопросы «почему». Когда вы разобрались в решении, попробуйте повторить его самостоятельно, воспроизводя все логические шаги и вычисления. Затем возьмите похожую задачу и решите её, ещё раз воспроизводя все логические построения и вычисления. Наконец, попробуйте изменить решение, улучшить или упростить его. Попробуйте решить похожую задачу с изменённым условием.

2. Вы решили задание самостоятельно, и ответ совпал. Это не означает, что ваше решение не содержит упущений. Сравните своё решение и решение, предложенное авторами. Попробуйте определить, в чём решения существенно различаются, а в чём схожи. Проверьте, нашли ли вы все возможные случаи, убедительно ли объяснили все свои построения и преобразования.

Желаем удачи!

Задания к части 1

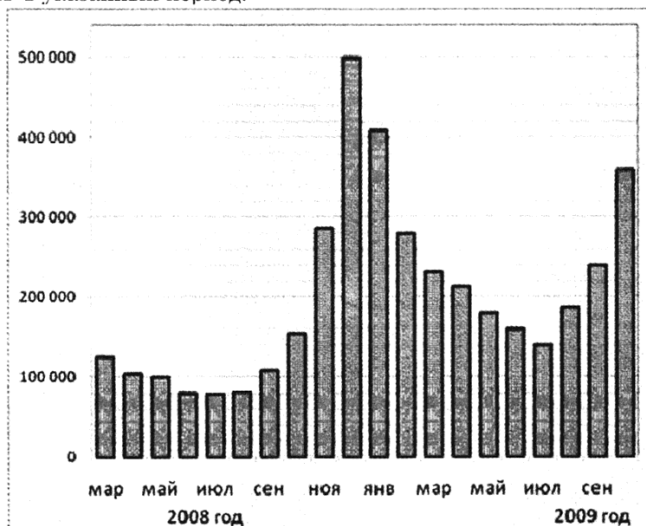
Вариант 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Футболка стоила 450 рублей. После повышения цены она стала стоить 495 рублей. На сколько процентов была повышена цена на футболку?

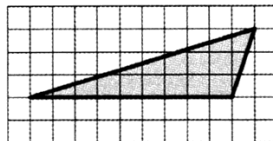
Ответ:

- В2** На диаграмме показано количество запросов со словом СНЕГ, сделанных на поисковом сайте Yandex.ru во все месяцы с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – количество запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное количество запросов со словом СНЕГ в указанный период.



Ответ:

- В3** Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ:

- В4** Строительной фирме нужно приобрести 73 кубометра пенобетона у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

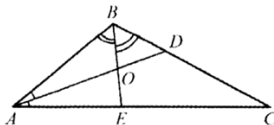
Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2950	4800 руб.	
Б	3000	5800 руб.	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2980	3800 руб.	При заказе более 75 м^3 доставка бесплатно

Ответ:

- В5** Найдите корень уравнения $\sqrt{53 - 4x} = 7$.

Ответ:

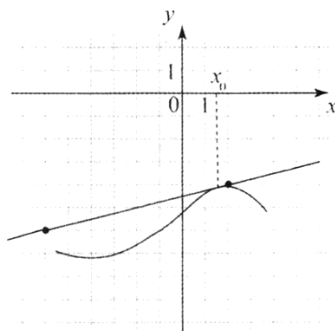
- В6** В треугольнике ABC угол C равен 28° , AD и BE – биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



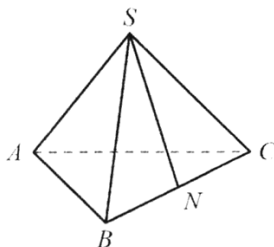
Ответ:

B7Найдите значение выражения $6^{\frac{7}{8}} \cdot 36^{\frac{1}{16}}$.**Ответ:****B8**

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

**Ответ:****B9**

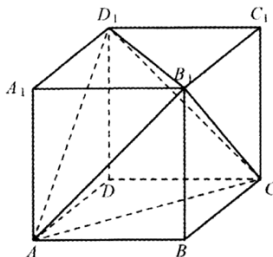
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка N – середина ребра BC , точка S – вершина. Известно, что $SN=6$, а площадь боковой поверхности равна 72. Найдите длину отрезка AB .

**Ответ:**

- B10** В соревнованиях по толканию ядра участвуют 14 спортсменов из Греции, 10 спортсменов из Румынии и 8 – из Венгрии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Венгрии.

Ответ:

- B11** Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 4,8. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 C B_1$.



Ответ:

- B12** Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 2,1 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 21$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответ:

- B13** Моторная лодка прошла против течения реки 80 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 3 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 13 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

- B14** Найдите точку максимума функции $y = (x + 2)^2 x - 8$.

Ответ:

Задания к части 1

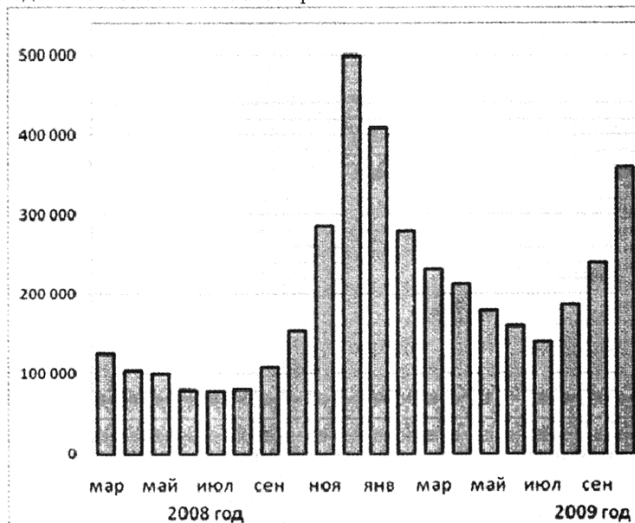
Вариант 2

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Футболка стоила 600 рублей. После повышения цены она стала стоить 690 рублей. На сколько процентов была повышена цена на футболку?

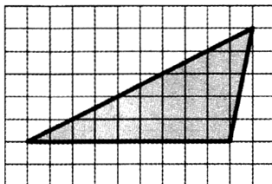
Ответ:

- В2** На диаграмме показано количество запросов со словом СНЕГ, сделанных на поисковом сайте Yandex.ru во все месяцы с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – количество запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было таких месяцев за данный период, когда было сделано менее 120 000 запросов со словом СНЕГ.



Ответ:

- В3** Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ:

- В4** Строительной фирме нужно приобрести 76 кубометров пенобетона у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

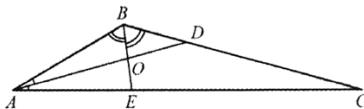
Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м ³)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2850	4500 руб.	
Б	2900	5500 руб.	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2880	3500 руб.	При заказе более 80 м ³ доставка бесплатно

Ответ:

- В5** Найдите корень уравнения $\sqrt{51 - 2x} = 5$.

Ответ:

- B6** В треугольнике ABC угол C равен 6° , AD и BE – биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.

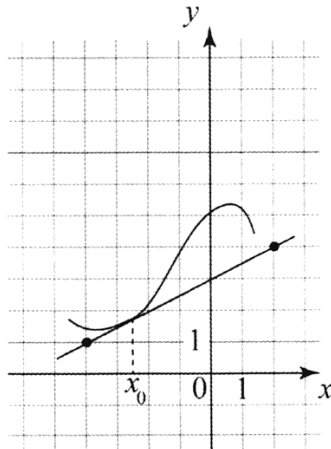


Ответ:

- B7** Найдите значение выражения $3^{\frac{2}{5}} \cdot 9^{\frac{1}{5}}$.

Ответ:

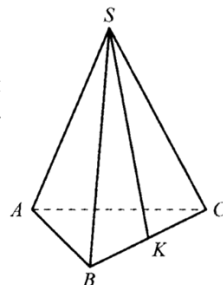
- B8** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ:

B9

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K – середина ребра BC , точка S – вершина. Известно, что $SK = 10$, а площадь боковой поверхности равна 60. Найдите длину отрезка AB .

**Ответ:**

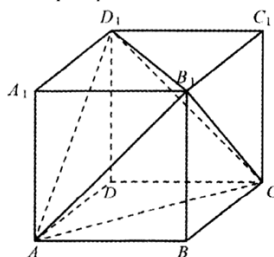
B10

В соревнованиях по толканию ядра участвуют 3 спортсмена из Дании, 5 спортсменов из Швеции, 9 спортсменов из Норвегии и 3 – из Финляндии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Дании.

Ответ:

B11

Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 1,5. Найдите объем треугольной пирамиды $AD_1 C B_1$.

**Ответ:**

- B12** Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта будет равно 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответ:

- B13** Моторная лодка прошла против течения реки 60 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 16 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

- B14** Найдите точку максимума функции $y = (x + 5)^2(x - 5) + 9$.

Ответ:

Задания к части 1

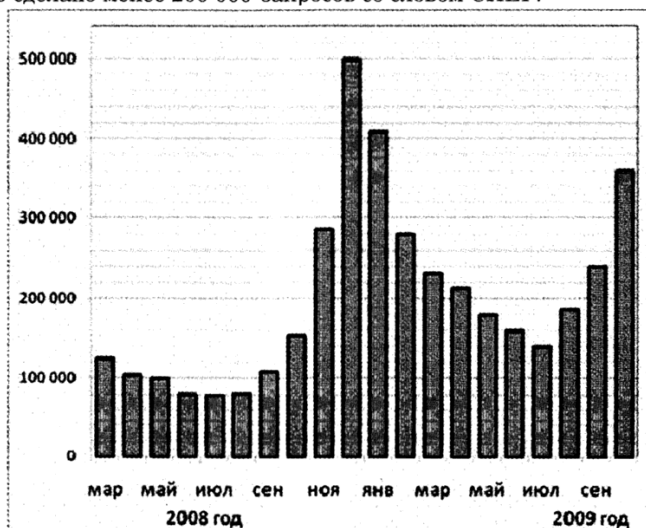
Вариант 3

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Футболка стоила 400 рублей. После повышения цены она стала стоить 440 рублей. На сколько процентов была повышена цена на футболку?

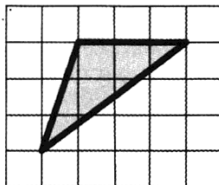
Ответ:

- В2** На диаграмме показано количество запросов со словом СНЕГ, сделанных на поисковом сайте Yandex.ru во все месяцы с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – количество запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было таких месяцев за данный период, когда было сделано менее 200 000 запросов со словом СНЕГ.



Ответ:

- В3** Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ:

- В4** Строительной фирме нужно приобрести 72 кубометра пенобетона у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

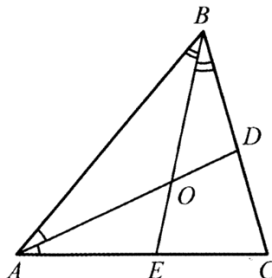
Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м ³)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2950	4600 руб.	
Б	3100	5600 руб.	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2980	3600 руб.	При заказе более 75 м ³ доставка бесплатно

Ответ:

- В5** Найдите корень уравнения $\sqrt{46 - 2x} = 4$.

Ответ:

- В6** В треугольнике ABC угол C равен 74° , AD и BE – биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.

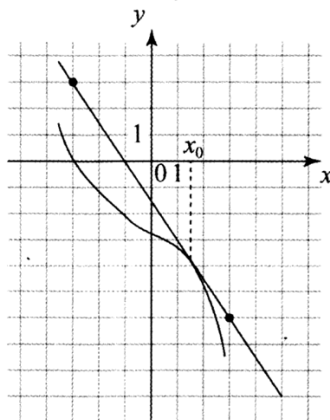


Ответ:

- В7** Найдите значение выражения $4^{\frac{8}{9}} \cdot 16^{\frac{1}{18}}$.

Ответ:

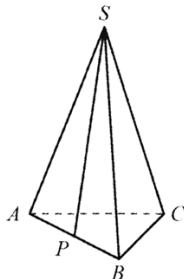
- В8** На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ:

B9

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P – середина ребра AB , точка S – вершина. Известно, что $SP = 29$, а площадь боковой поверхности равна 261. Найдите длину отрезка BC .

**Ответ:**

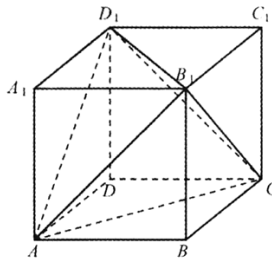
B10

В соревнованиях по толканию ядра участвуют 5 спортсменов из Чехии, 13 спортсменов из Австрии и 6 – из Швейцарии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швейцарии.

Ответ:

B11

Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 3. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 C B_1$.

**Ответ:**

- B12** Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта будет равно 4 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответ:

- B13** Моторная лодка прошла против течения реки 72 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 15 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

- B14** Найдите точку максимума функции $y = (x + 4)^2(x + 2) - 10$.

Ответ:

Задания к части 1

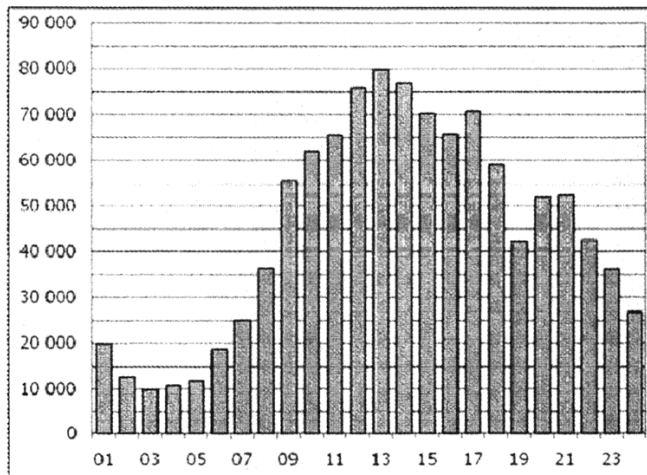
Вариант 4

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** На день рождения полагается дарить букет из нечётного числа цветов. Хризантемы стоят 55 рублей за штуку. У Вани есть 530 рублей. Из какого наибольшего числа хризантем он может купить букет Маше на день рождения?

Ответ:

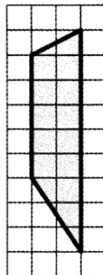
- В2** На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали – количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, сколько было часов в данный день, когда на сайте РИА Новости было менее 30 000 посетителей.



Ответ:

В3

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

**Ответ:**

В4

В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 г.).

Наименование продукта	Липецк	Ярославль	Белгород
Пшеничный хлеб (батон)	14	15	11
Молоко (1 литр)	23	26	23
Картофель (1 кг)	13	9	10
Сыр (1 кг)	215	240	205
Мясо (говядина, 1 кг)	240	230	240
Подсолнечное масло (1 литр)	44	58	44

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 3 кг картофеля, 1 кг сыра, 3 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

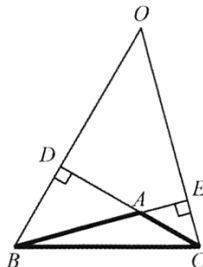
Ответ:

В5

Решите уравнение $\sqrt{-18 + 11x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ:

- B6** В треугольнике ABC угол A равен 135° . Продолжения высот BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

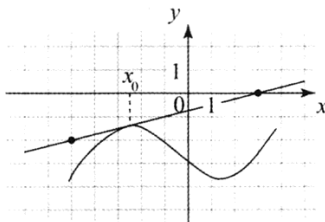


Ответ:

- B7** Найдите значение выражения $\frac{2^{3,4} \cdot 5^{2,4}}{10^{1,4}}$.

Ответ:

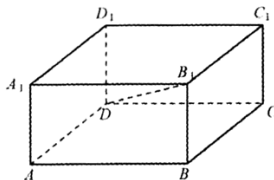
- B8** На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ:

В9

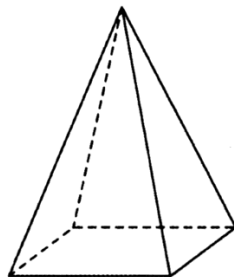
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $DB_1 = 21$, $CD = 16$, $B_1 C_1 = 11$. Найдите длину ребра BB_1 .

**Ответ:****В10**

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 12 очков. Результат округлите до сотых.

Ответ:**В11**

Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 14, боковые рёбра равны 25. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

**Ответ:****В12**

Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч², вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,4 километра, приобрести скорость не менее 160 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

Ответ:

- B13** Первый час автомобиль ехал со скоростью 120 км/ч, следующие два часа – со скоростью 85 км/ч, а затем два часа – со скоростью 50 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

- B14** Найдите точку минимума функции $y = (x + 9)^2(x + 3) + 7$.

Ответ:

Задания к части 1

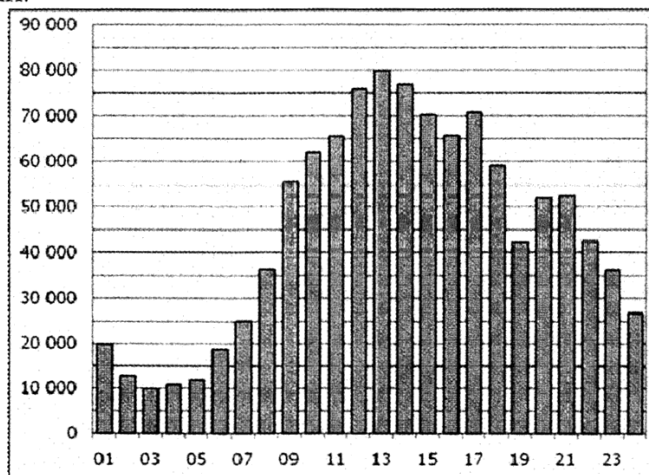
Вариант 5

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** На день рождения полагается дарить букет из нечётного числа цветов. Розы стоят 100 рублей за штуку. У Вани есть 750 рублей. Из какого наибольшего числа роз он может купить букет Маше на день рождения?

Ответ:

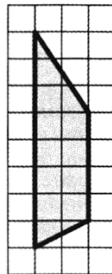
- В2** На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали – количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, каким было наименьшее количество посетителей за час в данный день на сайте РИА.Н.



Ответ:

В3

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

**Ответ:**

В4

В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 г.).

Наименование продукта	Владивосток	Барнаул	Курск
Пшеничный хлеб (батон)	12	12	10
Молоко (1 литр)	25	25	21
Картофель (1 кг)	18	16	13
Сыр (1 кг)	250	260	220
Мясо (говядина, 1 кг)	300	300	240
Подсолнечное масло (1 литр)	58	50	44

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 3 л молока, 1 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Ответ:

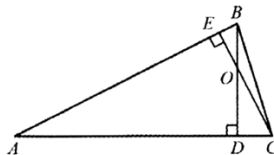
В5

Решите уравнение $\sqrt{28-3x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ:

B6

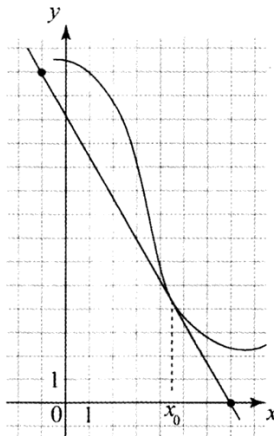
В треугольнике ABC угол A равен 27° , углы B и C острые, BD и CE – высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

**Ответ:****B7**

Найдите значение выражения $\frac{2^{2,2} \cdot 6^{3,2}}{12^{2,2}}$.

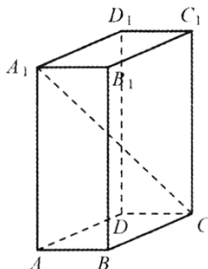
Ответ:**B8**

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

**Ответ:**

B9

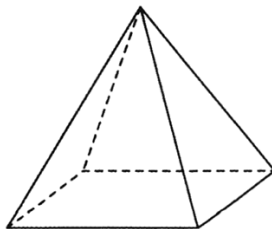
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $CA_1 = 11$, $C_1 D_1 = 2$, $A_1 D_1 = 6$. Найдите длину ребра CC_1 .

**Ответ:****B10**

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.

Ответ:**B11**

Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 12, боковые рёбра равны 10. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

**Ответ:**

- B12** | Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч², вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,5 километра, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

Ответ:

- B13** | Первый час автомобиль ехал со скоростью 120 км/ч, следующие три часа – со скоростью 100 км/ч, а затем один час – со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

- B14** | Найдите точку минимума функции $y = (x - 10)^2(x - 6) - 3$.

Ответ:

Задания к части 1

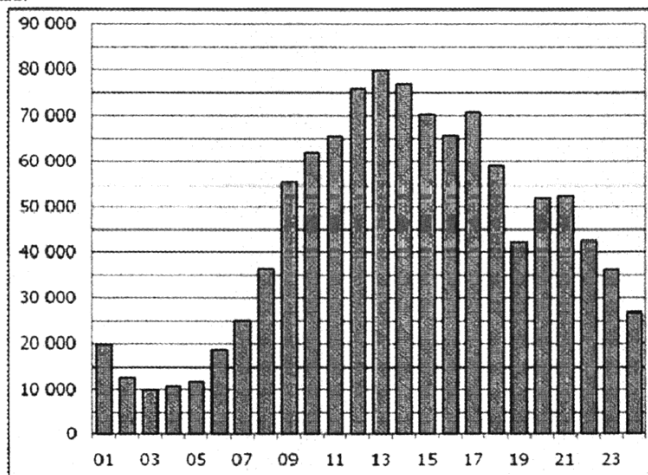
Вариант 6

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** На день рождения полагается дарить букет из нечётного числа цветов. Розы стоят 80 рублей за штуку. У Вани есть 350 рублей. Из какого наибольшего числа роз он может купить букет Маше на день рождения?

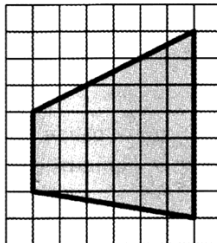
Ответ:

- В2** На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали – количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, каким было наибольшее количество посетителей за час в данный день на сайте РИА.Н.



Ответ:

- В3** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ:

- В4** В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 г.).

Наименование продукта	Вологда	Петрозаводск	Павловск
Пшеничный хлеб (батон)	16	13	18
Молоко (1 литр)	25	26	28
Картофель (1 кг)	9	14	9
Сыр (1 кг)	240	230	240
Мясо (говядина, 1 кг)	280	280	275
Подсолнечное масло (1 литр)	65	38	38

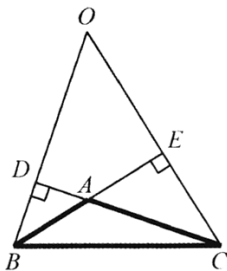
Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 1 батон пшеничного хлеба, 4 кг картофеля, 1 кг сыра. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Ответ:

- B5** | Решите уравнение $\sqrt{8 - 7x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ:

- B6** | В треугольнике ABC угол A равен 129° . Продолжения высот BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.



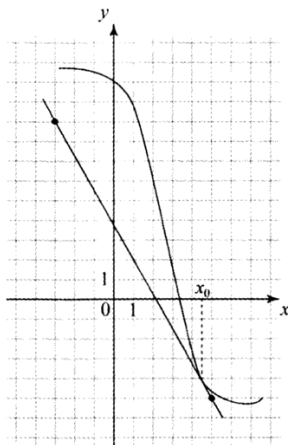
Ответ:

- B7** | Найдите значение выражения $\frac{4^{2,9} \cdot 7^{2,4}}{28^{1,4}}$.

Ответ:

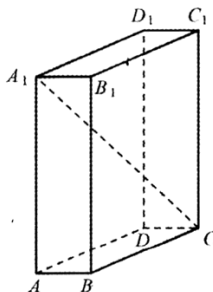
B8

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

**Ответ:**

B9

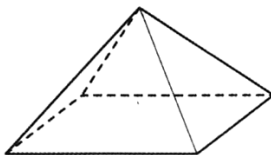
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $CA_1 = 23$, $CD = 3$, $AD = 14$. Найдите длину ребра BB_1 .

**Ответ:**

- B10** В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 3 очка. Результат округлите до сотых.

Ответ:

- B11** Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 6, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Ответ:

- B12** Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч², вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,9 километра, приобрести скорость не менее 90 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

Ответ:

- B13** Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 55 км/ч, следующий час – со скоростью 50 км/ч, а затем два часа – со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

- B14** Найдите точку минимума функции $y = (x - 5)^2(x + 3) - 2$.

Ответ:

Задания к части 1

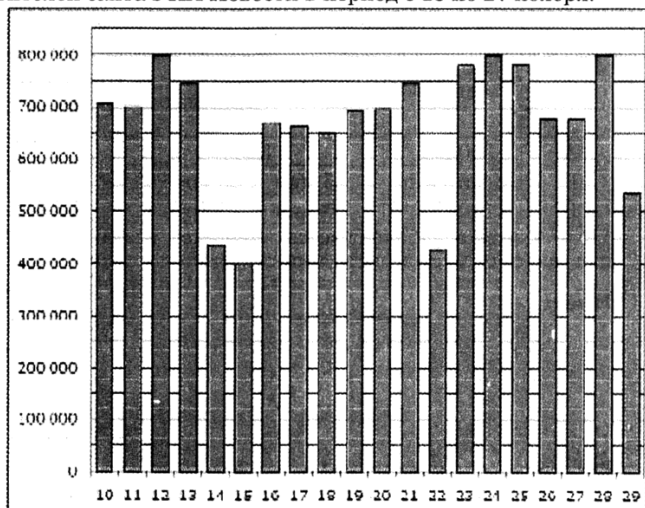
Вариант 7

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** В доме, в котором живёт Нина, 9 этажей и несколько подъездов. В каждом подъезде на каждом этаже находится по 6 квартир. Нина живёт в квартире № 81. На каком этаже живёт Нина?

Ответ:

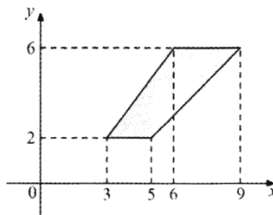
- В2** На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме наибольшее суточное количество посетителей сайта РИА Новости в период с 13 по 27 ноября.



Ответ:

В3

Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (3; 2), (5; 2), (9; 6), (6; 6).

**Ответ:**

В4

В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 50 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
А	300 руб.	Нет	11
Б	Бесплатно	15 мин – 300 руб.	19
В	120 руб.	10 мин – 150 руб.	13

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

Ответ:

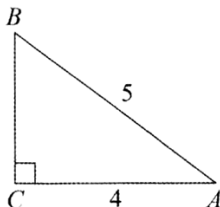
В5

Найдите корень уравнения $\log_7(x + 47) = 2$.

Ответ:

B6

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 5$, $AC = 4$. Найдите $\sin A$.

**Ответ:**

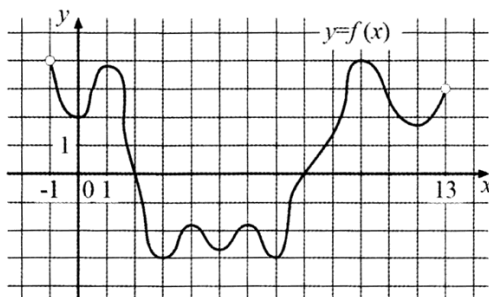
B7

Найдите значение выражения $\frac{(3\sqrt{5})^2}{15}$.

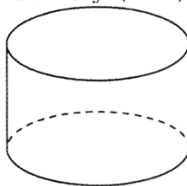
Ответ:

B8

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-1; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 20$.

**Ответ:**

- B9** | Площадь боковой поверхности цилиндра равна 28π , а диаметр основания равен 7. Найдите высоту цилиндра.

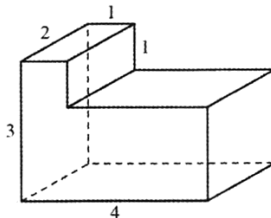


Ответ:

- B10** | В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что оба раза выпадет орёл.

Ответ:

- B11** | Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ:

- В12** Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_{\text{п}} = 25^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_{\text{в}} = 65^\circ\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,4$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T ($^\circ\text{C}$), причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$ (м), где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ – теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ – коэффициент теплообмена, а $\alpha = 2,1$ – постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 56 м?

Ответ:

- В13** Первый сплав содержит 5% меди, второй – 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 2 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ:

- В14** Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$.

Ответ:

Задания к части 1

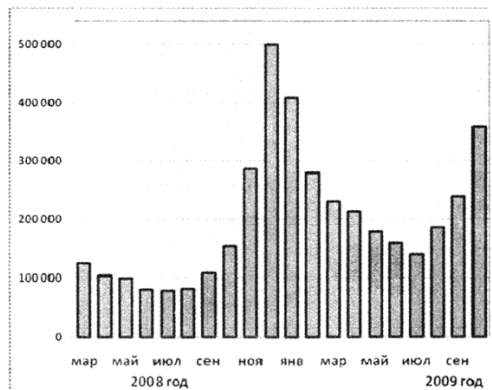
Вариант 8

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** В доме, в котором живёт Тамара, 5 этажей и несколько подъездов. В каждом подъезде на каждом этаже находится по 4 квартиры. Тамара живёт в квартире № 86. На каком этаже живёт Тамара?

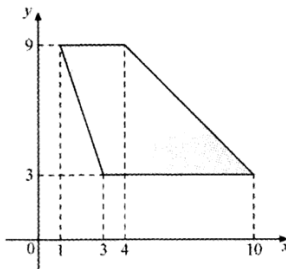
Ответ:

- В2** На диаграмме показано количество запросов со словом СНЕГ, сделанных на поисковом сайте Yandex.ru во все месяцы с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было таких месяцев за данный период, когда было сделано менее 120 000 запросов со словом СНЕГ.



Ответ:

- В3** Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(3; 3)$, $(10; 3)$, $(4; 9)$, $(1; 9)$.



Ответ:

- В4** В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 60 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
А	350 руб.	Нет	11
Б	Бесплатно	15 мин – 300 руб.	19
В	180 руб.	10 мин – 150 руб.	12

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

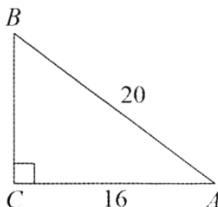
Ответ:

- В5** Найдите корень уравнения $\lg(4x + 16) = 2$.

Ответ:

B6

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 20$, $AC = 16$. Найдите $\sin A$.

**Ответ:**

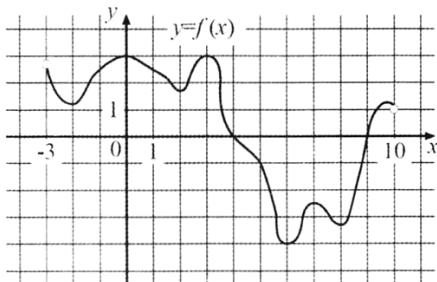
B7

Найдите значение выражения $\frac{(3\sqrt{3})^2}{3}$.

Ответ:

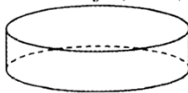
B8

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-3; 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -13$.

**Ответ:**

B9

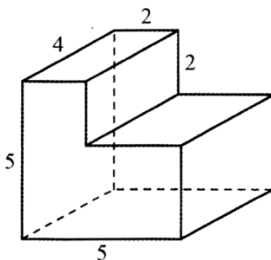
Площадь боковой поверхности цилиндра равна 18π , а диаметр основания равен 9. Найдите высоту цилиндра.

**Ответ:****B10**

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза.

Ответ:**B11**

Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).

**Ответ:**

- B12** Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_{\text{п}} = 15^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_{\text{в}} = 83^\circ\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T ($^\circ\text{C}$), причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$ (м), где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ – теплоёмкость воды, $\gamma = 42 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ – коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,7$ – постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 102 м?

Ответ:

- B13** Первый сплав содержит 5% меди, второй – 12% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 6 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ:

- B14** Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$.

Ответ:

Задания к части 1

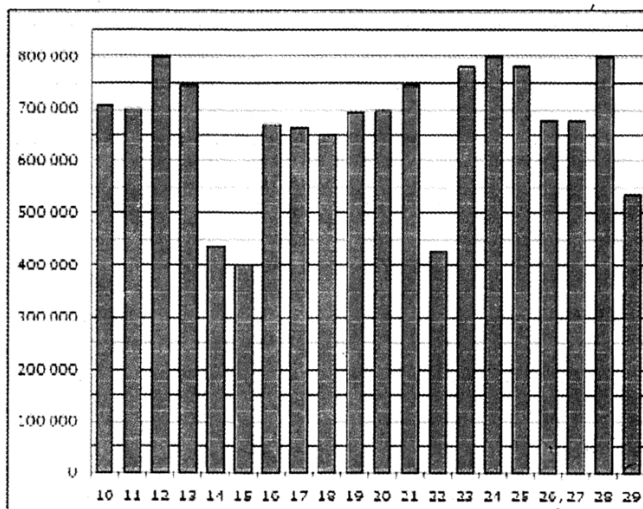
Вариант 9

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Шариковая ручка стоит 46 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 700 рублей после повышения цены на 25%?

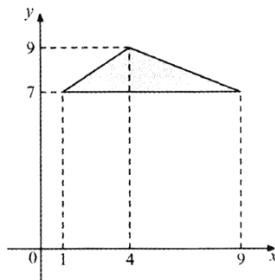
Ответ:

- В2** На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа количество посетителей сайта РИА Новости было наименьшим.



Ответ:

- В3** Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1; 7)$, $(9; 7)$, $(4; 9)$.



Ответ:

- В4** Для транспортировки 3 тонн груза на 350 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого перевозчика указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)	Грузоподъёмность автомобилей (тонн)
А	90	1,8
Б	120	2,4
В	170	3,4

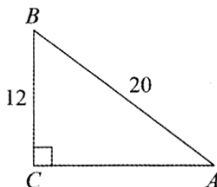
Ответ:

- В5** Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{5}{4x-19}} = \frac{1}{3}$.

Ответ:

B6

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 20$, $BC = 12$. Найдите $\cos A$.

**Ответ:**

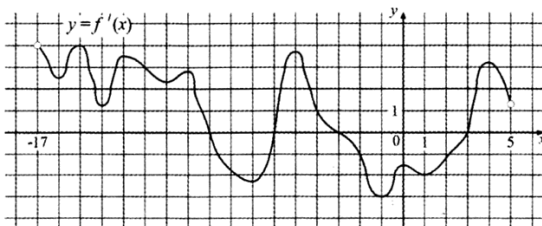
B7

Найдите значение выражения $\frac{(4\sqrt{6})^2}{4}$.

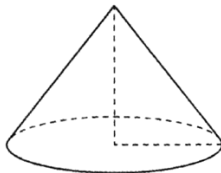
Ответ:

B8

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-17; 5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 2]$.

**Ответ:**

- В9** Диаметр основания конуса равен 18, а длина образующей — 15. Найдите высоту конуса.

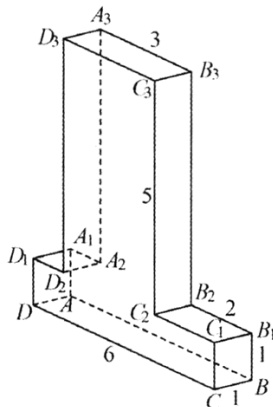


Ответ:

- В10** Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 28 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Ответ:

- В11** Найдите квадрат расстояния между вершинами C_2 и A_3 многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ:

- B12** Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 2,9 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 29$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответ:

- B13** Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 11 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 66 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 42 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

- B14** Найдите точку максимума функции $y = \log_4(-3 + 4x - x^2) + 7$.

Ответ:

Задания к части 1

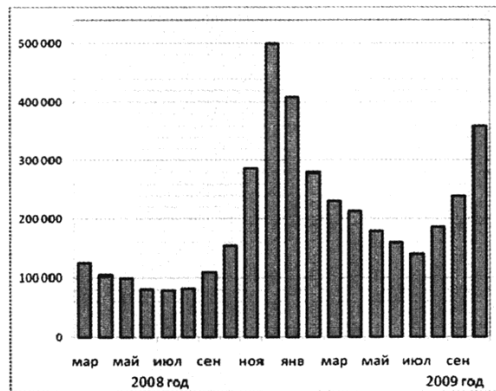
Вариант 10

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Шариковая ручка стоит 15 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены на 20%?

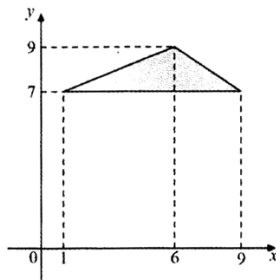
Ответ:

- В2** На диаграмме показано количество запросов со словом СНЕГ, сделанных на поисковом сайте Yandex.ru во все месяцы с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество запросов за данный месяц. Определите по диаграмме разность между наибольшим и наименьшим месячными количествами запросов со словом СНЕГ в указанный период.



Ответ:

- В3** | Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 7), (9; 7), (6; 9).



Ответ:

- В4** | Для транспортировки 3 тонн груза на 250 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого перевозчика указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)	Грузоподъёмность автомобилей (тонн)
А	110	2,2
Б	130	2,6
В	170	3,4

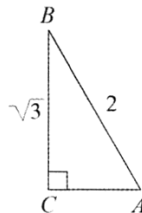
Ответ:

- В5** | Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{10}{4x-26}} = \frac{1}{3}$.

Ответ:

B6

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$.
Найдите $\cos A$.

**Ответ:**

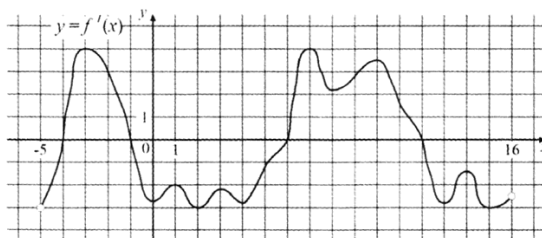
B7

Найдите значение выражения $\frac{(3\sqrt{6})^2}{6}$.

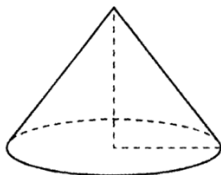
Ответ:

B8

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 16)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3; 14]$.

**Ответ:**

- В9** Диаметр основания конуса равен 6, а длина образующей — 5. Найдите высоту конуса.

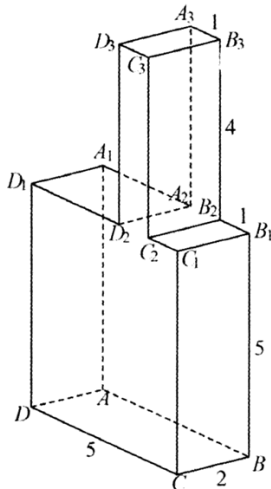


Ответ:

- В10** Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 40 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 16 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Ответ:

- В11** Найдите квадрат расстояния между вершинами B_2 и D_3 многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ:

- B12** Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 3,8 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 19$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответ:

- B13** Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 14 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 84 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 50 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

- B14** Найдите точку максимума функции $y = \log_8(1 + 8x - x^2) + 1$.

Ответ:

Задания к части 2

Вариант 1

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - 4 \sin x + 4\sqrt{3} \cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

C2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M – середина ребра SA , точка K – середина ребра SB . Найдите угол между плоскостями CMK и ABC , если $SC = 6$, $AB = 4$.

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{2x+1}(4x-5) + \log_{4x-5}(2x+1) \leq 2, \\ 9^x - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x \leq 0. \end{cases}$$

C4

Площадь трапеции $ABCD$ равна 135. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

C5

При каких a уравнение $|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

C6

В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

Задания к части 2

Вариант 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3} \sin^2 x + 4\cos x - 4\sqrt{3} \sin x = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
- C2** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M – середина ребра SA , точка K – середина ребра SB . Найдите угол между плоскостями CMK и ABC , если $SC=8$, $AB=6$.
- C3** Решите систему неравенств
- $$\begin{cases} \log_{3x+1}(4x-6) + \log_{4x-6}(3x+1) \leq 2, \\ 16^x - 12^x - 2 \cdot 9^x \leq 0. \end{cases}$$
- C4** Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.
- C5** При каких a уравнение $|x^2 + 2x - 3| - 2a = |x + a| - 1$ имеет ровно три корня?
- C6** В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2076.
- а) Может ли в последовательности быть три члена?
б) Может ли в последовательности быть четыре члена?
в) Может ли в последовательности быть меньше 2076 членов?

Задания к части 2

Вариант 3

Для записи решений и ответов на задания C1–C4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $\cos^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x = \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi \right].$$

C2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка M – середина ребра SA , точка K – середина ребра SC . Найдите угол между плоскостями BMK и ABC , если $AB = 8$, $SC = 6$.

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 \log_{16} x \geq \log_{16} x^5 + x \log_2 x, \\ 4^x + 4^{-x} \geq \frac{10}{3}. \end{cases}$$

C4

Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Задания к части 2

Вариант 4

Для записи решений и ответов на задания C1–C4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $\frac{1}{2}\sin 2x + \sin^2 x - \sin x = \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$$

C2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка M – середина ребра SA , точка K – середина ребра SC . Найдите угол между плоскостями BMK и ABC , если $AB = 4$, $SC = 7$.

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 \log_{25} x \geq \log_{25} x^3 + x \log_5 x, \\ 5^x + 5^{-x} \geq \frac{17}{4}. \end{cases}$$

C4

Площадь трапеции $ABCD$ равна 560. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции в полтора раза больше другого.

Задания к части 2

Вариант 5

Для записи решений и ответов на задания C1–C4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Дано уравнение $\operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 0$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

C2 Дана прямая призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Основание призмы — ромб со стороной 8 и острым углом 45° . Высота призмы равна 6. Найдите угол между плоскостью $AC_1 B$ и плоскостью ABD .

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - 5,6x + 7,84)(x - 2,5) \leq 0, \\ \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3-x} \leq 5. \end{cases}$$

C4 Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 34$, $AC = 65$ и $BC = 93$. На стороне BC взята точка M , причём $AM = 20$. Найдите площадь треугольника AMB .

Задания к части 2

Вариант 6

Для записи решений и ответов на задания C1–C4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Дано уравнение $\operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 0$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

C2 Дана прямая призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Основание призмы — ромб со стороной 4 и острым углом 60° . Высота призмы равна 5. Найдите угол между плоскостью $AC_1 B$ и плоскостью ABD .

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - 3,6x + 3,24)(x - 1,5) \leq 0, \\ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \leq 5. \end{cases}$$

C4 Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 17$, $AC = 25$ и $BC = 28$. На стороне BC взята точка M , причём $AM = \sqrt{241}$. Найдите площадь треугольника AMB .

Ответы к заданиям части 1

Вариант 1

№ задания	Ответ
B1	10
B2	500000
B3	13,5
B4	219000
B5	1
B6	104
B7	6

№ задания	Ответ
B8	0,25
B9	8
B10	0,25
B11	1,6
B12	30
B13	3
B14	-2

Вариант 2

№ задания	Ответ
B1	15
B2	6
B3	22,5
B4	220400
B5	13
B6	93
B7	3

№ задания	Ответ
B8	0,5
B9	4
B10	0,15
B11	0,5
B12	30
B13	4
B14	-5

Вариант 3

№ задания	Ответ
B1	10
B2	12
B3	4,5
B4	217000
B5	15
B6	127
B7	4

№ задания	Ответ
B8	-1,5
B9	6
B10	0,25
B11	1
B12	90
B13	3
B14	-4

Ответы к заданиям части 1

Вариант 4

№ задания	Ответ
B1	9
B2	8
B3	14
B4	367
B5	9
B6	45
B7	20

№ задания	Ответ
B8	0,25
B9	8
B10	0,03
B11	868
B12	32000
B13	78
B14	-5

Вариант 5

№ задания	Ответ
B1	7
B2	10000
B3	12
B4	347
B5	4
B6	153
B7	6

№ задания	Ответ
B8	-1,75
B9	9
B10	0,08
B11	336
B12	10000
B13	92
B14	10

Вариант 6

№ задания	Ответ
B1	3
B2	80000
B3	30
B4	292
B5	1
B6	51
B7	56

№ задания	Ответ
B8	-1,75
B9	18
B10	0,06
B11	84
B12	4500
B13	48
B14	5

Ответы к заданиям части 1

Вариант 7

№ задания	Ответ
B1	5
B2	800000
B3	10
B4	790
B5	2
B6	0,6
B7	3

№ задания	Ответ
B8	9
B9	4
B10	0,25
B11	18
B12	45
B13	8
B14	2

Вариант 8

№ задания	Ответ
B1	2
B2	6
B3	30
B4	930
B5	21
B6	0,6
B7	9

№ задания	Ответ
B8	8
B9	2
B10	0,375
B11	76
B12	32
B13	14
B14	-1

Вариант 9

№ задания	Ответ
B1	12
B2	15
B3	8
B4	5950
B5	16
B6	0,8
B7	24

№ задания	Ответ
B8	2
B9	12 ^x
B10	0,22 [#]
B11	35
B12	30
B13	44
B14	2

Ответы к заданиям части 1

Вариант 10

№ задания	Ответ
B1	55
B2	420000
B3	8
B4	4250
B5	29
B6	0,5
B7	9

№ задания	Ответ
B8	2
B9	4
B10	0,3
B11	21
B12	90
B13	56
B14	4

Критерии оценивания заданий части 2

Вариант 1

C1

а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3} \cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right].$$

Решение.

а) Преобразуем уравнение и разложим левую часть на множители:

$$2\sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3} \cos x = 0;$$

$$\sin x (\cos x - 2) - \sqrt{3} \cos x (\cos x - 2) = 0;$$

$$(\cos x - 2)(\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0.$$

Уравнение $\cos x - 2 = 0$ не имеет корней. Следовательно,

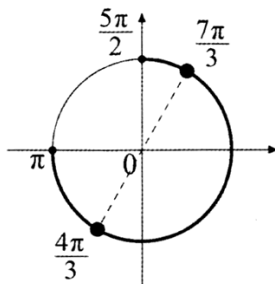
$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, это невозможно. Значит, $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получаем

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0.$$

Тогда $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$ принадлежат корни $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{7\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M – середина ребра SA , точка K – середина ребра SB . Найдите угол между плоскостями CMK и ABC , если $SC = 6$, $AB = 4$.

Решение.

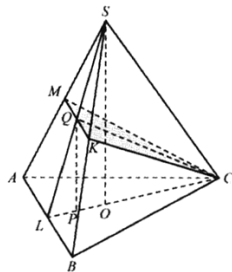
Проведем перпендикуляр CQ к MK , Q – середина MK . Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на медиане CL треугольника ABC . Прямая MK параллельна прямой пересечения плоскостей CMK и ABC , $QP \perp MK$ и $CQ \perp MK$. Следовательно, $\angle QCP$ – линейный угол искомого угла. Найдем QP и CP :

$$SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{6^2 - \frac{16}{3}} = 2\sqrt{\frac{23}{3}};$$

$$QP = \frac{1}{2}SO = \sqrt{\frac{23}{3}};$$

$$CP = \frac{5}{6}CL = \frac{5}{3}\sqrt{3}.$$

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \angle QCP = \frac{\sqrt{23} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 5} = \frac{\sqrt{23}}{5}.$$



$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{23}}{5}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обоснованно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{2x+1}(4x-5) + \log_{4x-5}(2x+1) \leq 2, \\ 9^x - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\log_{2x+1}(4x-5) + \frac{1}{\log_{2x+1}(4x-5)} \leq 2.$$

Сделаем замену $y = \log_{2x+1}(4x-5)$:

$$y + \frac{1}{y} \leq 2; \quad \frac{(y-1)^2}{y} \leq 0,$$

откуда $y = 1$ или $y < 0$.Если $\log_{2x+1}(4x-5) = 1$, то

$$\begin{cases} 2x+1 = 4x-5, \\ 2x+1 > 0, \\ 2x+1 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x = 3$.Если $\log_{2x+1}(4x-5) < 0$, то

$$\begin{cases} \frac{4x-5-1}{2x+1-1} < 0, \\ 2x+1 > 0, \\ 4x-5 > 0, \\ 2x+1 \neq 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \frac{4x-6}{x} < 0, \\ x > \frac{5}{4}; \end{cases}$$

$$\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}.$$

Решение неравенства: $\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}$ или $x = 3$.Решим второе неравенство. Разделим обе части на 4^x :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2\left(\frac{3}{2}\right)^x - 3 \leq 0.$$

Сделаем замену $z = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Получаем

$$z^2 - 2z - 3 \leq 0; \quad -1 \leq z \leq 3.$$

Обратная замена: $\left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 3; \quad x \leq \log_{1,5} 3$.

Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Учитывая, что $2 < \log_{1,5} 3 < 3$, находим решение системы: $\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но система решена неверно	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 135. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Решение.

Пусть $AD = 2BC$ (рис. 1). Четырёхугольники $ABCP$ и $B\dot{C}DP$ – параллелограммы, поэтому M и N – середины $B\dot{P}$ и $C\dot{P}$, значит, CM и BN – медианы треугольника BPC . Пусть h – высота трапеции. Положим $BC = a$, $AD = 2a$, $OM = x$. Тогда

$$\frac{a+2a}{2}h = \frac{3}{2}ah = 135, \quad ah = 90,$$

а $OC = 2x$, так как O – точка пересечения медиан треугольника BPC , поэтому

$$AM = MC = 3x, \quad OA = AM + OM = 3x + x = 4x, \quad \frac{OM}{OA} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{4}$, значит, треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{3}h = \frac{1}{24}ah = \frac{1}{24} \cdot 90 = \frac{15}{4}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = 2AD$ (рис. 2). Пусть h – высота трапеции. Положим $AD = a$, $BC = 2a$, $AM = 3t$. Тогда $ah = 90$.

Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, а треугольник AMP – треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC} = \frac{1}{4}$. Тогда

$$\frac{AM}{MC} = \frac{1}{4}, \quad MC = 12t, \quad AC = AM + MC = 15t, \quad AO = 5t, \quad MO = 2t,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{2t}{5t} = \frac{2}{5}$. Аналогично $\frac{ON}{OD} = \frac{2}{5}$.

Следовательно,

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}h = \frac{2}{75}ah = \frac{2}{75} \cdot 90 = \frac{12}{5}.$$

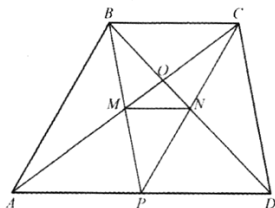


Рис. 1

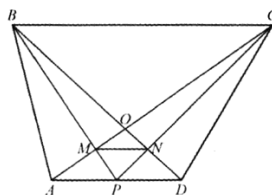


Рис. 2

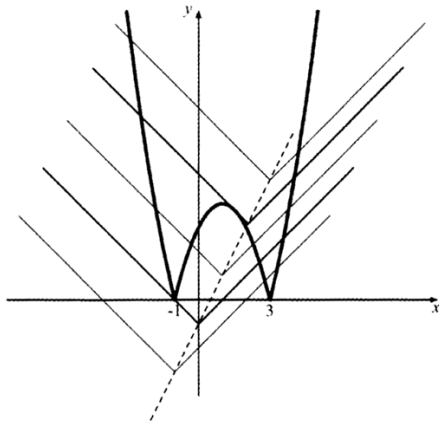
Ответ: $\frac{15}{4}$ или $\frac{12}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С5 При каких a уравнение $|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

Решение.

Запишем уравнение в виде $|x^2 - 2x - 3| = |x - a| + 2a - 1$. Построим график функции $y = |x^2 - 2x - 3|$ и график функции $y = |x - a| + 2a - 1$. Из рисунка видно, что подходящих значений a ровно два – при одном из них график правой части проходит через точку $(-1; 0)$ при другом – касается отражённого участка параболы. Первое, очевидно, происходит при $a = 0$, а второе – когда уравнение $3 + 2x - x^2 = 3a - 1 - x$ имеет единственный корень. Приравняв дискриминант к нулю, находим $a = \frac{25}{12}$.



Ответ: $0; \frac{25}{12}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован, или в обосновании содержатся мелкие неточности, например отсутствуют рисунки для различных значений параметра	3
Ход решения в целом верен, но ответ содержит посторонние числа, или найдено только одно из верных значений	2
Решение содержит верную геометрическую интерпретацию задачи или верный переход к равносильной системе без модулей, дальнейшие содержательные продвижения отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- С6** В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.
- а) Может ли в последовательности быть три члена?
 б) Может ли в последовательности быть четыре члена?
 в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

Решение.

а) Нет, поскольку $1 + 2046$ нечетно, а 2046 не является квадратом натурального числа.

б) Последовательность не может быть арифметической прогрессией, поскольку $2046 - 1$ не делится на 3.

Последовательность не может быть геометрической прогрессией, поскольку число 2046 не является кубом натурального числа.

Если первые три члена образуют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую, то эти числа: $1, q, q^2, 2q^2 - q$, но уравнение $2q^2 - q - 2046 = 0$ не имеет целых корней.

Если первые три члена образуют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую, то первые три числа: $1, a+1$ и $2a+1$, где a – натуральное число. Тогда последнее число должно равняться $\frac{(2a+1)^2}{a+1} = 4a + \frac{1}{a+1}$, а это не целое число.

в) Да, например 1, 2, 4, 6, 8, ..., 2046.

Содержание критерия	Баллы
Верно решены все три пункта	4
Верно решены два пункта: a и b или b и v	3
Верно решены два пункта: a и v или один пункт b	2
Верно решён только один из пунктов: a или v	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий части 2

Вариант 2

C1

а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3} \sin^2 x + 4\cos x - 4\sqrt{3} \sin x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение и разложим левую часть на множители:

$$2\sin x \cos x - 2\sqrt{3} \sin^2 x + 4\cos x - 4\sqrt{3} \sin x = 0;$$

$$\cos x (\sin x + 2) - \sqrt{3} \sin x (\sin x + 2) = 0;$$

$$(\sin x + 2)(\cos x - \sqrt{3} \sin x) = 0.$$

Уравнение $\sin x + 2 = 0$ не имеет корней. Следовательно,

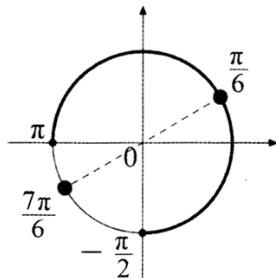
$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, это невозможно. Значит, $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3} \cos x$. Получаем

$$\operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

Тогда $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ принадлежит только корень $\frac{\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M – середина ребра SA , точка K – середина ребра SB . Найдите угол между плоскостями CMK и ABC , если $SC=8$, $AB=6$.

Решение.

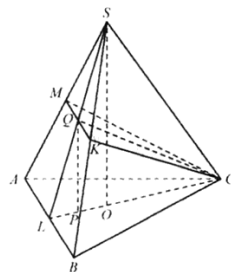
Проведем перпендикуляр CQ к MK , Q – середина MK . Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на медиане CL треугольника ABC . Прямая MK параллельна прямой пересечения плоскостей, $QP \perp MK$ и $CQ \perp MK$. Следовательно, $\angle QCP$ – линейный угол искомого угла. Найдем QP и CP :

$$SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 - 12} = 2\sqrt{13};$$

$$QP = \frac{1}{2}SO = \sqrt{13};$$

$$CP = \frac{5}{6}CL = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \angle QCP = \frac{\sqrt{13} \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 5} = \frac{2\sqrt{39}}{15}.$$



$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{39}}{15}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обоснованно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3x+1}(4x-6) + \log_{4x-6}(3x+1) \leq 2, \\ 16^x - 12^x - 2 \cdot 9^x \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\log_{3x+1}(4x-6) + \frac{1}{\log_{3x+1}(4x-6)} \leq 2.$$

Сделаем замену $y = \log_{3x+1}(4x-6)$:

$$y + \frac{1}{y} \leq 2; \quad \frac{(y-1)^2}{y} \leq 0,$$

откуда $y = 1$ или $y < 0$.Если $\log_{3x+1}(4x-6) = 1$, то

$$\begin{cases} 3x+1 = 4x-6, \\ 3x+1 > 0, \\ 3x+1 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x = 7$.Если $\log_{3x+1}(4x-6) < 0$, то

$$\begin{cases} \frac{4x-6-1}{3x+1-1} < 0, \\ 3x+1 > 0, \\ 4x-6 > 0, \\ 3x+1 \neq 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \frac{4x-7}{x} < 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$$
$$\frac{3}{2} < x < \frac{7}{4}.$$

Решение неравенства: $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{4}$ или $x = 7$.Решим второе неравенство. Разделим обе части на 9^x :

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{4}{3}\right)^x - 2 \leq 0.$$

Сделаем замену $z = \left(\frac{4}{3}\right)^x$. Получаем $z^2 - z - 2 \leq 0$; $-1 \leq z \leq 2$.

Обратная замена: $\left(\frac{4}{3}\right)^x \leq 2$; $x \leq \log_{\frac{4}{3}} 2$.

Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Учитывая, что $2 < \log_{4/3} 2 < 7$, находим решение системы: $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но система решена неверно	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Решение.

Пусть $AD = 2BC$ (рис. 1). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ – параллелограммы, поэтому M и N – середины BP и CP , значит, CM и BN – медианы треугольника BPC . Пусть h – высота трапеции. Положим $BC = a$, $AD = 2a$, $OM = x$. Тогда

$$\frac{a + 2a}{2}h = \frac{3}{2}ah = 810, \quad ah = 540,$$

а $OC = 2x$, так как O – точка пересечения медиан треугольника BPC , поэтому

$$AM = MC = 3x, \quad OA = AM + OM = 3x + x = 4x, \quad \frac{OM}{OA} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{4}$, значит, треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{3}h = \frac{1}{24}ah = \frac{1}{24} \cdot 540 = \frac{45}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = 2AD$ (рис. 2). Пусть h – высота трапеции. Положим $AD = a$, $BC = 2a$, $AM = 3t$. Тогда $ah = 540$.

Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, а треугольник AMP – треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC} = \frac{1}{4}$. Тогда

$$\frac{AM}{MC} = \frac{1}{4}, \quad MC = 12t, \quad AC = AM + MC = 15t, \quad AO = 5t, \quad MO = 2t,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{2t}{5t} = \frac{2}{5}$. Аналогично $\frac{ON}{OD} = \frac{2}{5}$. Следовательно,

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{3}h = \frac{2}{75}ah = \frac{2}{75} \cdot 540 = \frac{72}{5}.$$

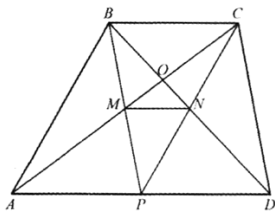


Рис. 1

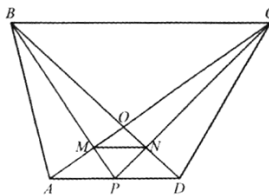


Рис. 2

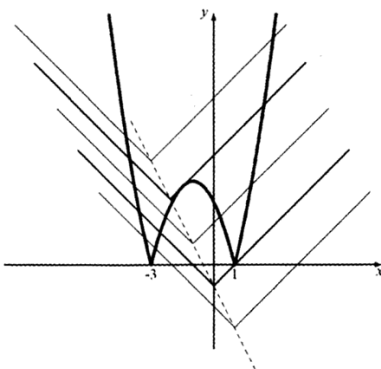
Ответ: $\frac{45}{2}$ или $\frac{72}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С5 При каких a уравнение $|x^2 + 2x - 3| - 2a = |x + a| - 1$ имеет ровно три корня?

Решение.

Запишем уравнение в виде $|x^2 + 2x - 3| = |x + a| + 2a - 1$. Построим графики функций $y = |x^2 + 2x - 3|$ и $y = |x + a| + 2a - 1$. Из рисунка видно, что подходящих значений a ровно два – при одном из них график правой части проходит через точку $(1; 0)$, при другом – касается отражённого участка параболы. Первое, очевидно, происходит при $a = 0$, а второе – когда уравнение $3 - 2x - x^2 = 3a - 1 + x$ имеет единственный корень. Приравнявая дискриминант к нулю, находим $a = \frac{25}{12}$.



Ответ: $0; \frac{25}{12}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован, или в обосновании содержатся мелкие неточности, например отсутствуют рисунки для различных значений параметра	3
Ход решения в целом верен, но ответ содержит посторонние числа, или найдено только одно из верных значений	2
Решение содержит верную геометрическую интерпретацию задачи или верный переход к равносильной системе без модулей, дальнейшие содержательные продвижения отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

С6

В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2076.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2076 членов?

а) Нет, поскольку $1 + 2076$ не делится на 2, а 2076 не является квадратом натурального числа.

б) Последовательность не может быть арифметической прогрессией, поскольку $2076 - 1$ не делится на 3.

Последовательность не может быть геометрической прогрессией, поскольку 2076 не является кубом натурального числа.

Если первые три члена образуют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую, то эти числа: $1, q, q^2, 2q^2 - q$, но уравнение $2q^2 - q - 2076 = 0$ не имеет целых корней.

Если первые три члена образуют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую, то эти числа: $1, a + 1$ и $2a + 1$ где a – натуральное число.

Тогда последнее число должно равняться $\frac{(2a+1)^2}{a+1} = 4a + \frac{1}{a+1}$, а это не натуральное число.

в) Да, например 1, 2, 4, 6, 8, ..., 2076.

Содержание критерия	Баллы
Верно решены все три пункта	4
Верно решены два пункта: a и b или b и v	3
Верно решены два пункта: a и v или один пункт b	2
Верно решен только один из пунктов: a или v	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий части 2

Вариант 3

C1

а) Решите уравнение $\cos^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x = \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение.

а) Перенесём все члены в левую часть, преобразуем и разложим левую часть на множители:

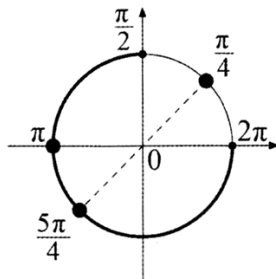
$$\begin{aligned}\cos^2 x - \sin x \cos x + \cos x - \sin x &= 0; \\ \cos x(\cos x + 1) - \sin x(\cos x + 1) &= 0; \\ (\cos x + 1)(\cos x - \sin x) &= 0.\end{aligned}$$

1 Если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2 Случай. Если $\cos x \neq -1$, то $\cos x - \sin x = 0$. При $\cos x = 0$ решений нет. Разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получаем

$$1 - \tan x = 0; \quad \tan x = 1.$$

Тогда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



б) Отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ принадлежат корни π и $\frac{5\pi}{4}$.

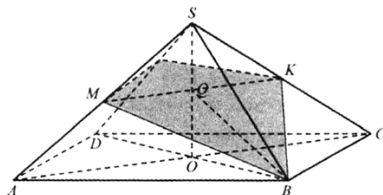
Ответ: а) $\pi + 2\pi k$, $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) π и $\frac{5\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка M – середина ребра SA , точка K – середина ребра SC . Найдите угол между плоскостями BMK и ABC , если $AB = 8$, $SC = 6$.

Решение.

Проведём из точки B перпендикуляр BQ к MK , Q – середина MK . Точка Q является серединой высоты SO . Прямая MK параллельна прямой пересечения плоскостей, $QB \perp MK$, $OB \perp MK$. Следовательно, $\angle QBO$ – линейный угол искомого угла. Найдём BO и QO :



$$BO = 4\sqrt{2}; \quad SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 32} = 2;$$

$$QO = \frac{1}{2}SO = 1.$$

Значит, $\operatorname{tg} \angle QBO = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 \log_{16} x \geq \log_{16} x^5 + x \log_2 x, \\ 4^x + 4^{-x} \geq \frac{10}{3}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$x^2 \cdot \frac{1}{4} \log_2 x \geq \frac{5}{4} \log_2 x + x \log_2 x.$$

Перенесём все члены в правую часть и умножим на 4:

$$x^2 \log_2 x - 4x \log_2 x - 5 \log_2 x \geq 0;$$

$$(x^2 - 4x - 5) \log_2 x \geq 0;$$

$$(x - 5)(x + 1) \log_2 x \geq 0.$$

Имеем $x > 0$, поэтому $x + 1 > 0$. Получаем $(x - 5) \log_2 x \geq 0$.

Решение неравенства: $0 < x \leq 1$, $x \geq 5$.

Решим второе неравенство. Заменяя $y = 4^x$, получаем.

$$y + \frac{1}{y} \geq \frac{10}{3}; \quad 3y^2 - 10y + 3 \geq 0; \quad y \leq \frac{1}{3} \text{ или } y \geq 3.$$

Если $4^x \leq \frac{1}{3}$, то $x \leq -\log_4 3$. Если $4^x \geq 3$, то $x \geq \log_4 3$.

Решением системы служит общая часть решений двух неравенств. Поскольку $0 < \log_4 3 < 1$, получаем $\log_4 3 \leq x \leq 1$ или $x \geq 5$.

Ответ: $[\log_4 3; 1]$, $[5; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4

Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Решение.

Пусть $AD = 3BC$ (рис. 1). Положим $BC = a$, $AD = 3a$, $OC = x$. Треугольник COB подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{3}$, а треугольник CMB подобен треугольнику AMP с коэффициентом $\frac{BC}{AP} = \frac{a}{\frac{3a}{2}} = \frac{2}{3}$, поэтому

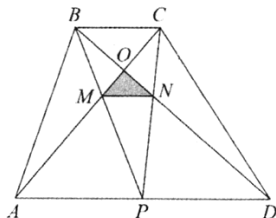


Рис. 1

$$OA = 3x; \quad AC = OA + OC = 3x + x = 4x;$$

$$MC = \frac{2}{5}AC = \frac{8}{5}x,$$

$$OM = MC - OC = \frac{8}{5}x - x = \frac{3}{5}x,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{\frac{3}{5}x}{3x} = \frac{1}{5}$. Аналогично $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{5}$.

Пусть h – высота трапеции. Тогда

$$\frac{a + 3a}{2}h = 2ah = 240, \quad ah = 120,$$

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{3}{4}h = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{3}{4}h = \frac{9}{8}ah = \frac{9}{8} \cdot 120 = 135,$$

а так как треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{1}{5}$, получаем

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 S_{\triangle AOD} = \frac{1}{25} \cdot 135 = \frac{27}{5}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = 3AD$ (рис. 2).

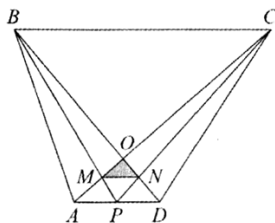


Рис. 2

Аналогично предыдущему получим, что $\frac{OM}{OA} = \frac{3}{7}$ и $S_{\triangle AOD} = 15$.

Следовательно,

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 S_{\triangle AOD} = \frac{9}{49} \cdot 15 = \frac{135}{49}.$$

Ответ: $\frac{27}{5}$ или $\frac{135}{49}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий части 2

Вариант 4

C1

а) Решите уравнение $\frac{1}{2}\sin 2x + \sin^2 x - \sin x = \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

а) Перенесем все члены в левую часть, преобразуем и разложим левую часть на множители:

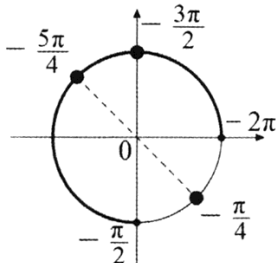
$$\begin{aligned}\sin x \cos x + \sin^2 x - \sin x - \cos x &= 0; \\ \sin x(\cos x + \sin x) - (\sin x + \cos x) &= 0; \\ (\sin x - 1)(\cos x + \sin x) &= 0.\end{aligned}$$

1 Случай. Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2 Случай. Если $\sin x \neq 1$, то $\cos x + \sin x = 0$. При $\cos x = 0$ решений нет. Разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получаем

$$1 + \operatorname{tg} x = 0; \operatorname{tg} x = -1.$$

Тогда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.



б) Отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $-\frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{5\pi}{4}$.

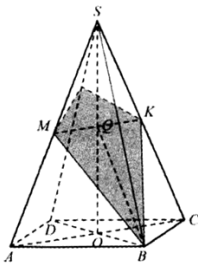
Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{5\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- С2** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка M – середина ребра SA , точка K – середина ребра SC . Найдите угол между плоскостями BMK и ABC , если $AB = 4$, $SC = 7$.

Решение.

Проведём из точки B перпендикуляр BQ к MK , Q – середина MK . Точка Q является серединой высоты SO . Прямая MK параллельна прямой пересечения плоскостей, $QB \perp MK$, $OB \perp MK$. Следовательно, $\angle QBO$ – линейный угол искомого угла. Найдём BO и QO :



$$BO = 2\sqrt{2}; \quad SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{49 - 8} = \sqrt{41};$$

$$QO = \frac{1}{2}SO = \frac{\sqrt{41}}{2}.$$

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \angle QBO = \frac{\sqrt{41}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{82}}{8}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{82}}{8}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 \log_{25} x \geq \log_{25} x^3 + x \log_5 x, \\ 5^x + 5^{-x} \geq \frac{17}{4}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$x^2 \cdot \frac{1}{2} \log_5 x \geq \frac{3}{2} \log_5 x + x \log_5 x.$$

Перенесём все члены в правую часть и умножим на 2:

$$x^2 \log_5 x - 2x \log_5 x - 3 \log_5 x \geq 0;$$

$$(x^2 - 2x - 3) \log_5 x \geq 0;$$

$$(x - 3)(x + 1) \log_5 x \geq 0.$$

Имеем $x > 0$, поэтому $x + 1 > 0$. Получаем $(x - 3) \log_5 x \geq 0$.

Решение первого неравенства: $0 < x \leq 1$, $x \geq 3$.

Решим второе неравенство. Заменив $y = 5^x$, получаем.

$$y + \frac{1}{y} \geq \frac{17}{4}; \quad 4y^2 - 17y + 4 \geq 0; \quad y \leq \frac{1}{4} \text{ или } y \geq 4.$$

Если $5^x \leq \frac{1}{4}$, то $x \leq -\log_5 4$. Если $5^x \geq 4$, то $x \geq \log_5 4$.

Решением системы служит общая часть решений двух неравенств. Поскольку $0 < \log_5 4 < 1$, получаем $\log_5 4 \leq x \leq 1$ или $x \geq 3$.

Ответ: $[\log_5 4; 1]$, $[3; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4

Площадь трапеции $ABCD$ равна 560. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции в полтора раза больше другого.

Решение.

Пусть $AD = \frac{3}{2}BC$ (рис. 1). Положим $BC = 2a$, $AD = 3a$, $OC = x$. Треугольник COB подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{BC}{AD} = \frac{2}{3}$, а треугольник CMB подобен треугольнику AMP с коэффициентом $\frac{BC}{AP} = \frac{2a}{\frac{3a}{2}} = \frac{4}{3}$, поэтому

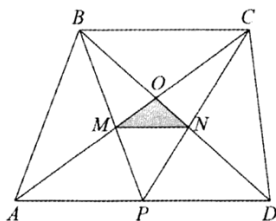


Рис. 1

$$OA = \frac{3}{2}x; \quad AC = OA + OC = \frac{3}{2}x + x = \frac{5}{2}x; \quad MC = \frac{4}{7}AC = \frac{10}{7}x;$$

$$OM = MC - OC = \frac{10}{7}x - x = \frac{3}{7}x,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{3}{7}x : \left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{2}{7}$. Аналогично $\frac{ON}{OD} = \frac{2}{7}$.

Пусть h – высота трапеции. Тогда

$$\frac{2a + 3a}{2}h = \frac{5}{2}ah = 560, \quad ah = 224,$$

$$S_{\triangle MOD} = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{3}{5}h = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{3}{5}h = \frac{9}{10}ah = \frac{9}{10} \cdot 224 = \frac{9 \cdot 112}{5},$$

а так как треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{2}{7}$, получаем

$$S_{\Delta MON} = \left(\frac{2}{7}\right)^2 S_{\Delta AOD} = \frac{4}{7 \cdot 7} \cdot \frac{9 \cdot 112}{5} = \frac{576}{35}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = \frac{3}{2}AD$ (рис. 2).

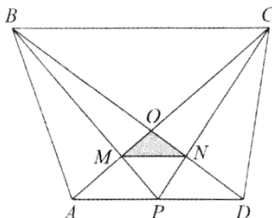


Рис. 2

Аналогично предыдущему получим, что $\frac{OM}{OA} = \frac{3}{8}$ и $S_{\Delta AOD} = \frac{448}{5}$. Следовательно,

$$S_{\Delta MON} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 S_{\Delta AOD} = \frac{9}{64} \cdot \frac{448}{5} = \frac{63}{5}.$$

Ответ: $\frac{576}{35}$ или $\frac{63}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий части 2

Вариант 5

C1

Дано уравнение $\operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 0$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Имеем

$$\operatorname{tg} x - \sin 2x = 0; \quad \frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x \cos x = 0;$$

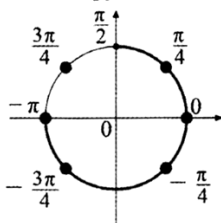
$$\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 2\cos x \right) = 0.$$

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin x \neq 0$, то

$$\frac{1 - 2\cos^2 x}{\cos x} = 0; \quad \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отметим решения на единичной окружности.



Отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $-\pi, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0$ и $\frac{\pi}{4}$.

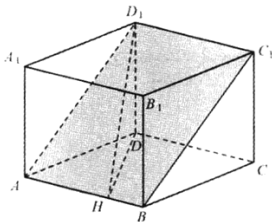
Ответ: а) $x = \pi k$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 Дана прямая призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Основание призмы — ромб со стороной 8 и острым углом 45° . Высота призмы равна 6. Найдите угол между плоскостью $AC_1 B$ и плоскостью ABD .

Решение.

Построим сечение призмы плоскостью $AC_1 B$. Получим параллелограмм $ABC_1 D_1$. Из точки D проведём перпендикуляр DH к прямой AB . Тогда $D_1 H \perp AB$. Плоский угол $DH D_1$ — искомый; $DH = AD \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$. Следовательно, $\operatorname{tg} \angle DH D_1 = \frac{DD_1}{DH} = \frac{6}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.



Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - 5,6x + 7,84)(x - 2,5) \leq 0, \\ \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3-x} \leq 5. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство: $(x - 2,8)^2(x - 2,5) \leq 0$. Решение: $x = 2,8$ или $x \leq 2,5$.

Решим второе неравенство:

$$\frac{5x^2 - 25x + 31}{(x-2)(3-x)} \leq 0.$$

Нули числителя: $\frac{25 - \sqrt{5}}{10}$ и $\frac{25 + \sqrt{5}}{10}$. Решение:

$$x < 2, \quad \frac{25 - \sqrt{5}}{10} \leq x \leq \frac{25 + \sqrt{5}}{10} \quad \text{или} \quad x > 3.$$

Решением системы является общая часть полученных решений двух неравенств:

$$\frac{25 + \sqrt{5}}{10} > 2,5 \quad \text{и} \quad \frac{25 + \sqrt{5}}{10} < \frac{25 + 3}{10} = 2,8.$$

Поэтому получаем $x < 2$ или $\frac{25 - \sqrt{5}}{10} \leq x \leq 2,5$.

Ответ: $(-\infty; 2), \left[\frac{25 - \sqrt{5}}{10}; 2,5 \right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 34$, $AC = 65$ и $BC = 93$. На стороне BC взята точка M , причём $AM = 20$. Найдите площадь треугольника AMB .

Решение.

Пусть p — полупериметр треугольника ABC , AH — высота треугольника. Тогда

$$p = \frac{34 + 65 + 93}{2} = \frac{192}{2} = 96.$$

По формуле Герона

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{96(96-34)(96-65)(96-93)} = \\ &= \sqrt{96 \cdot 62 \cdot 31 \cdot 3} = 31 \cdot 4 \cdot 6 = 31 \cdot 24. \end{aligned}$$

Тогда

$$AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 31 \cdot 24}{93} = 16.$$

Из прямоугольных треугольников AHM и AHB находим, что

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12,$$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30.$$

Если точка M лежит между точками B и H (рис. 1), то

$$BM = BH - MH = 30 - 12 = 18.$$

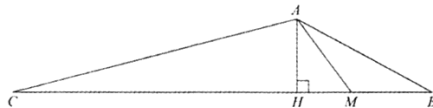


Рис. 1

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 16 = 144.$$

Если же точка M лежит между точками C и H (рис. 2), то

$$BM = BH + MH = 30 + 12 = 42.$$

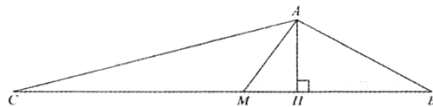


Рис. 2

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot 16 = 336.$$

Ответ: 144 или 336.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Критерии оценивания заданий части 2

Вариант 6

C1

Дано уравнение $\operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 0$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение.

а) Имеем

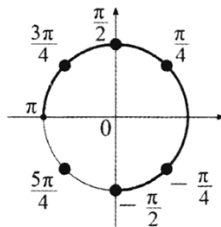
$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} x - \sin 2x &= 0; \quad \frac{\cos x}{\sin x} - 2\sin x \cos x = 0; \\ \cos x \left(\frac{1}{\sin x} - 2\sin x \right) &= 0.\end{aligned}$$

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x \neq 0$, то

$$\frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x} = 0; \quad \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отметим решения на единичной окружности.



Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ принадлежат корни $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

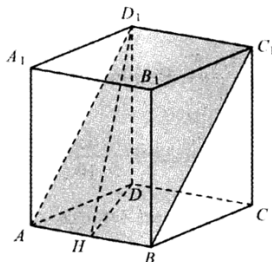
Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

С2 Дана прямая призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Основание призмы — ромб со стороной 4 и острым углом 60° . Высота призмы равна 5. Найдите угол между плоскостью $AC_1 B$ и плоскостью ABD .

Решение.

Построим сечение призмы плоскостью $AC_1 B$. Получим параллелограмм $ABC_1 D_1$. Из точки D проведём перпендикуляр DH к прямой AB . Тогда $D_1 H \perp AB$. Плоский угол DHD_1 — искомый; $DH = AD \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \angle DHD_1 = \frac{DD_1}{DH} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$


Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - 3,6x + 3,24)(x - 1,5) \leq 0, \\ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \leq 5. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство: $(x - 1,8)^2(x - 1,5) \leq 0$. Решение: $x = 1,8$ или $x \leq 1,5$.

Решим второе неравенство:

$$\frac{5x^2 - 15x + 11}{(x-1)(2-x)} \leq 0.$$

Нули числителя: $\frac{15 - \sqrt{5}}{10}$ и $\frac{15 + \sqrt{5}}{10}$. Решение:

$$x < 1, \quad \frac{15 - \sqrt{5}}{10} \leq x \leq \frac{15 + \sqrt{5}}{10} \quad \text{или} \quad x > 2.$$

Решением системы является общая часть полученных решений двух неравенств:

$$\frac{15 + \sqrt{5}}{10} > 1,5 \quad \text{и} \quad \frac{15 + \sqrt{5}}{10} < \frac{15 + 3}{10} = 1,8.$$

Поэтому получаем $x < 1$ или $\frac{15 - \sqrt{5}}{10} \leq x \leq 1,5$.

Ответ: $(-\infty; 1), \left[\frac{15 - \sqrt{5}}{10}; 1,5 \right]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 17$, $AC = 25$ и $BC = 28$. На стороне BC взята точка M , причём $AM = \sqrt{241}$. Найдите площадь треугольника AMB .

Решение.

Пусть p — полупериметр треугольника ABC , AH — высота треугольника. Тогда

$$p = \frac{17 + 25 + 28}{2} = \frac{70}{2} = 35.$$

По формуле Герона

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{35(35-17)(35-25)(35-28)} = \\ = \sqrt{35 \cdot 18 \cdot 10 \cdot 7} = 210.$$

$$\text{Тогда } AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 210}{28} = 15.$$

Из прямоугольных треугольников AHM и AHB находим, что

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{241 - 15^2} = 4,$$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8.$$

Если точка M лежит между точками B и H (рис. 1), то

$$BM = BH - MH = 8 - 4 = 4.$$

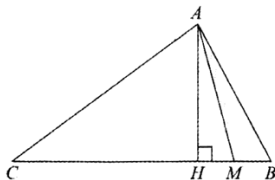


Рис. 1

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15 = 30.$$

Если же точка M лежит между точками C и H (рис. 2), то

$$BM = BH + MH = 8 + 4 = 12.$$

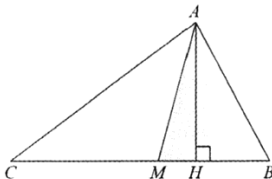


Рис. 2

Следовательно, $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12 = 90$.

Ответ: 30 или 90.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3