

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(x \cdot \ln a)' = \ln a + x \cdot \frac{1}{a};$$

ЕГЭ

$$11^2 = 121, 12^2 = 144, 13^2 = 169, 14^2 = 196, 15^2 = 225,$$

$$16^2 = 256, 17^2 = 289, 18^2 = 324, 19^2 = 361, 20^2 = 400$$



Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова



РЕШЕБНИК

МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 1.

РЕШЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

ЧАСТЬ 2.

Решения сборника задач
в электронном виде на www.legionr.ru

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2013

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»



Уважаемые читатели!

Загрузка с сайта издательства «Легион» (www.legionp.ru) является единственным официальным способом распространения пособия в электронном виде «Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2013. Часть II. Решения сборника задач».

ООО «Легион» не несет ответственности за содержание и/или вред, причиненные данным пособием в электронном виде, полученным из других источников.

Пользовательское соглашение.

1. Авторские права на пособие в электронном виде «Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2013. Часть II. Решения сборника задач» (далее — Пособие) принадлежат ООО «Легион» (далее — Издательство). Авторские права защищены законодательством РФ, охрана авторских прав Издательства регулируется Гражданским кодексом РФ, часть 4, главы 70, 71, Уголовным кодексом РФ, ст. 146, Кодексом РФ об административных правонарушениях, ст. 7.12.
2. Потребитель (читатель, посетитель сайта) имеет право безвозмездно произвести скачивание Пособия с сайта Издательства (www.legionp.ru) **только** для использования в учебных и/или ознакомительных целях.
3. Потребитель (читатель, посетитель сайта) не имеет права использовать Пособие в целях извлечения прибыли путем продажи электронной, бумажной и любых других видов копий Пособия либо любой его части.
4. С момента скачивания Пособия в электронном виде Потребитель (читатель, посетитель сайта) несет полную ответственность за использование Пособия. В случае обнаружения фактов незаконного использования материалов Пособия Издательство вправе осуществить защиту своих интересов в суде.

Рецензенты: *О. Б. Кожевников* — к.ф.-м.н., доцент
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель России.

Авторский коллектив:

Авилов Н. И., Войта Е. А., Вольфсон Б. И., Дерезин С. В., Евич Л. Н.,
Иванов С. О., Казьмин И. А., Коннова Е. Г., Корянов А. Г., Нужа Г. Л.,
Ольховая Л. С., Ольховой А. Ф., Прокофьев А. А., Резникова Н. М.,
Фофанов А. Е., Ханин Д. И.

М34 Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2013: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2012. — 272 с. — (Готовимся к ЕГЭ)

Данный решебник предназначен для самостоятельной или коллективной подготовки школьников к ЕГЭ. Он является логическим продолжением основной книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013» под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова.

Решебник состоит из двух частей.

Часть I — книга, которую Вы можете приобрести в магазинах своего региона. Она содержит решения всех вариантов учебно-тренировочных тестов учебно-методического пособия «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013» под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова за исключением решения варианта, представленного в самой книге.

Часть II — пособие, которое Вы сейчас читаете, представленное в электронном виде на сайте издательства www.legionr.ru в свободном (бесплатном) доступе. Оно содержит решения задач, вошедших в главу «Сборник задач для подготовки к ЕГЭ» основной книги.

Решебник поможет выпускнику быстро освоить весь необходимый материал и успешно подготовиться к ЕГЭ. Также он может быть полезен учителям и методистам.

© ООО «Легион», 2012.

Решения задач из задачника

$$1. 5^9 \cdot 6^{12} : 30^9 = \frac{5^9 \cdot 2^{12} \cdot 3^{12}}{5^9 \cdot 2^9 \cdot 3^9} = 2^3 \cdot 3^3 = 6^3 = 216.$$

Ответ: 216.

$$2. \frac{b^{4,44}}{b^{3,11} \cdot b^{3,33}} = \frac{b^{4,44}}{b^{6,44}} = \frac{1}{b^2}, \quad \frac{6^2}{(\sqrt{5})^2} = 36 : 5 = 7,2.$$

Ответ: 7,2.

$$3. 3^4 \cdot 7^5 : 21^4 = \frac{3^4 \cdot 7^5}{(3 \cdot 7)^4} = \frac{3^4 \cdot 7^5}{3^4 \cdot 7^4} = 7^1 = 7.$$

Ответ: 7.

$$4. (2x^4)^2 : 2x^8 = 2^2 \cdot (x^4)^2 : 2x^8 = 4x^8 : 2x^8 = 2.$$

Ответ: 2.

$$5. \frac{\left(4\frac{2}{7} \cdot 5\frac{1}{3}\right)^{21}}{10^8} = \frac{\left(4\frac{2}{7}\right)^{21} \cdot \left(5\frac{1}{3}\right)^{21}}{10^8} = \frac{4^6 \cdot 5^7}{10^8} = \frac{2^{12} \cdot 5^7}{(2 \cdot 5)^8} = \frac{2^{12} \cdot 5^7}{2^8 \cdot 5^8} = \\ = \frac{2^4}{5} = \frac{16}{5} = 3,2.$$

Ответ: 3,2.

$$6. \frac{(3a^2)^3 \cdot (4b)^2}{(12a^3b)^2} = \frac{27a^6 \cdot 16b^2}{144a^6b^2} = 3.$$

Ответ: 3.

$$7. \text{Подставим } a = 1 \text{ в выражение. } \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{4 - 3} = 1.$$

Ответ: 1.

$$8. \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14} + \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{14} - \sqrt{6}} = \frac{14 - \sqrt{14 \cdot 6} + \sqrt{14 \cdot 6} + 6}{14 - 6} = \frac{20}{8} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

$$9. \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{65} - \sqrt{45}} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{65} + \sqrt{45}} = \frac{\sqrt{45}(\sqrt{65} + \sqrt{45}) + \sqrt{65}(\sqrt{65} - \sqrt{45})}{65 - 45} =$$

$$= \frac{45 + 65}{20} = 5,5.$$

Ответ: 5,5.

$$10. 2^{3-\sqrt{2}} \cdot 2^{3+\sqrt{2}} - 100 = 2^{3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2}} - 100 = 2^6 - 100 = 64 - 100 = -36.$$

Ответ: -36.

$$11. 3^{2+\sqrt{3}} \cdot 3^{2-\sqrt{3}} + 3^2 = 3^{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})} + 3^2 = 3^4 + 3^2 = 81 + 9 = 90.$$

Ответ: 90.

$$12. 3 \cdot \sqrt[3]{216} \cdot \left(\frac{4}{9}\right) = \frac{3 \cdot 6 \cdot 4}{9} = 8.$$

Ответ: 8.

$$13. \frac{20}{\sqrt[5]{1024}} \cdot \frac{3^2}{5^2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3^2}{4 \cdot 5^2} = \frac{9}{5} = 1,8.$$

Ответ: 1,8.

$$14. \frac{(\sqrt[11]{5 \cdot a^7})^{33}}{a^{21}} = \frac{(\sqrt[11]{5^{33} \cdot a^{33 \cdot 7}})}{a^{21}} = \frac{5^3 \cdot a^{21}}{a^{21}} = 5^3 = 125.$$

Ответ: 125.

$$15. \frac{\sqrt[11]{81 \sqrt[11]{m}}}{\sqrt[11]{2048 \sqrt{m}}} = \frac{\sqrt[11]{3^4 \cdot m^{\frac{1}{11}}}}{\sqrt[11]{2^{11} \cdot m^{\frac{1}{2}}}} = \frac{3^2 \cdot m^{\frac{1}{22}}}{2 \cdot m^{\frac{1}{22}}} = 4\frac{1}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

$$16. 2x - 7 + \sqrt{4x^2 - 20x + 25} = 2x - 7 + \sqrt{(2x - 5)^2} = 2x - 7 + |2x - 5|.$$

Подставим $x = 2,5$, получим $2x - 7 + |2x - 5| = -2$.

Ответ: -2.

17. Учитывая условие $3 < a < 7,5$, получим:

$$\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(2a-15)^2} = |a-2| + |a-3| + |2a-15| = a-2 + a-3 - 2a+15 = 10.$$

Ответ: 10.

$$18. \frac{18 \sqrt[65]{\sqrt[33]{a}} - 11 \sqrt[15]{\sqrt[143]{a}}}{14 \sqrt[39]{\sqrt[55]{a}}} = \frac{18 \sqrt[2145]{a} - 11 \sqrt[2145]{a}}{14 \sqrt[2145]{a}} =$$

$$= \frac{(18 - 11) \sqrt[2145]{a}}{14 \sqrt[2145]{a}} = \frac{7}{14} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

$$19. (\sqrt{15} - \sqrt{2})(\sqrt{15} + \sqrt{2}) = (\sqrt{15})^2 - (\sqrt{2})^2 = 15 - 2 = 13.$$

Ответ: 13.

$$20. 3^{\sqrt{3}-1} \cdot 3^{3-\sqrt{3}} = 3^{(\sqrt{3}-1)+(3-\sqrt{3})} = 3^2 = 9.$$

Ответ: 9.

$$21. \sqrt{435^2 - 300^2} = \sqrt{(435 - 300)(435 + 300)} = \sqrt{135 \cdot 735} = \\ = \sqrt{(3^3 \cdot 5)(7^2 \cdot 3 \cdot 5)} = \sqrt{3^4 \cdot 7^2 \cdot 5^2} = 3^2 \cdot 7 \cdot 5 = 315.$$

Ответ: 315.

$$22. \frac{\sqrt[2]{\sqrt[6]{a}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{27} \sqrt[4]{a}}} = \frac{12\sqrt[6]{a}}{\frac{1}{3} \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \frac{3 \cdot 12\sqrt[6]{a}}{12\sqrt[6]{a}} = 3.$$

Ответ: 3.

$$23. \sqrt{(b-3)^2} + \sqrt{(b-13)^2} = |b-3| + |b-13| = b-3 + (13-b) = 10.$$

Ответ: 10.

$$24. f(3x+4) = \sqrt[5]{(3x+4)-8} + \sqrt[5]{3x+4} = \sqrt[5]{3x-4} + \sqrt[5]{3x+4}; \\ f(4-3x) = \sqrt[5]{(4-3x)-8} + \sqrt[5]{4-3x} = \\ = \sqrt[5]{-3x-4} + \sqrt[5]{4-3x} = -\sqrt[5]{3x+4} - \sqrt[5]{3x-4}; \\ \text{тогда } f(3x+4) + f(4-3x) = \sqrt[5]{3x-4} + \sqrt[5]{3x+4} - \sqrt[5]{3x+4} - \sqrt[5]{3x-4} = 0.$$

Ответ: 0.

$$25. \frac{3-7\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x} = \frac{3\sqrt{x}-7x-3\sqrt{x}}{x} = -7.$$

Ответ: -7.

$$26. \left(\sqrt{3\frac{5}{17}} - \sqrt{7\frac{7}{17}} \right) : \sqrt{\frac{7}{34}} = \frac{\sqrt{56} - \sqrt{126}}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{7}} = \\ = (\sqrt{8} - \sqrt{18}) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} - \sqrt{36} = 4 - 6 = -2.$$

Ответ: -2.

$$27. \frac{25 \sqrt[10]{2m}}{\sqrt[30]{2m} \cdot \sqrt[15]{2m}} = 25 \cdot (2m)^{\frac{1}{10} - \frac{1}{30} - \frac{1}{15}} = 25 \cdot (2m)^{\frac{3-1-2}{30}} = 25.$$

Ответ: 25.

$$28. \sqrt{t^2 - 16t + 64} + t = \sqrt{(t-8)^2} + t = |t-8| + t. \text{ Так как } t \leq 8, \text{ то } \\ |t-8| = 8-t \text{ и } |t-8| + t = 8.$$

Ответ: 8.

$$29. \sqrt{(b-12)^2} + \sqrt{(b-7)^2} = |b-12| + |b-7|. \text{ Так как } 7 \leq b \leq 12, \text{ то } \\ |b-12| = 12-b \text{ и } |b-7| = b-7. \text{ Поэтому } |b-12| + |b-7| = 12-b+b-7 = 5.$$

Ответ: 5.

$$30. \frac{\sqrt[4]{b^3} \cdot (\sqrt[7]{b})^2}{b^{2,75}} = b^{\frac{3}{4}} \cdot 7b^2 \cdot b^{-2,75} = 7b^{0,75+2-2,75} = 7.$$

Ответ: 7.

$$31. \log_7 21 \cdot \log_7 21 - \log_7(7 \cdot 21) \cdot \log_7 3 = \\ = (\log_7(7 \cdot 3))^2 - \log_7(7^2 \cdot 3) \cdot \log_7 3 = \\ = (\log_7 7 + \log_7 3)^2 - (\log_7 7^2 + \log_7 3) \cdot \log_7 3 =$$

$$= (1 + \log_7 3)^2 - (2 + \log_7 3) \cdot \log_7 3 = \\ = 1 + 2 \log_7 3 + \log_7^2 3 - 2 \log_7 3 - \log_7^2 3 = 1.$$

Ответ: 1.

$$32. \log_2^2 3 + \frac{\log_2 12}{\log_{12} 2} - \frac{\log_2 144}{\log_3 2} = \log_2^2 3 + \log_2^2 12 - \log_2 144 \cdot \log_2 3 = \\ = \log_2^2 3 + \log_2^2 12 - 2 \log_2 12 \cdot \log_2 3 = (\log_2 12 - \log_2 3)^2 = \log_2^2 4 = 2^2 = 4.$$

Ответ: 4.

$$33. (3 \log_{27} 3,5 - \log_3 10,5 - 1) \cdot 5^{3 \log_5 2} = \\ = (\log_3 3,5 - \log_3 10,5 - 1) \cdot 8 = \left(\log_3 \frac{1}{3} - 1 \right) \cdot 8 = -2 \cdot 8 = -16.$$

Ответ: -16.

$$34. 5 \log_3 49 \cdot \log_7 81 + 17^{\log_{17} 8} = 10 \log_3 7 \cdot 4 \log_7 3 + 8 = \\ = 40 \frac{\log_3 7}{\log_3 7} + 8 = 48.$$

Ответ: 48.

35. Воспользуемся следующим свойством логарифмов:

$\log_a b \log_b c = \log_a b^{\log_b c} = \log_a c$. Получим:

$$\log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_5 8 \cdot \log_7 9 = \log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_5 2^3 \cdot \log_7 3^2 = \\ 6 \log_3 5 \cdot \log_5 2 \cdot \log_2 7 \cdot \log_7 3 = 6 \log_3 2 \cdot \log_2 3 = 6.$$

Ответ: 6.

36. Воспользуемся следующим свойством логарифмов:

$\log_a b \log_b c = \log_a b^{\log_b c} = \log_a c$. Получим:

$$\log_{36} 5 \cdot \log_8 3 \cdot \log_{25} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{3}} 6 = \log_{6^2} 5 \cdot \log_{2^3} 3 \cdot \log_{5^2} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{3}} 6 = \\ 0,25 \log_6 5 \cdot \log_5 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 6 = 0,25 \log_6 2 \cdot \log_2 6 = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

$$37. \lg 2 \cdot \log_5 10 \cdot \log_2 5 = \left(\lg 2 \cdot \frac{1}{\lg 5} \right) \cdot \log_2 5 = \frac{\lg 2}{\lg 5} \cdot \log_2 5 = \log_5 2 \cdot \log_2 5 = 1.$$

Ответ: 1.

$$38. 98 \cdot 7^{\log_7 \frac{1}{49}} = 98 \cdot \frac{1}{49} = 2.$$

Ответ: 2.

$$39. 256 \cdot 4^{\log_4 \frac{1}{64}} = 256 \cdot \frac{1}{64} = 2^8 \cdot 2^{-6} = 2^2 = 4.$$

Ответ: 4.

$$40. 11 - 3 \log_3 \sqrt{3} = 11 - 3 \log_3 3^{\frac{1}{2}} = 11 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 11 - 1,5 = 9,5.$$

Ответ: 9,5.

$$41. 13 - 3 \cdot \log_2 \sqrt{8} = 13 - 3 \cdot \log_2 8^{\frac{1}{2}} = 13 - \frac{3}{2} \cdot \log_2 2^3 = 13 - 4,5 = 8,5.$$

Ответ: 8,5.

$$42. 49^{\log_7 4} = (7^2)^{\log_7 4} = (7^{\log_7 4})^2 = 4^2 = 16.$$

Ответ: 16.

$$43. 4^{2+\log_4 7} = 4^2 \cdot 4^{\log_4 7} = 16 \cdot 7 = 112.$$

Ответ: 112.

$$44. 5^{2+\log_5 12} = 5^2 \cdot 5^{\log_5 12} = 25 \cdot 12 = 300.$$

Ответ: 300.

$$45. 5^{2+\log_5 4} = 5^2 \cdot 5^{\log_5 4} = 25 \cdot 4 = 100.$$

Ответ: 100.

$$46. 2^{\log_2 7+3} = 2^{\log_2 7} \cdot 2^3 = 7 \cdot 8 = 56.$$

Ответ: 56.

$$47. 8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125.$$

Ответ: 125.

$$48. 9^{\frac{\ln 6}{\ln 3}} = (3^2)^{\log_3 6} = (3^{\log_3 6})^2 = 6^2 = 36.$$

Ответ: 36.

$$49. \frac{\log_7 \sqrt[5]{35}}{\log_7 35} = \frac{1}{5} = 0,2; \quad \text{т.к.} \quad \log_7 \sqrt[5]{35} = \frac{1}{5} \log_7 35.$$

Ответ: 0,2.

$$50. \frac{\ln 42}{\ln \sqrt[3]{42}} = \frac{\ln 42}{\frac{1}{3} \ln 42} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Ответ: 3.

$$51. \log_4 5 \cdot \log_5 64 = \frac{1}{\log_5 4} \cdot \log_5 4^3 = \frac{3 \log_5 4}{\log_5 4} = 3.$$

Ответ: 3.

$$52. \log_{625} 7 \cdot \log_7 5 = \frac{1}{\log_7 625} \cdot \log_7 5 = \frac{\log_7 5}{\log_7 5^4} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

$$53. 102 \log_5 \sqrt[6]{5} = 102 \cdot \frac{1}{6} \log_5 5 = \frac{102}{6} = 17.$$

Ответ: 17.

$$54. 108 \log_{11} \sqrt[8]{11} = \frac{108}{8} \log_{11} 11 = \frac{108}{8} = 13,5.$$

Ответ: 13,5.

$$\begin{aligned} 55. \log_{81} \log_7 343 &= \log_{81} \log_7 7^3 = \log_{81} 3 = \log_{3^4} 3 = \frac{1}{4} \log_3 3 = \\ &= \frac{1}{4} = 0,25. \end{aligned}$$

Ответ: 0,25.

$$\begin{aligned} 56. 5 \cdot 4^{\log_2 3+1} &= 5 \cdot (2^2)^{\log_2 3+1} = 5 \cdot 2^{2(\log_2 3+1)} = 5 \cdot 2^{2\log_2 3+2} = \\ &= 5 \cdot 2^{\log_2 9} \cdot 2^2 = 5 \cdot 9 \cdot 4 = 180. \end{aligned}$$

Ответ: 180.

$$57. 7^{3 \log_7 4} = 7^{\log_7 4^3} = 4^3 = 64.$$

Ответ: 64.

$$58. 144^{\log_{12} 14} = 12^{2 \log_{12} 14} = 12^{\log_{12} 14^{12}} = 14^2 = 196.$$

Ответ: 196.

$$59. \log_4 25,6 + \log_4 10 = \log_4 256 = 4.$$

Ответ: 4.

$$60. \text{Так как } 4 + \log_3 6 = \log_3 81 + \log_3 6 = \log_3 486, \text{ то } 3^{\log_3 486} = 486.$$

Ответ: 486.

$$61. \text{Так как } 2 + \log_4 121 = \log_2 4 + \log_2 11 = \log_2 44, \text{ то } 2^{\log_2 44} = 44.$$

Ответ: 44.

$$62. \log_3 81 + \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 \left(81 \cdot \frac{1}{9} \right) = \log_3 9 = 2.$$

Ответ: 2.

$$63. \log_4 8 + \log_9 81 = \frac{3}{2} \log_2 2 + 2 = 3,5.$$

Ответ: 3,5.

$$\begin{aligned} 64. \left(5^{\log_2 5} \right)^{\log_5 4} &= 5^{\log_2 5 \cdot \log_5 4} = \left(5^{\log_5 4} \right)^{\log_2 5} = 4^{\log_2 5} = \\ &= (2^2)^{\log_2 5} = 2^{2 \cdot \log_2 5} = 2^{\log_2 5^2} = 5^2 = 25. \end{aligned}$$

Ответ: 25.

$$65. \log_{\frac{1}{5}} \sqrt[4]{5} = \log_{5^{-1}} 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_{5^{-1}} 5 = -\frac{1}{4} \log_5 5 = -0,25.$$

Ответ: -0,25.

$$66. \frac{15}{7^{\log_7 6}} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

$$67. \log_2 1,6 + \log_2 10 = \log_2 (1,6 \cdot 10) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4.$$

Ответ: 4.

$$68. \frac{\log_{17} 1,5}{\log_{17} 7} + \log_7 \log_2 \sqrt[3]{4} = \log_7 1,5 + \log_7 \log_2 2^{\frac{2}{3}} = \log_7 \frac{3}{2} + \log_7 \frac{2}{3} =$$

$$= \log_7 1 = 0.$$

Ответ: 0.

$$\begin{aligned} 69. \log_{\sqrt{a}}(a^2 b^3) &= \log_{a^{\frac{1}{2}}}(a^2 b^3) = 2 \log_a(a^2 b^3) = 2(\log_a a^2 + \log_a b^3) = \\ &= 2(2 + 3 \log_a b) = 4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_b a} = 4 + \frac{6}{1,5} = 8. \end{aligned}$$

Ответ: 8.

$$\begin{aligned} 70. (2 - \log_5 250)(2 + \log_{10} 0,05) &= (2 - \log_5(25 \cdot 10)) \cdot \left(2 + \log_{10} \frac{5}{100}\right) = \\ &= (2 - 2 - \log_5 10)(2 + \log_{10} 5 - 2) = -\log_5 10 \cdot \log_{10} 5 = \\ &= -\log_5 10 \cdot \frac{1}{\log_5 10} = -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1.

$$71. \frac{42}{5^{\log_5 7}} = \frac{42}{7} = 6.$$

Ответ: 6.

$$72. \log_5 12,5 + \log_5 10 = \log_5(12,5 \cdot 10) = \log_5 125 = 3.$$

Ответ: 3.

$$\begin{aligned} 73. (1 - \log_9 45)(1 - \log_5 45) &= (\log_9 45 - \log_9 9)(\log_5 45 - \log_5 5) = \\ &= \log_9 \frac{45}{9} \cdot \log_5 \frac{45}{5} = \log_9 5 \cdot \log_5 9 = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$74. \log_{0,2} 7 \cdot \log_7 0,04 = \log_{0,2} 0,04 = 2.$$

Ответ: 2.

$$75. \log_{0,7} 10 - \log_{0,7} 7 = \log_{0,7} \frac{10}{7} = -\log_{0,7} \frac{7}{10} = -1.$$

Ответ: -1.

$$76. \log_{13} 0,25 + \frac{\log_3 4}{\log_3 13} = \log_{13} \frac{1}{4} + \log_{13} 4 = \log_{13} \left(\frac{1}{4} \cdot 4\right) = 0.$$

Ответ: 0.

$$\begin{aligned} 77. \frac{\cos 71^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cos 19^\circ}{2 \cos 69^\circ \cos 8^\circ + 2 \cos 82^\circ \cos 21^\circ} &= \\ &= \frac{\cos 71^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \sin 71^\circ}{2(\cos 69^\circ \cos 8^\circ + \sin 8^\circ \sin 69^\circ)} = \frac{\cos 61^\circ}{2 \cos 61^\circ} = \frac{1}{2} = 0,5. \end{aligned}$$

Ответ: 0,5.

$$78. \frac{3(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)}{2 \sin 70^\circ} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-3 \cdot 2 \sin 45^\circ \cos 35^\circ \cdot 2 \sin 45^\circ \sin 35^\circ}{2 \sin 70^\circ} = \frac{-3 \sin 70^\circ \cdot 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 \sin 70^\circ} = \\
 &= \frac{-3 \sin 70^\circ}{2 \sin 70^\circ} = -1,5.
 \end{aligned}$$

Ответ: $-1,5$.

$$79. \sin 30^\circ (\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \sin 18^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: $0,25$.

$$\begin{aligned}
 80. \cos 60^\circ (\cos 25^\circ \cos 35^\circ - \sin 25^\circ \sin 35^\circ) &= \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = \\
 &= \frac{1}{4} = 0,25.
 \end{aligned}$$

Ответ: $0,25$.

$$\begin{aligned}
 81. \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ &= \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \\
 &= \frac{2 \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 10^\circ}{2 \cos 10^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{4 \cos 10^\circ} = \\
 &= \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{8 \cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{8 \sin 80^\circ} = \frac{1}{8} = 0,125.
 \end{aligned}$$

Ответ: $0,125$.

$$\begin{aligned}
 82. \frac{\cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 68^\circ \cdot \cos 8^\circ + \cos 82^\circ \cdot \cos 22^\circ} &= \\
 &= \frac{\cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\cos 68^\circ \cdot \cos 8^\circ + \sin 8^\circ \cdot \sin 68^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: 1 .

$$\begin{aligned}
 83. \frac{8 \sin 36^\circ (\cos 36^\circ - \sin 18^\circ)}{\cos 54^\circ} &= \frac{4(\sin 72^\circ - 2 \sin 36^\circ \sin 18^\circ)}{\cos 54^\circ} = \\
 &= \frac{4(\cos 18^\circ - \cos 18^\circ + \cos 54^\circ)}{\cos 54^\circ} = 4.
 \end{aligned}$$

Ответ: 4 .

$$\begin{aligned}
 84. \frac{\sqrt{3}}{\sin 40^\circ} + \frac{1}{\cos 40^\circ} &= \frac{\sqrt{3} \cos 40^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \\
 &= \frac{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 40^\circ + \frac{1}{2} \sin 40^\circ \right)}{\frac{1}{2} \sin 80^\circ} = \frac{2(\cos(40^\circ - 30^\circ))}{\frac{1}{2} \sin 80^\circ} = \frac{4 \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 4.
 \end{aligned}$$

Ответ: 4 .

$$85. \cos 15^\circ \cos 45^\circ - \cos 45^\circ \cos 75^\circ = \cos 15^\circ \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \sin 15^\circ =$$

$$= \cos 60^\circ = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

$$\begin{aligned} 86. \quad & \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 15^\circ \cos 105^\circ}{\sin 18^\circ \sin 63^\circ + \sin 108^\circ \sin 27^\circ} = \\ & = \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos 75^\circ \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ}{\sin 18^\circ \sin 63^\circ + \cos 18^\circ \cos 63^\circ} = \\ & = \frac{7}{\sqrt{2}} \frac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{7 \cdot 1 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{7}{2} = 3,5. \end{aligned}$$

Ответ: 3,5.

$$87. \text{ Так как } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \cos \alpha > 0 \text{ и } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8;$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(\alpha + 7\pi) - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} \alpha + \sin 2\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ & = \frac{0,6}{0,8} + 2 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 1,71. \end{aligned}$$

Ответ: 1,71.

$$\begin{aligned} 88. \quad & 5 \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + 2 \cos(\alpha + 3\pi) = 5 \cos \alpha - 2 \cos \alpha = \frac{3}{4} = 0,75, \text{ так как} \\ & \cos \alpha = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: 0,75.

$$89. \text{ Так как } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0, \text{ то } \sin \alpha < 0. \text{ Так как } \cos \frac{5}{13}, \text{ то}$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{5^2}{13^2}} = -\frac{12}{13};$$

$$2 \operatorname{tg}(\alpha - 5\pi) + \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5} = -2,4.$$

Ответ: -2,4.

$$\begin{aligned} 90. \quad & 2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 3 \sin^2(\alpha - \pi) = -2 \sin \alpha + 3 \sin^2 \alpha = \\ & = -2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5^2 = -1 + 0,75 = -0,25, \text{ так как } \sin \alpha = 0,5. \end{aligned}$$

Ответ: -0,25.

$$91. \sin 2\alpha - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(\pi - \alpha) + \cos^2(\alpha + \pi) = 2 \sin \alpha \cos \alpha -$$

$$-2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0,75, \text{ так как } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: 0,75.

$$\begin{aligned} 92. \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin 2x} &= \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin 2x} = -\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \\ &= -\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = 1, \text{ так как } x = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$93. 1 - (\cos 45^\circ \cos 15^\circ - \sin 15^\circ \sin 45^\circ)^2 = 1 - (\cos(45^\circ + 15^\circ))^2 = \\ = 1 - \cos^2 60^\circ = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

$$\begin{aligned} 94. (\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ - \sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ)^2 + 0,5 &= (\sin(75^\circ - 15^\circ))^2 + \\ + 0,5 &= (\sin 60^\circ)^2 + 0,5 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0,5 = 0,75 + 0,5 = 1,25. \end{aligned}$$

Ответ: 1,25.

$$\begin{aligned} 95. \frac{\sqrt{2}(\sin 70^\circ + \sin 20^\circ)}{\cos 25^\circ} &= \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \sin \frac{70^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{70^\circ - 20^\circ}{2}}{\cos 25^\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ} = \sqrt{2} \cdot 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

$$\begin{aligned} 96. \frac{\cos 50^\circ + \cos 40^\circ}{\sqrt{2} \cos 5^\circ} &= \frac{2 \cos \frac{50^\circ + 40^\circ}{2} \cdot \cos \frac{50^\circ - 40^\circ}{2}}{\sqrt{2} \cos 5^\circ} = \\ &= \frac{2 \cos 45^\circ \cdot \cos 5^\circ}{\sqrt{2} \cos 5^\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$97. \sin^2 t + \cos^2 t - 3 \sin \pi + 7 \cos \pi = 1 - 3 \cdot 0 + 7 \cdot (-1) = -6.$$

Ответ: -6.

$$\begin{aligned} 98. \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 4 &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 4 = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) + 4 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 5. \end{aligned}$$

Ответ: 5.

$$99. 2\left(3 - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}\right) = 2\left(3 - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2\left(3 - \frac{1}{4}\right) = 5,5.$$

Ответ: 5,5.

100. $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, значит $\sin \alpha < 0$.

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{15}{16}} = -\frac{1}{4} = -0,25.$$

Ответ: $-0,25$.

101. $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, значит, $\cos \alpha < 0$.

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{24}{25}} = -\frac{1}{5} = -0,2.$$

Ответ: $-0,2$.

$$\begin{aligned} 102. \frac{12 \sin 76^\circ}{\sin 38^\circ \cdot \sin 52^\circ} &= \frac{12 \cdot 2 \sin 38^\circ \cdot \cos 38^\circ}{\sin 38^\circ \cdot \sin(90^\circ - 38^\circ)} = \\ &= \frac{24 \cos 38^\circ}{\cos 38^\circ} = 24. \end{aligned}$$

Ответ: 24.

$$103. \frac{15 \sin 68^\circ}{\sin 34^\circ \cdot \sin 56^\circ} = \frac{15 \cdot 2 \sin 34^\circ \cdot \cos 34^\circ}{\sin 34^\circ \cdot \sin(90^\circ - 34^\circ)} = \frac{30 \cos 34^\circ}{\cos 34^\circ} = 30.$$

Ответ: 30.

$$104. \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot 0,16 - 1 = 0,32 - 1 = -0,68.$$

Ответ: $-0,68$.

$$105. \frac{7 \operatorname{tg} 138^\circ}{0,2 \operatorname{tg} 42^\circ} = 35 \cdot \frac{\operatorname{tg} 138^\circ}{\operatorname{tg} 42^\circ} = 35 \cdot \frac{\operatorname{tg}(180^\circ - 42^\circ)}{\operatorname{tg} 42^\circ} = 35 \cdot \frac{-\operatorname{tg} 42^\circ}{\operatorname{tg} 42^\circ} = -35.$$

Ответ: -35 .

$$\begin{aligned} 106. \frac{9}{4 \cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{113\pi}{3}\right)} &= \frac{9}{4 \cos\left(-4\frac{1}{6}\pi\right) \cdot \sin\left(38\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = \\ &= \frac{9}{4 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{9}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{9}{3} = -3. \end{aligned}$$

Ответ: -3 .

107. Так как $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\sin \alpha < 0$ и тогда

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{65}} = -\sqrt{\frac{49}{65}} = -\frac{7}{\sqrt{65}},$$

$$\text{откуда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7}{4} = 1,75.$$

Ответ: 1,75.

$$108. 0,35 = \frac{5 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 14 \cos \alpha} = \frac{5 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 3}{3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 14} = \frac{5 \operatorname{tg} \alpha - 3}{3 \operatorname{tg} \alpha + 14},$$

$$\frac{5 \operatorname{tg} \alpha - 3}{3 \operatorname{tg} \alpha + 14} = 0,35; 5 \operatorname{tg} \alpha - 3 = 1,05 \operatorname{tg} \alpha + 4,9; 3,95 \operatorname{tg} \alpha = 7,9; \operatorname{tg} \alpha = 2.$$

Ответ: 2.

$$109. 8\sqrt{6} \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 8\sqrt{6} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 8\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot 6 = 12.$$

Ответ: 12.

$$110. \frac{6 \sin 37^\circ \cdot \sin 53^\circ}{\sin 74^\circ} = \frac{6 \sin 37^\circ \sin(90^\circ - 37^\circ)}{2 \sin 37^\circ \cos 37^\circ} = \frac{3 \cos 37^\circ}{\cos 37^\circ} = 3.$$

Ответ: 3.

$$111. \frac{17 \cos \alpha + 3 \sin \alpha}{6 \sin \alpha - 32 \cos \alpha} = 2; 17 \cos \alpha + 3 \sin \alpha = 12 \sin \alpha - 64 \cos \alpha;$$

$$9 \sin \alpha = 81 \cos \alpha; \operatorname{tg} \alpha = 9.$$

Ответ: 9.

$$112. -16 \sin(\pi + \beta) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) = -16(-\sin \beta) \sin \beta = 16 \sin^2 \beta =$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 4.$$

Ответ: 4.

$$113. \sin^2 \alpha = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20}; \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{19}{20}; \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 19.$$

Ответ: 19.

$$114. \frac{2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{-2 \cos \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = -3.$$

Ответ: -3.

$$115. \sqrt{0,04} + \log_4 2\sqrt{2} + 2^{\log_2 3} = \sqrt{(0,2)^2} + \frac{1}{2} \log_2 2^{\frac{3}{2}} + 3 = 0,2 + \frac{3}{4} + 3 = 3,95$$

Ответ: 3,95.

$$116. 3^{\log_3 2} - \sqrt{0,09} + 3 \log_9 \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} = 2 - \sqrt{(0,3)^2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_3 3\sqrt[3]{3} =$$

$$= 2 - 0,3 - \frac{3}{2} \cdot \log_3 3^{1\frac{1}{3}} = 1,7 - \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 1,7 - 2 = -0,3.$$

Ответ: -0,3.

117. $5^{3x-1} \cdot 25^{7-5x} = 0,2$; $5^{3x-1+14-10x} = 5^{-1}$; $-7x + 13 = -1$; $x = 2$.

Ответ: 2.

118. $8^{2x+3} - 4^{3x+2} = 62$; $2^{6x+9} - 2^{6x+4} = 62$; $2^{6x+4}(2^5 - 1) = 62$;
 $2^{6x+4} \cdot 31 = 62$; $2^{6x+4} = 2$; $6x + 4 = 1$; $x = -0,5$.

Ответ: $x = -0,5$.

119. $725 - 4 \cdot 5^x = 5^{x+2}$; $5^{x+2} + 4 \cdot 5^x = 725$; $5^x(5^2 + 4) = 725$;
 $5^x \cdot 29 = 725$; $5^x = 25$; $x = 2$.

Ответ: 2.

120. $4^{x-2} + 2 \cdot 4^{x-1} = 9$; $4^{x-2} \cdot (1 + 2 \cdot 4) = 9$; $4^{x-2} \cdot 9 = 9$; $4^{x-2} = 1$;
 $4^{x-2} = 4^0 \Rightarrow x - 2 = 0$, $x = 2$.

Ответ: 2.

121. $9^x = 8 \cdot 3^{x+1} + 81$; $(3^2)^x - 8 \cdot 3 \cdot 3^x - 81 = 0$; $(3^x)^2 - 24 \cdot 3^x - 81 = 0$.
Сделаем замену $t = 3^x > 0$. Тогда уравнение записывается в виде
 $t^2 - 24t - 81 = 0$; $t_{1,2} = 12 \pm \sqrt{144 + 81} = 12 \pm 15 \Rightarrow t_1 = 27$, $t_2 = -3 < 0$
 $\Rightarrow t = 27$. Следовательно, $3^x = 27$; $3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$.

Ответ: 3.

122. Вынесем за скобку 2^{2x+1} . Имеем, $2^{2x+1}(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) = 240$;
 $2^{2x+1}(1 + 2 + 4 + 8) = 240$; $2^{2x+1} = 16$; $2x + 1 = 4$; $x = 1,5$.

Ответ: 1,5.

123. $\log_4 \log_2 \left(\frac{1}{x}\right) = 1$; $\log_2 \left(\frac{1}{x}\right) = 4$; $\frac{1}{x} = 16$; $x = \frac{1}{16}$.

Проверка: $\log_4 \log_2 16 = \log_4 4 = 1$. Таким образом, $x = \frac{1}{16} = 0,0625$.

Ответ: 0,0625.

124. $\log_3(x + 5) = 3$.

По определению логарифма имеем $x + 5 = 3^3$, $x + 5 = 27$, $x = 22$.

Выполненные преобразования равносильны, $x = 22$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 22.

125. $\lg(10 - x) = 2$, по определению логарифма имеем $10 - x = 10^2$,
 $x = 10 - 100$, $x = -90$.

Ответ: -90.

126. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = 64$. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$; $x + 1 = -3$; $x = -4$.

Ответ: -4.

127. $7^{\frac{3}{x}} = 343$. $7^{\frac{3}{x}} = 7^3$, $\frac{3}{x} = 3$, $x = 1$.

Ответ: 1.

128. $4^{x-4} = 64$; $4^{x-4} = 4^3$; $x - 4 = 3$; $x = 7$.

Ответ: 7.

129. $5^{x+2} = 125$; $5^{x+2} = 5^3$; $x + 2 = 3$; $x = 1$.

Ответ: 1.

130. $\log_3(4 - x) = 4$; $4 - x = 81$; $x = -77$.

Ответ: -77.

131. $5^{x-24} = \frac{1}{125}$, $5^{x-24} = 5^{-3}$, $x - 24 = -3$, $x = -3 + 24$, $x = 21$.

Ответ: 21.

132. $4^{x-11} = \frac{1}{64}$, $4^{x-11} = 4^{-3}$, $x - 11 = -3$, $x = 8$.

Ответ: 8.

133. $\left(\frac{1}{3}\right)^{10x-2} = \frac{1}{27}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{10x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$; $10x - 2 = 3$; $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

134. $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} = 625$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$; $3x + 2 = -4$; $3x = -6$; $x = -2$.

Ответ: -2.

135. $\log_3(x + 4) = \log_3(5x + 2)$; $x + 4 = 5x + 2$; $2 = 4x$; $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

136. $\log_{\frac{1}{4}}(1 - 3x) = -2$; $-\frac{1}{2}\log_2(1 - 3x) = -2$; $\log_2(1 - 3x) = 4$;
 $1 - 3x = 16$; $3x = -15$; $x = -5$.

Ответ: -5.

137. $\log_{17}(5x + 7) = \log_{17} 22$; $5x + 7 = 22$; $x = 3$.

Ответ: 3.

138. $\log_3(7x + 1) = 3\log_9 4$; $\log_3(7x + 1) = \frac{3}{2}\log_3 4$;

$\log_3(7x + 1) = \log_3 4^{\frac{3}{2}}$; $7x + 1 = 8$; $x = 1$.

Ответ: 1.

139. $2^{x+3} = 4^{x-1}$; $2^{x+3} = (2^2)^{x-1}$; $2^{x+3} = 2^{2x-2}$; $x + 3 = 2x - 2$;
 $x = 5$.

Ответ: 5.

140. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} = 27$; $(3^{-1})^{x-4} = 3^3$; $3^{4-x} = 3^3$; $4 - x = 3$; $x = 1$.

Ответ: 1.

141. $5^{3x+7} = 0,04$; $5^{3x+7} = 5^{-2}$; $3x + 7 = -2$; $3x = -9$; $x = -3$.

Ответ: -3.

142. $\left(\frac{1}{16}\right)^{2x-9} = \left(\frac{1}{4}\right)^x; \left(\frac{1}{4}\right)^{2(2x-9)} = \left(\frac{1}{4}\right)^x; 4x - 18 = x; 3x = 18;$
 $x = 6.$

Ответ: 6.

143. $\log_2(x+1) = 2.$ ОДЗ: $x+1 > 0; x > -1.$

Тогда $x+1 = 2^2, x+1 = 4; x = 3.$

Ответ: 3.

144. $2^{2x-4} = 16; 2^{2x-4} = 2^4; 2x - 4 = 4; 2x = 8; x = 4.$

Ответ: 4.

145. $11^{x-10} = 11 \Leftrightarrow x - 10 = 1 \Leftrightarrow x = 11.$

Ответ: 11.

146. $17^{x-16} = 17 \Leftrightarrow x - 16 = 1 \Leftrightarrow x = 17.$

Ответ: 17.

147. Заметим, что $16 = 2^4.$ $2^{x+1} = 2^4; x+1 = 4; x = 4-1; x = 3$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 3.

148. $7^{x-9} = 49; 7^{x-9} = 7^2; x-9 = 2; x = 11.$

Ответ: 11.

149. $\left(\frac{1}{6}\right)^{2-x} = 36.$ Заметим, что $\frac{1}{6} = 6^{-1}; 6^{x-2} = 6^2; x-2 = 2; x = 4.$

Ответ: 4.

150. $17^{x+2} = \left(\frac{1}{17}\right)^x.$ Заметим, что $\frac{1}{17} = 17^{-1}; 17^{x+2} = 17^{-x}; x+2 = -x;$
 $2x = -2; x = -1.$

Ответ: -1.

151. По определению логарифма имеем: $2x = 2^3; 2x = 8; x = 4.$

Ответ: 4.

152. $4 + x = 4; x = 4 - 4; x = 0.$

Проверка: $\log_3(4+0) = \log_3 4; x = 0$ — корень уравнения.

Ответ: 0.

153. Используя свойство логарифмов: $b > 0, a > 0, a \neq 1, \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b,$

$p \neq 0,$ имеем $\log_2(6-x) = \frac{1}{2} \log_2 x; \log_2(6-x) = \log_2 x^{\frac{1}{2}},$

ОДЗ: $\begin{cases} 6-x > 0, & 0 < x < 6; \\ x > 0; & 6-x = x^{\frac{1}{2}}; \end{cases} (6-x)^2 = x; 36-12x+x^2 = x;$

$x^2 - 13x + 36, x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2}; x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2}; x_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2};$

$$x_1 = 4; x_2 = 9.$$

$$x_2 \notin \text{ОДЗ}.$$

Ответ: 4.

154. Используя свойство логарифмов: $b > 0, a > 0, a \neq 1, \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$,

$$p \neq 0, \text{ имеем } \frac{1}{2} \log_5(5+x) = \log_5(2x),$$

$$\log_5(5+x)^{\frac{1}{2}} = \log_5(2x),$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ 5+x > 0, \end{cases} \quad x > 0.$$

$$(5+x)^{\frac{1}{2}} = 2x.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат, получим:

$$5+x = 4x^2; 4x^2 - x - 5 = 0; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 5 \cdot 4}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{1 \pm 9}{8};$$

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Учитывая ОДЗ, } x = \frac{5}{4}.$$

Ответ: 1,25.

$$\textbf{155. } 2^{8-2x} = 2^{x^2}; 8 - 2x = x^2; x^2 + 2x - 8 = 0;$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3; x_1 = -4, x_2 = 2.$$

В ответе укажем наименьший: $x = -4$.

Ответ: -4 .

156. По определению логарифма имеем $37x + 7 = 3^4; 37x + 7 = 81;$
 $37x = 74; x = 2.$

Ответ: 2.

$$\textbf{157. } \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+12} = 81^{-2x}. \text{ Заметим, что } 81^{-2x} = (3^4)^{-2x} = 3^{-8x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{8x}.$$

$$\text{Таким образом, } \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+12} = \left(\frac{1}{3}\right)^{8x}; 3x+12 = 8x; 5x = 12; x = 2,4.$$

Ответ: 2,4.

$$\textbf{158. } \ln \frac{12}{x-4} = \ln(x+7).$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-4 > 0, \\ x+7 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x > -7; \end{cases} \quad x > 4.$$

$$\frac{12}{x-4} = x+7; 12 = (x+7)(x-4);$$

$x^2 + 3x - 40 = 0; \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8, \\ x = 5. \end{cases}$ Учитывая ОДЗ, получаем единственный корень $x = 5$.

Ответ: 5.

159. $\log_{15}(2x + 11) = \log_{15} 4; 2x + 11 = 4; 2x = -7; x = -3,5$.

Ответ: $-3,5$.

160. $\log_{0,5}(5x - 1) = \log_{0,5} 14; 5x - 1 = 14; 5x = 15; x = 3$.

Ответ: 3.

161. $\left(\frac{1}{4}\right)^{11-9x} = \frac{1}{16}; \left(\frac{1}{4}\right)^{11-9x} = \left(\frac{1}{4}\right)^2; 11 - 9x = 2; -9x = -9; x = 1$.

Ответ: 1.

162. $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-17} = 125; 5^{17-4x} = 5^3; 17 - 4x = 3; -4x = -14; x = 3,5$.

Ответ: $3,5$.

163. $\log_6(12 - 5x) = 2; 12 - 5x = 6^2; -5x = 24; x = -4,8$.

Ответ: $-4,8$.

164. $\log_7(3x - 8) = 2; 3x - 8 = 7^2; 3x = 57; x = 19$.

Ответ: 19.

165. $3^{5x-17} = 27; 5x - 17 = 3; 5x = 20; x = 4$.

Ответ: 4.

166. $2^{12-2x} = \frac{1}{8}; 12 - 2x = -3; 2x = 15; x = 7,5$.

Ответ: $7,5$.

167. $\cos \frac{\pi(4x-7)}{3} = -\frac{1}{2}; \frac{\pi(4x-7)}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; 4x - 7 = \pm 2 + 6k;$

$$\begin{cases} 4x = 9 + 6k, \\ 4x = 5 + 6k; \end{cases} \quad k \in Z.$$

Выбираем наименьший положительный корень: $\begin{cases} 4x = 3, \text{ при } k = -1, \\ 4x = 5, \text{ при } k = 0; \end{cases}$

$$x = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $0,75$.

168. Воспользуемся формулой $\frac{\pi(x+4)}{3} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

С помощью таблицы значений обратных тригонометрических функций на-

ходим $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, тогда $\frac{\pi(x+4)}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Разделим каждый член уравнения на π :

$$\frac{x+4}{3} = \pm \frac{1}{3} + 2k, k \in Z.$$

Умножим каждый член уравнения на 3, а потом вычтем из обеих частей уравнения 4, получим:

$$x + 4 = \pm 1 + 6k, k \in Z;$$

$$x = \pm 1 - 4 + 6k, k \in Z.$$

Наибольший отрицательный корень уравнения получаем при $k = 0$.

Это корень $x = 1 - 4 + 6 \cdot 0 = -3$.

Ответ: -3 .

$$169. \frac{\pi x}{4} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Разделим каждый член уравнения на π .

$$\frac{x}{4} = (-1)^{k+1} \frac{1}{4} + k, k \in Z.$$

Умножим каждый член уравнения на 4, получим $x = (-1)^{k+1} + 4k, k \in Z$.

Наименьший положительный корень получим при $k = 1$. Это корень $x = (-1)^2 + 4 \cdot 1 = +1 + 4 = 5$.

Ответ: 5.

$$170. \sin \frac{2\pi x}{3} = \frac{1}{2}; \frac{2\pi x}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } \frac{2\pi x}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z; x = \frac{1}{4} + 3k$$

или $x = \frac{5}{4} + 3k, k \in Z$. Наименьший положительный корень $x = \frac{1}{4} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

$$171. \operatorname{tg} \frac{5\pi x}{4} = -1; \frac{5\pi x}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; x = -\frac{1}{5} + \frac{4k}{5}, k \in Z.$$

Наибольший отрицательный корень $x = -\frac{1}{5} = -0,2$.

Ответ: $-0,2$.

$$172. \frac{3}{7}x = -6\frac{3}{7}, \frac{3}{7}x = -\frac{45}{7}, x = -15.$$

Ответ: -15 .

$$173. \frac{1-2x}{x+13} = -3.$$

ОДЗ: $x \neq -13$.

$$1 - 2x = -3(x + 13), 1 - 2x + 3x + 39 = 0, x + 40 = 0, x = -40.$$

Ответ: -40 .

$$174. \text{ОДЗ: } x \neq -\frac{4}{3}.$$

$$-x = \frac{x+6}{-3x-4}; 3x^2 + 4x = x + 6; 3x^2 + 3x - 6 = 0; x_1 = 1, x_2 = -2.$$

Наименьший корень уравнения равен -2 .

Ответ: -2 .

$$175. x^2 + 2x - 8 = 0; x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3; x_1 = 2, x_2 = -4.$$

Наименьший корень уравнения равен -4 .

Ответ: -4 .

$$176. 2x^2 - 9x - 35 = 0; x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-35)}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{361}}{4} = \\ = \frac{9 \pm 19}{4}; x_1 = -2,5, x_2 = 7.$$

$$x_1 + x_2 = 4,5.$$

Ответ: $4,5$.

$$177. x = 4\frac{4}{11} : \frac{3}{22}, 4\frac{4}{11} : \frac{3}{22} = \frac{48}{11} : \frac{3}{22} = \frac{48}{11} \cdot \frac{22}{3} = \frac{48 \cdot 22}{11 \cdot 3} = \frac{16 \cdot 2}{1} = 32, \\ x = 32.$$

Ответ: 32 .

$$178. x = 3\frac{6}{7} : \left(-\frac{3}{7}\right) = -\left(\frac{27}{7} : \frac{3}{7}\right) = -\left(\frac{27}{7} \cdot \frac{7}{3}\right) = -\left(\frac{27 \cdot 7}{7 \cdot 3}\right) = -9, \\ x = -9.$$

Ответ: -9 .

$$179. x = 5\frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{16}{3} \cdot 3 = \frac{16 \cdot 3}{3} = 16.$$

Ответ: 16 .

180. Приведём дроби к общему знаменателю: $\frac{5(x-2)}{5x} = \frac{3x}{5x}$. Так как дроби с одинаковыми знаменателями равны, то их числители тоже должны быть равны.

$$5(x-2) = 3x; 5x - 10 = 3x; 5x - 3x = 10; 2x = 10; x = 5.$$

При $x = 5$ знаменатель $5x$ не равен нулю, значит, это корень исходного уравнения.

Ответ: 5 .

$$181. x = \frac{x}{3x-2}; x(3x-2) = x; x(3x-3) = 0; x(x-1) = 0; x_1 = 0,$$

$x_2 = 1$. Проверка: $0 = \frac{0}{3 \cdot 0 - 2}$; $1 = \frac{1}{3 \cdot 1 - 2}$. Оба числа являются корнями исходного уравнения. В ответ пишем большее из них.

Ответ: 1 .

$$182. x^2 - 8x + 15 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 15} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1;$$

$x_1 = 5, x_2 = 3; 3 < 5$ (в ответе указываем меньший корень).
 $x = 3.$

Ответ: 3.

$$183. (3x - 14)^2 = (3x + 2)^2; (3x + 2)^2 - (3x - 14)^2 = 0;$$
$$(3x + 2 - 3x + 14)(3x + 2 + 3x - 14) = 0; 16(6x - 12) = 0; x = 2.$$

Ответ: 2.

$$184. (8x - 5)^2 = (8x + 5)^2; (8x + 5)^2 - (8x - 5)^2 = 0;$$
$$(8x + 5 - 8x + 5)(8x + 5 + 8x - 5) = 0; 10 \cdot 16x = 0; x = 0.$$

Ответ: 0.

$$185. \frac{15x}{6x^2 - 9} = -5; \frac{x}{2x^2 - 3} + 1 = 0; \frac{x + 2x^2 - 3}{2x^2 - 3} = 0;$$

$$\frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 - 3} = 0; \text{ корни числителя } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 5}{4};$$

$x_1 = 1; x_2 = -1,5$, очевидно, не являются нулями знаменателя. В ответ запишем значение $x_2 = -1,5$.

Ответ: $-1,5$.

$$186. \frac{16x^2 - 9}{12x} = x; \frac{16x^2 - 9 - 12x \cdot x}{12x} = 0; \frac{4x^2 - 9}{12x} = 0;$$

$$\frac{(2x - 3)(2x + 3)}{12x} = 0; x_1 = 1,5; x_2 = -1,5. \text{ В ответ запишем значение } x_1 = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

$$187. \frac{5x}{x - 12} = x; \frac{5x - x(x - 12)}{x - 12} = 0; \frac{x(5 - x + 12)}{x - 12} = 0;$$

$$\frac{x(17 - x)}{x - 12} = 0; x_1 = 0; x_2 = 17. \text{ В ответ запишем значение } x_2 = 17.$$

Ответ: 17.

$$188. \frac{14 - 3x}{2x} = x; \frac{14 - 3x - 2x \cdot x}{2x} = 0; \frac{2x^2 + 3x - 14}{2x} = 0;$$

$$\text{Корни числителя } x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 14}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 11}{4}; x_1 = 2;$$

$x_2 = -3,5$. В ответ запишем значение $x_2 = -3,5$.

Ответ: $-3,5$.

189. $\frac{x-3}{9x+4} = \frac{x-3}{4x+9}$. $x = 3$ — является корнем данного уравнения.

При $x \neq 3$ имеем $\frac{1}{9x+4} = \frac{1}{4x+9}$; $\begin{cases} 9x+4 = 4x+9, \\ 9x+4 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = 5, \\ x \neq -\frac{4}{9}. \end{cases}$

Таким образом, корнями данного уравнения являются $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.
В ответ запишем больший из них $x_1 = 3$.

Ответ: 3.

190. Возведем обе части уравнения в квадрат: $128 - x^2 = (-x)^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 128 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 128 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8$.

Проверка: $x = -8$, $\sqrt{128 - (-8)^2} = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8 = -(-8)$.

$x = 8$ не является корнем, так как $\sqrt{128 - 8^2} = \sqrt{128 - 64} = 8 \neq -8$.
Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x = -8$.

Ответ: -8.

191. $x - 6 = \sqrt{8 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 \geq 0, \\ x^2 - 12x + 36 = 8 - x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6, \\ x^2 - 11x + 28 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6, \\ \begin{bmatrix} x_1 = 7, \\ x_2 = 4; \end{bmatrix} \Rightarrow x = 7. \end{cases}$

Ответ: 7.

192. $x - 3 = \sqrt{9 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ x^2 - 6x + 9 = 9 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2 - 5x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ \begin{bmatrix} x_1 = 0, \\ x_2 = 5; \end{bmatrix} \Rightarrow x = 5. \end{cases}$

Ответ: 5.

193. 1) ОДЗ. $5x + 2 \geq 0$; $x \geq -0,4$.

2) $\sqrt{5x + 2} = 10$; $5x + 2 = 100$; $5x = 98$; $x = 19,6$ — принадлежит ОДЗ.

Ответ: 19,6.

194. ОДЗ. $4x - 6 \geq 0$; $x \geq 1,5$. $\sqrt{4x - 6} = 12$; $4x - 6 = 144$; $4x = 150$;
 $x = 37,5$ — принадлежит ОДЗ.

Ответ: 37,5.

195. $\sqrt{7x + 1} = 6 \Leftrightarrow 7x + 1 = 36 \Leftrightarrow 7x = 35 \Leftrightarrow x = 5$.

Ответ: 5.

196. $\sqrt{10 - 2x} = 4 \Leftrightarrow 10 - 2x = 16 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$.

Ответ: -3.

197. $\sqrt{5x-3} = 2\sqrt{x}$. ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0, \\ 5x-3 \geq 0; \end{cases} \quad x \geq 0,6.$

Возведем в квадрат обе части уравнения, получим $5x-3 = 4x$, $x = 3$.
 $x = 3$ удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 3.

198. $\sqrt{4-2x} = 2\sqrt{1-x}$.

ОДЗ: $\begin{cases} 4-2x \geq 0, \\ 1-x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2, \\ x \leq 1; \end{cases} \quad x \leq 1.$

Возведем в квадрат обе части уравнения:
 $4-2x = 4(1-x)$, $-2x+4x = 4-4$, $x = 0$.

Ответ: 0.

199. $\sqrt{57-3x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 57-3x \geq 0, \\ 57-3x = 9; \end{cases} \Leftrightarrow 57-3x = 9 \Leftrightarrow x = 16.$

Ответ: 16.

200. $\sqrt{\frac{3x-17}{7}} = 4$. Возведём в квадрат обе части уравнения, получим:

$\frac{3x-17}{7} = 16$; $3x-17 = 16 \cdot 7$; $3x = 129$; $x = 43$. Проверка показывает, что $x = 43$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 43.

201. $\sqrt{\frac{11}{6-4x}} = \frac{1}{2}$; $\frac{11}{6-4x} = \frac{1}{4}$; $\frac{44}{6-4x} = 1$; $44 = 6-4x$; $-4x = 38$;

$x = -\frac{38}{4} = -9,5$. Проверкой убеждаемся, что $x = -9,5$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $-9,5$.

202. $-x = \sqrt{15-2x}$; $x^2 = 15-2x$; $x^2+2x-15 = 0$; $x_1 = -5$; $x_2 = 3$. Проверка показывает, что $x = -5$ — корень исходного уравнения.

Ответ: -5 .

203. По определению арифметического корня чётной степени имеем
 $49-3x = 4$; $3x = 45$; $x = 15$.

Ответ: 15.

204. По определению арифметического корня чётной степени имеем
 $51-13x = 25$, $\Leftrightarrow 13x = 26$, $\Leftrightarrow x = 2$.

Ответ: 2.

205. $(\sqrt{-12+7x})^2 = (x)^2$; $-12+7x = x^2$; $x^2-7x+12 = 0$; $x_1 = 3$,
 $x_2 = 4$.

Проверка: $\sqrt{-12+7 \cdot 3} = 3$; значит, $x = 3$ — корень исходного уравнения. $\sqrt{-12+7 \cdot 4} = 4$; следовательно, $x = 4$ — корень исходного урав-

нения.

В ответе указываем меньший из них: $x = 3$.

Ответ: 3.

206. $3x^2 - 7x - 10 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{6} = \frac{7 \pm 13}{6}$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{10}{3}$; $-1 < \frac{10}{3}$. В ответе указываем меньший из корней, то есть $x = -1$.

Ответ: -1 .

207. $(\sqrt{-41 + 3x})^2 = 7^2$; $-41 + 3x = 49$; $3x = 49 + 41$; $3x = 90$; $x = 30$.
Проверка: $\sqrt{-41 + 3 \cdot 30} = 7$; $\sqrt{-41 + 90} = 7$; $\sqrt{49} = 7$; $7 = 7$.

Ответ: 30.

208. По определению арифметического квадратного корня из числа имеем:

$$-27 - x = 11^2; -27 - x = 121; -27 - 121 = x; x = -148.$$

Ответ: -148 .

209. ОДЗ: $\begin{cases} 7 - x \geq 0, \\ 5 - x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 7, \\ x \leq 5; \end{cases} x \leq 5$.

$$\begin{cases} \sqrt{5-x} - 4 = 0, \\ \sqrt{7-x} - 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} 5 - x = 16, \\ 7 - x = 4; \end{cases} \begin{cases} x = -11, \\ x = 3. \end{cases}$$

Оба корня принадлежат области определения, большим из них является число 3.

Ответ: 3.

210. $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \geq 0, \\ x^2 - 4x - 5 = 0, \\ x + 1,5 = 0; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 5, \end{cases} \\ x = -1, \\ x = 5, \\ x = -1,5; \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ x = 5, \\ x = -1,5. \end{cases}$

Сумма корней равна 2,5.

Ответ: 2,5.

211. $\sqrt{\frac{2x-8}{4}} = 3$; $\sqrt{2x-8} = 6$; $2x - 8 = 36$; $2x = 44$; $x = 22$.

Проверка: $\sqrt{\frac{2 \cdot 22 - 8}{4}} = \sqrt{\frac{44 - 8}{4}} = \sqrt{9} = 3$.

Ответ: 22.

212. $\sqrt{\frac{4}{5x-2}} = 1$; $\frac{4}{5x-2} = 1$; $5x - 2 = 4$; $5x = 6$; $x = 1,2$.

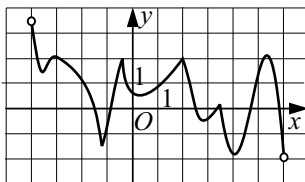


Рис. 1.

Проверка: $\sqrt{\frac{4}{5 \cdot 1,2 - 2}} = \sqrt{\frac{4}{6 - 2}} = 1.$

Ответ: 1,2.

213. В точке максимума производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, график производной в точке максимума пересекает ось OX сверху вниз.

Производная функции $g(x) = f(x) - x - 2$ на промежутке $(-4; 6)$ равна $g'(x) = f'(x) - 1$. Таким образом, в точках максимума функции $g(x)$ график функции $y = f'(x)$ должен пересекать прямую $y = 1$ сверху вниз. Из рисунка 1 видно, что таких точек 4.

Ответ: 4.

214. Точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$, если производная $f'(x)$ меняет в этой точке знак с «-» на «+». Из графика $f'(x)$ видим, что $x = 0$ единственная такая точка.

Ответ: 0.

215. Функция $f(x)$ может принимать наибольшее значение на отрезке либо в точке максимума, в которой производная $f'(x)$ меняет свой знак с "+" на "-", либо на одном из концов отрезка. Поскольку изображенная на рисунке 2 производная $f'(x)$ неположительна на отрезке $[-4; 1]$, то функция $f(x)$ не возрастает на этом отрезке и, следовательно, принимает наибольшее значение на левом конце отрезка, то есть в точке $x_0 = -4$.

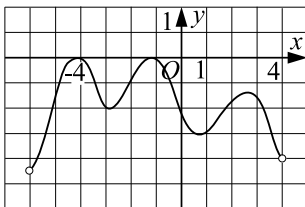


Рис. 2.

Ответ: -4.

216. Функция $f(x)$ может принимать наименьшее значение на отрезке либо в точке минимума, в которой производная $f'(x)$ меняет свой знак с « $-$ » на « $+$ », либо на одном из концов отрезка. Поскольку, изображенная на рисунке 3 производная $f'(x)$ неотрицательна на отрезке $[-2; 5]$, то функция $f(x)$ не убывает на этом отрезке и, следовательно, принимает наименьшее значение на левом конце отрезка, то есть в точке $x_0 = -2$.

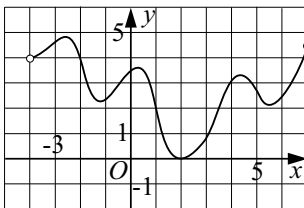


Рис. 3.

Ответ: -2 .

217. Из графика видно, что на отрезке $[-6; 0]$ производная неположительна, а на отрезке $[0; 4]$ неотрицательна. Значит, единственная точка экстремума функции 0 является точкой минимума, и в ней функция принимает наименьшее значение на отрезке $[-6; 4]$.

Ответ: 0.

218. Заданная функция имеет 3 стационарные точки (точки, в которых производная равна нулю). Точками максимума являются те из них, при переходе через которые производная меняет знак с $+$ на $-$. Таких точек нет.

Ответ: 0.

219. Заданная функция имеет 3 стационарные точки (точки, в которых производная равна нулю). Точками минимума являются те из них, при переходе через которые производная меняет знак с $-$ на $+$. Такая точка одна.

Ответ: 1.

220. Заданная функция имеет 4 стационарные точки (точки, в которых производная равна нулю). Точками экстремума являются те из них, при переходе через которые производная имеет либо максимум, либо минимум. То есть меняет знак с « $-$ » на « $+$ », или с « $+$ » на « $-$ ». Таких точек три.

Ответ: 3.

221. По графику определяем: со скоростью не менее 60 км/ч автомобиль

двигался в течение четырёх часов.

Ответ: 4.

222. Наименьшая стоимость евро 6 марта — ордината самой нижней точки графика на его участке, соответствующем дню 6 марта. По графику определяем цену — 45,5 руб.

Ответ: 45,5.

223. Из графика видно, что максимальная скорость велосипедиста за вторую половину пути равна 12 км/час.

Ответ: 12.

224. Температура воздуха в инкубаторе удовлетворяла требованиям в такие моменты времени t , для которых ордината точки графика с абсциссой t принадлежит промежутку $[37; 39]$. По графику видно, что это условие выполняется при $t \in [0; 6] \cup [7,5; 8,5] \cup [10; 12]$, то есть температура удовлетворяла требованиям 9 часов.

Ответ: 9.

225. По графику определяем: наименьшее число кабанов летом — 80 особей.

Ответ: 80.

226. Дням, в которые осадки не выпадали, соответствуют части графика, параллельные горизонтальной оси координат. По графику определяем, что температура не изменялась со 2-го по 6-й дни и с 12-го по 26-й дни, то есть всего 18 дней.

Ответ: 18.

227. Наименьшая цена нефти определяется по графику как точка с наименьшим значением 70 долларов за один баррель нефти. Ей соответствует 25-й день на оси чисел месяца.

Ответ: 25.

228. Так как покупать выгоднее по наименьшей цене, то нужно найти по графику точку наименьшего значения в период с 1 по 30 ноября. Это 2-е ноября.

Ответ: 2.

229. Так как продавать выгоднее по наибольшей цене, то нужно найти по графику точку наибольшего значения в период с 1 по 30 ноября. Это 30-е ноября.

Ответ: 30.

230. Искомая температура — наименьшая ордината жирных точек с абсциссами в интервале $[17; 28]$. По графику определяем: наименьшая среднесуточная температура в указанный период равна 18°C .

Ответ: 18.

231. $300n - 200n = 2700$, $100n = 2700$, $n = \frac{2700}{100} = 27$.

Ответ: 27.

232. Предприниматель 9 декабря потратил $30 \cdot 150 = 4500$ (руб). Учитывая прибыль, он должен продать акции за $4500 + 4500 = 9000$ (руб). Значит, он должен продать каждую акцию по цене $9000 : 30 = 300$ (руб). Из графика следует, что такая стоимость одной акции будет 13 декабря.

Ответ: 13.

233. Наименьшая стоимость равна 10; $10 \cdot 18 = 180$ (руб). Наибольшая стоимость равна 80; $80 \cdot 18 = 1440$ (руб). Разность между ними и есть наибольшая прибыль: $1440 - 180 = 1260$ (руб).

Ответ: 1260.

234. Бизнесмен 4 июля купил 20 акций по 105 рублей, то есть потратил $20 \cdot 105 = 2100$ (руб). Четверть акций он продал 12 июля по цене 120 рублей, то есть получил $\frac{20}{4} \cdot 120 = 600$ (руб). Остальные акции он продал

15 июля по цене 60 рублей, то есть получил $\frac{3}{4} \cdot 20 \cdot 60 = 900$ (руб). В результате бизнесмен потерял $2100 - (600 + 900) = 600$ (руб).

Ответ: 600.

235. По графику определяем: в течение 5 дней.

Ответ: 5.

236. На оси «Дни» в период с 14 по 19 февраля находим день, в который наблюдалось наибольшее давление — 18 февраля; ему соответствует по оси «Давление» число 756.

Ответ: 756.

237. По рисунку по оси «Т» определяем наибольшую температуру в период с 12 по 15 февраля. Наибольшая температура равна 5°C , она была достигнута 14 февраля.

Ответ: 5.

238. За период с 12 по 19 февраля наименьшая среднесуточная влажность воздуха составила 71%. Это значение влажности было достигнуто 19 февраля.

Ответ: 71.

239. Более 2 мм осадков выпадало 4, 10, 11 и 15 февраля. Всего 4 дня.

Ответ: 4.

240. По рисунку определяем, что минимум на графике достигается 25-го

числа.

Ответ: 25.

241. По рисунку определяем, что число посетителей впервые превысило 40 тысяч человек в 3-м месяце.

Ответ: 3.

242. По рисунку определяем, что менее 3000 автомобилей было продано в 6-м месяце.

Ответ: 6.

243. Менее 30 мм норма осадков составляет в 1, 2, 3 и 12 месяцах, всего в 4-х месяцах.

Ответ: 4.

244. По графику видно, что удельная теплоёмкость раствора составляет не более $4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ при температуре от 10°C до 80°C . Наибольшей температурой из этого диапазона является 80°C .

Ответ: 80.

245. 8-го августа наибольшая температура была 30°C , а наименьшая — 5°C . Разность составляет $30 - 5 = 25^\circ\text{C}$.

Ответ: 25.

246. Из данных диаграммы следует, что самая высокая среднемесячная температура наблюдалась в 8-м месяце.

Ответ: 8.

247. Менее 5000 автомобилей было продано во все месяцы, кроме 1-го и 5-го, всего 10 месяцев.

Ответ: 10.

248. Из данных диаграммы следует, что наименьшая норма осадков была зафиксирована во 2-м месяце.

Ответ: 2.

249. Наибольшая температура 16 марта была $7,5^\circ\text{C}$.

Ответ: 7,5.

250. Цена 01.09.2011 была 1716 рублей за акцию, 22.09.2011 — 1617 рублей. Разность равна 99 рублей.

Ответ: 99.

251. Среднемесячная температура выше 15°C в 6-м, 7-м и 8-м месяцах, всего 3 месяца.

Ответ: 3.

252. Наибольший среднегодовой курс доллара по отношению к рублю был в 2009 и составлял 32 рубля.

Ответ: 32.

253. Уровень осадков был ниже предыдущего месяца в 3-м, 4-м, 7-м, 10-м и 11-м месяцах, всего 5 месяцев.

Ответ: 5.

254. По диаграмме видно, что только в 2005 году цена в течение всех кварталов была одной и той же.

Ответ: 2005.

255. Напряжение 1,2 В было через 3 часа после начала работы фонарика, напряжение 0,8 В — через 18 часов. Искомое время равно $18 - 3 = 15$ часам.

Ответ: 15.

256. Наибольшая температура 16 июля была 30°C .

Ответ: 30.

257. Наибольшее выпавшее количество осадков равно 6 мм.

Ответ: 6.

258. Температура 50°C была зафиксирована через 5 часов после включения прибора, температура 90°C — через 9 часов. Искомое время равно $9 - 5 = 4$ (часа).

Ответ: 4.

259. Наибольшее значение температуры, зафиксированное за этот период, — 14°C , наименьшее — 6°C . Разность между этими значениями равна $14 - 6 = 8(^{\circ}\text{C})$.

Ответ: 8.

260. Насаждения занимают 520,3 тыс. га, залежь — 470,2 тыс. га. В сумме они занимают $520,3 + 470,2 = 990,5$ (тыс. га).

Ответ: 990,5.

261. Выше 5°C среднемесячная температура была с 5-го по 10-й месяц, то есть всего 6 месяцев.

Ответ: 6.

$$\begin{aligned} 262. y' &= \left(\frac{(11x+2)^2}{e^x} \right)' = \frac{((11x+2)^2)' \cdot e^x - (e^x)' \cdot (11x+2)^2}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 11(11x+2) \cdot e^x - e^x(11x+2)^2}{e^{2x}} = \frac{(11x+2)(22-11x-2)}{e^x} = \\ &= \frac{(11x+2)(20-11x)}{e^x}; y'(0) = \frac{2 \cdot 20}{e^0} = 40. \end{aligned}$$

Ответ: 40.

$$\begin{aligned}
 263. y' &= \left(\frac{(2x+3)^3}{e^x} \right)' = \frac{((2x+3)^3)' \cdot e^x - (e^x)' \cdot (2x+3)^3}{(e^x)^2} = \\
 &= \frac{3 \cdot 2(2x+3)^2 \cdot e^x - e^x(2x+3)^3}{e^{2x}} = \frac{(2x+3)^2(6 - (2x+3))}{e^x} = \\
 &= \frac{(2x+3)^2(3-2x)}{e^x}; y'(0) = \frac{3^2 \cdot 3}{e^0} = 27.
 \end{aligned}$$

Ответ: 27.

264. $(\ln x - 3x^2 + 5x + 2)' = \frac{1}{x} - 6x + 5$. При $x = 5$ производная принимает значение $\frac{1}{5} - 6 \cdot 5 + 5 = -24,8$.

Ответ: $-24,8$.

$$\begin{aligned}
 265. f(x) &= 3 \operatorname{ctg}^2 x; x_0 = \frac{\pi}{6}. f'(x) = 3 \cdot 2 \operatorname{ctg} x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{6 \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}; \\
 y &= -\frac{6 \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}; y' = -6 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) \cdot \sin^2 x - \operatorname{ctg} x \cdot 2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = \\
 &= \frac{6}{\sin^4 x} (1 + \operatorname{ctg} x \cdot \sin 2x); y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{6}{\sin^4 \frac{\pi}{6}} \cdot \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\
 &= 6 \cdot 16 \cdot \left(1 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6 \cdot 16 \cdot 2,5 = 240; k = 240.
 \end{aligned}$$

Ответ: 240.

266. $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$. Задача сводится к нахождению количества корней уравнения $f'(x) = -\sqrt{3}$. Графически определяем, что это уравнение имеет 3 корня.

Ответ: 3.

267. Задача сводится к нахождению количества корней уравнения

$f'(x) = \operatorname{tg} 150^\circ$, то есть $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Проведя мысленно на рисунке прямую $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, видим, что корней 2.

Ответ: 2.

268. Искомые касательные проводятся в точках $x = x_0$, в которых $f'(x_0) = k$, где k — угловой коэффициент. По условию $x_0 \in N$, и

$f'(x_0) < 0$. Из рисунка видно, что таких точек две $x_0 = 3$ и $x_0 = 4$.

Ответ: 2.

269. По графику найдем значение производной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$, которое будет тангенсом искомого угла наклона касательной: $f'(3) = 1 = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Ответ: 45.

270. По геометрическому смыслу производной $k_{\text{кас.}} = f'(x_0) = f'(-3)$. По графику определяем $f'(-3) = 1$.

Ответ: 1.

271. По геометрическому смыслу производной $k_{\text{кас.}} = f'(x_0) = f'(4)$. Определяем по графику $f'(4) = 3$.

Ответ: 3.

272. Используя геометрический смысл производной, находим $f'(x) = 10x - 7$, $f'(x) = 13$.

Ответ: 13.

273. Используя геометрический смысл производной, находим $f'(x) = 4x + 3$, $f'(3) = 15$.

Ответ: 15.

274. Искомые касательные проводятся в тех точках, в которых $f'(x) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Из рисунка видно, что такая точка одна: $x = 2$.

Ответ: 1.

275. $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, $x_0 = 1$, $f'(x_0) = -1$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$, $\alpha = 135^\circ$.

Ответ: 135.

276. Используя геометрический смысл производной, находим точку, ордината которой равна $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Её абсцисса равна -1 .

Ответ: -1 .

277. Используя геометрический смысл производной нужно найти, сколько общих точек имеют $y = f'(x)$ и $y = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Такая точка одна.

Ответ: 1.

278. По условию касательная, проведенная к графику функции $y = -x^2 + 4x + 11$ в точке A , параллельна прямой $y = 1 - 2x$, значит $y'(x_0) = -2$, где x_0 — абсцисса точки A .
 $y'(x) = -2x + 4$, $y'(x_0) = -2x_0 + 4$, $-2x_0 + 4 = -2$, $x_0 = 3$, тогда $y_0 = -3^2 + 4 \cdot 3 + 11 = 14$, следовательно точка A имеет координаты $(3; 14)$, их сумма равна 17.

Ответ: 17.

279. $f'(x_0) = k$, где k — угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 . По графику определяем: касательная проходит через точки с координатами $(2; -1)$ и $(0; 3)$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, k = \frac{3 + 1}{0 - 2} = -2.$$

Ответ: -2 .

280. $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, где α — угол наклона касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$, к положительному направлению оси Ox в точке с абсциссой $x_0 = 2$. По графику определяем $f'(2) = 1$, отсюда $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\alpha = 45^\circ$.

Ответ: 45 .

281. $f'(x) = 2e^{2x+1} - 12x^3$. Следовательно, угловой коэффициент касательной к графику заданной функции в точке с абсциссой $x_0 = -0,5$ равен $f'(-0,5) = 2e^{2(-0,5)+1} - 12(-0,5)^3 = 2e^0 + 1,5 = 3,5$.

Ответ: $3,5$.

282. $f'(x) = 2e^{5x-2} \cdot 5 + 15x^2$. Следовательно, угловой коэффициент касательной к графику заданной функции в точке с абсциссой $x_0 = \frac{2}{5}$ равен

$$f'\left(\frac{2}{5}\right) = 10e^{5 \cdot \frac{2}{5} - 2} + 15\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 10e^0 + \frac{60}{25} = 12,4.$$

Ответ: $12,4$.

283. Значение производной функции в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 .

Найдём угловой коэффициент к прямой $y = kx + b$, изображённой на рисунке. Точки с координатами $(-1; 4)$ и $(1; 3)$ принадлежат данной прямой.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4 = -k + b, \\ 3 = k + b; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 3,5, \\ k = -0,5. \end{cases}$$

Итак, $f'(x_0) = k = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

284. Значение производной функции в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 .

Найдём угловой коэффициент к прямой $y = kx + b$, изображённой на рисунке. Точки с координатами $(-3; -1)$ и $(-1; 2)$ принадлежат данной прямой. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} -1 = -3k + b, \\ 2 = -k + b; \end{cases} \quad \begin{cases} 2k = 3, \\ b = k + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1,5, \\ b = 3,5. \end{cases}$$

Итак, $f'(-3) = k = 1,5$.

Ответ: 1,5.

285. Так как прямая $y = 38x - 28$ параллельна касательной, то угловой коэффициент касательной равен 38. Следовательно, производная функции $3x^2 + 8x - 2$ в искомой точке x_0 равна 38.

$$(3x^2 + 8x - 2)' = 6x + 8; \quad 6x_0 + 8 = 38; \quad x_0 = 5.$$

Ответ: 5.

286. Значение производной $f(x)$ в точке x_0 есть значение тангенса угла, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси Ox .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Ответ: 1,4.

287. Значение производной $f(x)$ в точке x_0 есть значение тангенса угла, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси Ox .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Ответ: 3,5.

288. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол между касательной и положительным направлением оси Ox . Из рисунка 4 следует, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{10} = 0,4$.

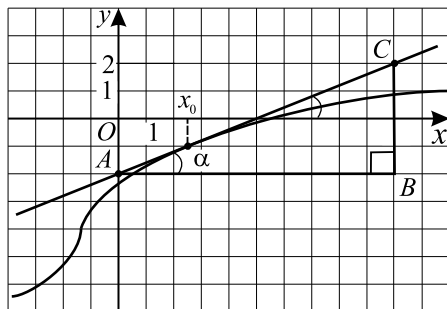


Рис. 4.

Ответ: 0,4.

289. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол между касательной и положительным направлением оси Ox . Из рисунка 5 следует, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{10} = 0,2$.

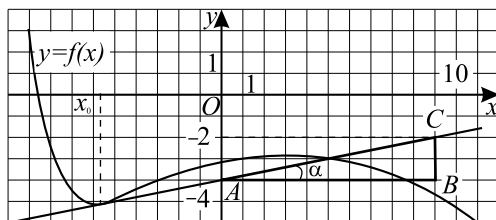


Рис. 5.

Ответ: 0,2.

290. Из условия следует, что касательная проходит через точки с координатами $(0; 0)$ и $(5; 5)$. Искомое значение $f'(5)$ равно тангенсу угла наклона этой касательной к оси абсцисс, поэтому $f'(5) = \frac{5-0}{5-0} = 1$.

Ответ: 1.

291. Из условия задачи следует, что касательная проходит через точки с координатами $(0; 0)$ и $(6; -3)$. Искомое значение $f'(6)$ равно тангенсу угла наклона этой касательной к оси абсцисс, поэтому $f'(6) = \frac{-3-0}{6-0} = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

292. Так как касательная параллельна прямой $y = 1$, то ее угловой коэффициент равен 0 и тогда производная равна 0. По графику определяем, что производная обращается в ноль при $x = 5$.

Ответ: 5.

293. Так как касательная параллельна прямой $y = 1$, то ее угловой коэффициент равен 0 и тогда производная равна 0. По графику определяем, что производная обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ: 2.

294. Так как прямая $y = 3x - 10$ параллельна касательной к функции $y(x)$, то их угловые коэффициенты совпадают. Иными словами, $y'(x) = 3$, где $y(x) = x^2 + 5x - 7$. Тогда $2x + 5 = 3$; $2x = -2$; $x = -1$.

Ответ: -1 .

295. Пусть x_0 — абсцисса точки касания, тогда выполняется система

$$\begin{cases} y'(x_0) = -1, & \begin{cases} 3x_0^2 - 7x_0 + 1 = -1, \\ x_0^3 - 3,5x_0^2 + x_0 - 1 = -x_0 - 3. \end{cases} \\ y(x_0) = -x_0 - 3; \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x_{01} = \frac{1}{3}$, $x_{02} = 2$. Второму уравнению удовлетворяет только $x_0 = 2$.

Ответ: 2.

296. Производная функции положительна в тех целых точках, которые принадлежат какому-нибудь промежутку возрастания, за исключением точек, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная к графику функции параллельна оси Ox) или не существует (например, точка с абсциссой 7). По рисунку определяем абсциссы таких точек: $-7, -4, -3, -2, -1, 0, 4, 5, 6$. Таких точек 9.

Ответ: 9.

297. Так как касательные параллельны прямой $y = -15$, то они параллельны оси Ox , и, следовательно, производные функции $f(x)$ в точках касания должны равняться нулю. Это стационарные точки. На рисунке все они являются точками экстремума (максимумами или минимумами). Их пять.

Ответ: 5.

298. На отрезке $[-7; -3]$ производная функции $f(x)$ отрицательна, значит, на этом отрезке функция $f(x)$ убывает и, следовательно, принимает наименьшее значение в точке $x = -3$.

Ответ: -3 .

299. Касательная к графику функции $f(x)$ в некоторой точке параллельна прямой $y = -x + 2$, если значение производной функции в этой точке равно угловому коэффициенту прямой, то есть $f'(x) = -1$. По графику видно, что $f'(x)$ принимает значение -1 в двух точках.

Ответ: 2.

300. На отрезке $[2; 6]$ производная функции $f(x)$ положительна. Значит, на этом отрезке функция $f(x)$ возрастает и, следовательно, принимает наибольшее значение в точке $x = 6$.

Ответ: 6.

301. На интервале $(-1; 5)$ производная функции $f(x)$ меняет знак с плюса на минус, причём $f'(3) = 0$. Значит, $x = 3$ является точкой экстремума (в данном случае это точка максимума).

Ответ: 3.

302. Угловым коэффициентом прямой $y = -3x + 5$ равен -3 . Следовательно, касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x + 5$ или совпадает с ней в таких точках x_0 , в которых $f'(x_0) = -3$. Из рисунка следует, что график производной функции $y = f'(x)$ пересекается с прямой $y = -3$ в четырех точках.

Ответ: 4.

303. Производная функции отрицательна в тех целых точках, которые принадлежат какому-нибудь промежутку убывания, за исключением точек, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная к гра-

фику функции параллельна оси Ox) или не существует. Из рисунка определяем абсциссы таких точек: $-2, -1, 0, 1, 4, 5$. Таких точек 6.

Ответ: 6.

304. Так как $f'(x) < 0$ при $x \in [-4; 1]$, то $f(x)$ убывает на $[-4; 1]$ и принимает наибольшее значение в точке начала отрезка, то есть в точке $x = -4$.

Ответ: -4 .

305. Точек максимума здесь две, так как график производной 3 раза меняет знак на интервале $(-6; 5)$, из которых 2 раза с плюса на минус. Это и есть точки максимума.

Ответ: 2.

306. Дифференцируемая функция убывает на промежутке в тех точках, в которых производная меньше либо равна нулю за исключением, быть может, конечного множества точек, в которых производная равна нулю. Из графика следует, что $y' < 0$ в следующих целых точках: $-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$. Сумма этих целых точек равна $-5-4-3-2-1+1+2+3 = -9$.

Ответ: -9 .

307. Если касательная параллельна прямой $y = 0 \cdot x + 15$, то она параллельна оси абсцисс. Касательная к данному графику функции параллельна оси абсцисс в точках максимума и минимума, то есть в пяти точках.

Ответ: 5.

308. На промежутке $[-3; 10]$ точек экстремума функции $y = f(x)$ ровно пять. Сумма их абсцисс равна: $(-2) + (-1) + 2 + 4 + 8 = 11$.

Ответ: 11.

309. Количество точек максимума функции $y = f(x)$ на отрезке $[-2; 9]$ равно двум. В этих точках $f'(x) = 0$ и при переходе через эти точки производная меняет знак с плюса на минус, то есть функция $f(x)$ меняет характер монотонности с возрастания на убывание (см. рис. 6).

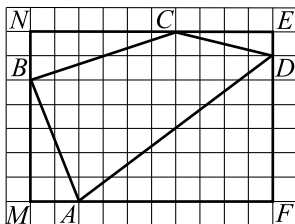


Рис. 6.

Ответ: 2.

310. На графике производной видно, что на отрезке $[-7; 2]$ производная

дважды меняет знак в точках $x = -6$ и $x = 0$, причём только в точке $x = -6$ он меняется с минуса на плюс. Значит, это точка минимума, так как в точке $x = -6$ характер монотонности функции $f(x)$ меняется с убывания на возрастание.

Ответ: 1.

311. Производная в точке касания равна тангенсу угла наклона α касательной к положительному направлению оси Ox (см. рис. 7). Значит,

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \angle ABC) = -\operatorname{tg} \angle ABC = -\frac{AC}{BC} = -\frac{9}{10}.$$

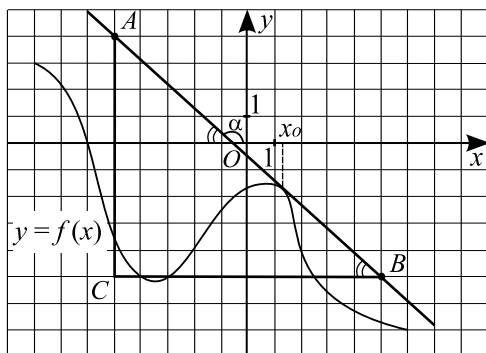


Рис. 7.

Ответ: $-0,9$.

312. Функция возрастает на промежутке $[-2; 3]$, который и является самым длинным. Длина этого промежутка возрастания равна 5.

Ответ: 5.

313. Функция убывает на промежутке $[-1; 4]$, который и является самым длинным. Длина этого промежутка убывания равна 5.

Ответ: 5.

314. Значение производной $f(x)$ в точке x_0 есть значение тангенса угла, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси Ox . Из треугольника ABC (см. рис. 8):

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\angle CAB) = \frac{CB}{AB} = \frac{7}{4} = 1,75.$$

Ответ: 1,75.

315. Значение производной $f(x)$ в точке x_0 есть значение тангенса угла, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси Ox . Из треугольника ABC (см. рис. 9):

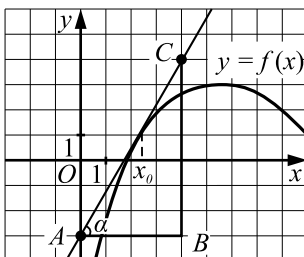


Рис. 8.

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{7}{5} = -1,4.$$

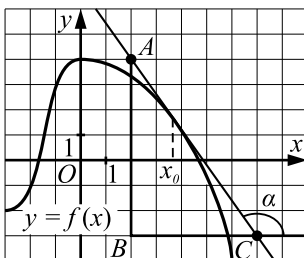


Рис. 9.

Ответ: $-1,4$.

316. Производная функции положительна в тех целых точках, которые принадлежат какому-нибудь промежутку возрастания функции, за исключением точек, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная к графику функции параллельна оси Ox) или не существует. По рисунку определяем абсциссы таких точек: $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7$. Таких точек 10.

Ответ: 10.

317. Производная функции отрицательна в тех целых точках, которые принадлежат какому-нибудь промежутку убывания функции, за исключением точек, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная к графику функции параллельна оси Ox) или не существует. По рисунку определяем абсциссы таких точек: $-5, -4, -3, -2, -1, 3, 4, 5$. Таких точек 8.

Ответ: 8.

318. На промежутке $(-3; 11)$ точек экстремума функции $y = f(x)$ ровно

шесть. Сумма их абсцисс равна: $(-2) + 1 + 3 + 6 + 8 + 9 = 25$.

Ответ: 25.

319. На промежутке $[-2; 5]$ точек функция $y = f(x)$ имеет экстремумы в точках: $-1, 1$ и 4 . Их сумма равна $(-1) + 1 + 4 = 4$.

Ответ: 4.

320. Производная функции $y = f(x)$ равна нулю в точках, в которых касательная к графику данной функции параллельна оси Ox . По графику определяем, что таких точек 4 (это точки с абсциссами $-6, -2, 1$ и 4).

Ответ: 4.

321. Касательные к графику заданной функции $y = f(x)$, параллельные прямой $y = 4$ (или совпадающие с ней), проходят через точки с абсциссами $-5, -2, 2$ и 5 . Всего 4 точки.

Ответ: 4.

322. На отрезке $[-5; 3]$ производная меняет знак с «+» на «-» в единственной точке $x = -2$. Следовательно, $x = -2$ — точка максимума.

Ответ: -2 .

323. На отрезке $[-2; 3]$ функция принимает наименьшее значение в точке, в которой производная меняет знак с «-» на «+». Такой точкой является $x = 2$.

Ответ: 2.

324. На отрезке $[-7; 10]$ функция $f(x)$ достигает максимума в двух точках (это точки, в которых производная данной функции меняет знак с плюса на минус).

Ответ: 2.

325. На отрезке $[-6; 8]$ точек экстремума функции $f(x)$ ровно две: -5 и 7 (в этих точках производная функции $y = f(x)$ меняет знак).

Ответ: 2.

326. Промежуткам возрастания функции соответствуют промежутки, на которых производная данной функции положительна. По графику определяем, что в эти промежутки входят целые точки $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 7, 8$ и 9 . Всего 9 точек.

Ответ: 9.

327. Промежуткам убывания функции соответствуют промежутки, на которых производная данной функции отрицательна. По графику определяем, что в эти промежутки входят целые точки $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 7, 8$ и 9 . Их сумма равна 21.

Ответ: 21.

328. Промежуткам убывания функции соответствуют промежутки, на которых производная данной функции отрицательна. По графику определяем, что наибольший из этих промежутков $[-7; -4]$ имеет длину 3.

Ответ: 3.

329. Промежуткам возрастания функции соответствуют промежутки, на которых производная данной функции положительна. По графику определяем, что наибольший из этих промежутков $[-7; -2]$ имеет длину 5.

Ответ: 5.

330. Согласно условию прямая $y = -7x + 3$ и парабола $y = ax^2 + 3x - 2$ имеют единственную общую точку. Следовательно, эта точка является решением уравнения $-7x + 3 = ax^2 + 3x - 2$; $ax^2 + 10x - 5 = 0$. Так как точка единственная, то дискриминант $D = 10^2 - 4 \cdot (-5) \cdot a = 0$. Отсюда $a = -5$.

Ответ: -5 .

331. Согласно условию прямая $y = -7x + 11$ и парабола $y = 2x^2 - 5x + c$ имеют единственную общую точку. Следовательно, эта точка является решением уравнения $-7x + 11 = 2x^2 - 5x + c$; $2x^2 + 2x - 11 + c = 0$. Так как точка единственная, то дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (c - 11) = 0$. Отсюда $c = 11,5$.

Ответ: 11,5.

332. Согласно условию прямая $y = 6x + 5$ и парабола $y = 3x^2 + bx + 17$ имеют единственную общую точку. Следовательно, эта точка является решением уравнения $6x + 5 = 3x^2 + bx + 17$; $3x^2 + (b - 6)x + 12 = 0$. Так как точка единственная, то дискриминант $D = (b - 6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 0$. Отсюда $b = -6$ или $b = 18$. При $b = -6$ абсцисса точки касания $x = \frac{-(-6 - 6)}{6} = 2$. При $b = 18$ абсцисса точки касания $x = \frac{-(18 - 6)}{6} = -2$. Учитывая, что по условию абсцисса точки касания меньше 0, получаем $b = 18$.

Ответ: 18.

333. Согласно условию прямая $y = 9x + 5$ и парабола $y = -x^2 + bx - 11$ имеют единственную общую точку. Следовательно, эта точка является решением уравнения $9x + 5 = -x^2 + bx - 11$; $x^2 + (9 - b)x + 16 = 0$. Так как точка единственная, то дискриминант $D = (9 - b)^2 - 4 \cdot 16 = 0$. Отсюда $b = 1$ или $b = 17$. При $b = 1$ абсцисса точки касания $x = \frac{-(9 - 1)}{2} = -4$.

При $b = 17$ абсцисса точки касания $x = \frac{-(9 - 17)}{2} = 4$. Учитывая, что по

условию абсцисса точки касания больше 1, получаем $b = 17$.

Ответ: 17.

334. Угловой коэффициент касательной равен угловому коэффициенту прямой $y = 3x - 2$, то есть равен 3. Так как $(x^2 + 4x - 5)' = 2x + 4$, то в точке касания выполняется $2x + 4 = 3$, откуда $x = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

335. Угловой коэффициент касательной равен угловому коэффициенту прямой $y = -8x + 1$, то есть равен -8 . Так как $(2x^2 - 2x + 9)' = 4x - 2$, то в точке касания выполняется $4x - 2 = -8$, откуда $x = -1,5$.

Ответ: $-1,5$.

336. Согласно условию, прямая $y = -4x + 1$ параллельна касательной к данной кривой. Угловой коэффициент касательной совпадает с угловым коэффициентом заданной прямой, т.е. $k = -4$. С другой стороны, $k = y'(x_0)$, $y'(x) = (x^3 + 5x^2 + 3x + 4)' = 3x^2 + 10x + 3$. Следовательно, абсциссу точки касания можно найти из уравнения $3x_0^2 + 10x_0 + 3 = -4$.

Отсюда $x_0 = -\frac{7}{3}$ или $x_0 = -1$. Наибольшая из абсцисс равна -1 .

Ответ: -1 .

337. Согласно условию, прямая $y = 3x + 30$ параллельна касательной к данной кривой. Угловой коэффициент касательной совпадает с угловым коэффициентом заданной прямой, то есть $k = 3$. С другой стороны, $k = y'(x_0)$, $y'(x) = (x^3 + 5x^2 - 5x - 18)' = 3x^2 + 10x - 5$. Следовательно, абсциссу точки касания можно найти из уравнения $3x_0^2 + 10x_0 - 5 = 3$.

Отсюда $x_0 = -4$ или $x_0 = \frac{2}{3}$. Наименьшая из абсцисс равна -4 .

Ответ: -4 .

338. Функция убывает на промежутках, на которых её производная отрицательна. По графику определяем, что наибольшим из промежутков, на которых производная отрицательная, является промежуток $[-2; 4]$. Его длина равна 6.

Ответ: 6.

339. По графику производной $y = f'(x)$ определяем, что отрезку $[-4; 10]$ принадлежат две точки x_1 и x_2 (см. рис. 10), при переходе через которые производная меняет знак с « $-$ » на « $+$ ». Эти точки и являются точками минимума.

Ответ: 2.

340. $f'(x) < 0$ на интервалах убывания функции $y = f(x)$. Таким проме-

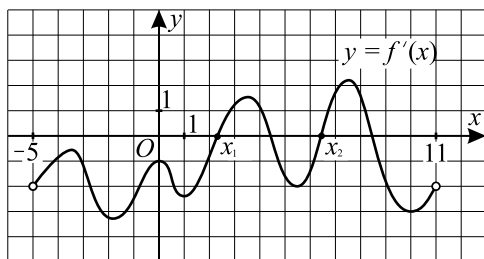


Рис. 10.

жуткам принадлежат точки x_2, x_3, x_6 .

Ответ: 3.

341. По условию прямая $y = -x + 5$ параллельна касательной к графику функции $y = f(x)$, поэтому угловой коэффициент касательной $k = -1$. Найдём абсциссу точки касания из уравнения $y'(x) = -1$.

$y'(x) = 3x^2 + 6x + 2$, $3x^2 + 6x + 2 = -1$, $x^2 + 2x + 1 = 0$, $(x + 1)^2 = 0$, $x = -1$.

Ответ: -1 .

342. На промежутке $(-6; 7)$ $f'(x) < 0$, значит, функция $y = f(x)$ убывает, следовательно, наименьшее значение на отрезке $[-4; 5]$ функция $f(x)$ принимает при наибольшем значении аргумента, то есть при $x = 5$.

Ответ: 5.

343. Производная $f'(x) = 0$ в четырёх точках: x_2, x_3, x_5, x_6 — точках экстремума функции $f(x)$.

Ответ: 4.

344. Производная $f'(x)$ положительна на тех интервалах, на которых функция $f(x)$ возрастает. По графику определяем, что из указанных точек в этих интервалах лежат две: x_2 и x_4 .

Ответ: 2.

345. Значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно значению тангенса угла, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси Ox . Из треугольника ABC (см. рис. 11) находим $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{BC}{AB} = -\frac{6}{3} = -2$.

Ответ: -2 .

346. По условию касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 8$, следовательно, угловой коэффициент касательной равен

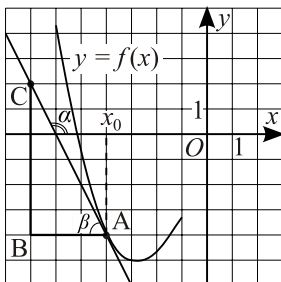


Рис. 11.

2, то есть $f'(x) = 2$. Прямая $y = 2$ пересекает график функции $y = f'(x)$ в шести точках (см. рис. 12).

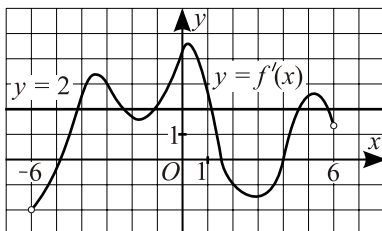


Рис. 12.

Ответ: 6.

347. $y'(x) = \left(-\frac{1}{2}f(x) + 7\right)' = -\frac{1}{2}f'(x)$. Так как уравнение касательной $y = 2x - 6$, то её угловой коэффициент $k = f'(x_0) = 2$. Определим значение производной заданной функции в точке $x_0 = 1$: $y'(x_0) = -\frac{1}{2}f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$.

Ответ: -1.

348. Построим прямую $y = 4$. По графику находим, что касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 4$ в 6 точках (см. рис. 13).

Ответ: 6.

349. На отрезке $[-5; 3]$ только в точке $x = -1$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, $x = -1$ — единственная точка миниму-

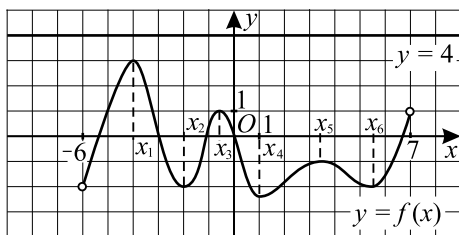


Рис. 13.

ма.

Ответ: 1.

350. По графику определяем, что при $x < -2$ имеем $f'(x) < 0$, при $x > -2$ имеем $f'(x) > 0$, значит, $x = -2$ — точка минимума. Следовательно, при $x = -2$ данная функция принимает наименьшее значение.

Ответ: -2 .

351. Замечаем, что производная функции $f(x)$ меняет знак с плюса на минус в точках x_1 , x_2 и x_3 , следовательно, функция $f(x)$ имеет три точки максимума (см. рис. 14).

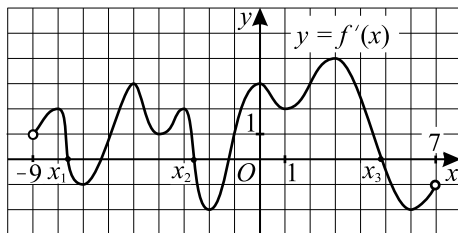


Рис. 14.

Ответ: 3.

352. На касательной выберем точки с координатами $(-3; 0)$ и $(0; -1,5)$

(см. рис. 15). По формуле $f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ находим $f'(x) = \frac{-1,5 - 0}{0 + 3} = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

353. На промежутке $(-4; 7)$ $f'(x) > 0$, значит, функция $f(x)$ на нём возрастает, следовательно, она принимает наибольшее значение на отрезке $[-2; 6]$ при наибольшем значении аргумента, то есть при $x = 6$.

Ответ: 6.

354. На касательной отмечены точки с координатами $(-4; 0)$ и $(0; 2)$. По

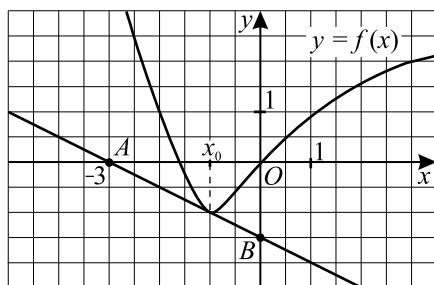


Рис. 15.

формуле $f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ получим $f'(x) = \frac{2 - 0}{0 + 4} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

355. $x(t) = 1,5t^2 - 3t + 7$; $v(t) = x'(t)$; $v(t) = 3t - 3$, по условию $v(t) = 12$; $3t - 3 = 12$, $3t = 15$, $t = 5$.

Ответ: 5.

356. $x(t) = 0,75t^2 + t - 7$. $v(t) = x'(t)$, $v(t) = 1,5t + 1$, $1,5t + 1 = 19$, $1,5t = 18$, $t = 12$.

Ответ: 12.

357. $x(t) = -2t^2 + 20t - 7$; $v(t) = x'(t) = -4t + 20$. Мгновенная остановка произойдет при $v(t) = 0$; $-4t + 20 = 0$; $t = 5$; $x(5) = -2 \cdot 25 + 20 \cdot 5 - 7 = 50 + 100 - 7 = 43$.

Ответ: 43.

358. Скорость движения тела в момент времени t_0 определяется как значение производной функции, выражающей закон движения этого тела, при $t = t_0$. С геометрической точки зрения значение этой производной равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой t_0 . По графику находим: $S'(5) = \frac{50}{2} = 25$.

Ответ: 25.

359. Скорость движения тела в момент времени t_0 определяется как значение производной функции, выражающей закон движения этого тела, при $t = t_0$. С геометрической точки зрения значение этой производной равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой t_0 . По графику находим $S'(8) = -\frac{30}{2} = -15$. Отрицательное значение скорости говорит об изменении направления движения тела. Таким обра-

зом, скорость в момент времени $t = 8$ равна 15.

Ответ: 15.

360. Скорость материальной точки — производная функции перемещения. Таким образом, необходимо найти абсциссу точки графика, изображённого на рисунке, у которой ордината равна 2. По графику находим точку с координатами (4,5; 2), её абсцисса равна 4,5.

Ответ: 4,5.

361. Скорость материальной точки — производная функции перемещения. Таким образом, необходимо найти абсциссу точки графика, изображённого на рисунке, у которой ордината равна 3. По графику находим точку с координатами (5; 3), её абсцисса равна 5.

Ответ: 5.

362. Согласно физическому смыслу производной, ускорение есть вторая производная от перемещения.

$$S''(t) = 6t, \quad S''(1) = 6 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: 6.

363. Известно, что $S(t) = \int v(t)dt$, откуда расстояние, пройденное бolidом за первые 6 секунд, равно

$$\int_0^6 (36t - 3t^2)dt = (18t^2 - t^3) \Big|_0^6 = 648 - 216 = 432.$$

Ответ: 432.

364. Согласно физическому смыслу производной, ускорение есть вторая производная от перемещения.

$$s''(t) = 3t, \quad s''(3) = 9 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Ответ: 9.

365. Известно, что $S(t) = \int v(t)dt$, откуда расстояние, которое преодолел бумеранг за 9 секунд, равно $\int_0^9 (9t - t^2)dt = \left(9 \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^9 = 364,5 - 243 = 121,5$.

Ответ: 121,5.

366. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 + t^2 - 5t$, её скорость $v(t) = x'(t) = 6t^2 + 2t - 5$.
 $v(4) = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 5 = 99 \text{ м/с}$.

Ответ: 99.

367. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^3 + t^2 - 7t$, её скорость $v(t) = x'(t) = 9t^2 + 2t - 7$.

$$v(5) = 9 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 - 7 = 228.$$

Ответ: 228.

368. Для заданной материальной точки изменение скорости движения определяется через производную пути по времени:

$v(t) = x'(t) = (4t^2 - 34t + 5)' = 8t - 34$. Определим скорость в момент времени $t = 9$ с: $v(9) = 8 \cdot 9 - 34 = 38$.

Ответ: 38.

369. Для заданной материальной точки изменение скорости движения определяется через производную пути по времени:

$v(t) = x'(t) = (0,4t^3 - 2t^2 + t)' = 1,2t^2 - 4t + 1$. Определим скорость в момент времени $t = 5$ с: $v(5) = 1,2 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 + 1 = 11$.

Ответ: 11.

370. Так как скорость равна производной пути по времени, то

$v(t) = x'(t) = -t^4 + 4t^3 - 3t^2 + 5$. Найдём скорость в момент времени $t = 2$ с. $v(2) = x'(2) = -2^4 + 4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 = -16 + 32 - 12 + 5 = 9$ (м/с).

Ответ: 9.

371. $v(t) = x'(t) = t^2 - 5t - 2$. По условию $v(t) = 4$, $t > 0$, значит, $t^2 - 5t - 2 = 4$, $t^2 - 5t - 6 = 0$, $t_1 = 6$, $t_2 = -1$ — не удовлетворяет условию $t > 0$.

Ответ: 6.

372. Для заданной точки ускорение определяется через производную скорости по времени: $a(t) = v'(t) = f'(t)$. По графику функции $v = f(t)$ определяем, что производная $a(t) = f'(t)$ обращается в ноль в семи точках: t_1, t_2, \dots, t_7 — точках экстремума функции $v = f(t)$ (см. рис. 16).

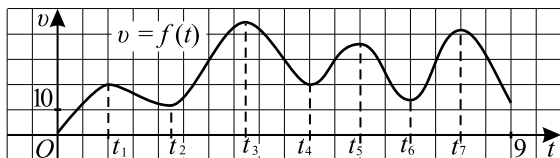


Рис. 16.

Ответ: 7.

373. Пусть $\sqrt{4x - 1} = t$, $t \geq 0$. Тогда $4x - 1 = t^2$, $x = \frac{t^2 + 1}{4}$.

$$y = t - \frac{t^2 + 1}{4} = \frac{1}{4}(4t - t^2 - 1) = -\frac{1}{4}((t - 2)^2 - 3) = -\frac{1}{4}(t - 2)^2 + \frac{3}{4}.$$

$$y = -\frac{1}{4}(t - 2)^2 + \frac{3}{4}, \text{ наибольшее значение функции равно } 0,75 \text{ (легко про-}$$

верить, что оно достигается при $t = 2$, то есть при $x = 1,25$, $x = 1,25$ удовлетворяет ОДЗ).

Ответ: 0,75.

374. 1. Преобразуем функцию $g(x) = \log_4 \frac{3}{x^2 + 4x + 12} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{x^2 + 4x + 12}{3}$.

Так как основание $\frac{1}{4}$ меньше 1, то наименьшее значение функции $g(x)$ на отрезке $[-6; 0]$ достигается в тех же точках, что и наибольшее значение функции $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 12}{3}$.

2. Для нахождения наибольшего значения функции $f(x)$ найдем точки экстремума. Имеем, $f'(x) = \frac{2x + 4}{3}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x \in (-6; 0). \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$. Далее, находим значения функции в точке экстремума и на концах отрезка. Получаем, $f(-6) = 8$, $f(-2) = \frac{8}{3}$, $f(0) = 4$. Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 0]$ равно 8.

3. Таким образом, наименьшее значение функции $g(x)$ на отрезке $[-6; 0]$ равно $\log_{\frac{1}{4}} 8 = -1,5$.

Ответ: $-1,5$.

375. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x \ln 2}$; $1 - \frac{1}{x \ln 2} = 0$; $x = \frac{1}{\ln 2}$. Так как $2 < e \Leftrightarrow \ln 2 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2} > 1$ и $e < 4 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2} < 2$, то $x = \frac{1}{\ln 2}$ — стационарная точка, принадлежащая отрезку $[\frac{1}{2}; 2]$. Из чисел $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$, $f(\frac{1}{\ln 2}) = \frac{1}{2} + \log_2(\ln 2)$ и $f(2) = -\frac{1}{2}$ наибольшим является число $\frac{3}{2}$, так как $2 < e \Leftrightarrow \ln 2 < 1 \Leftrightarrow \log_2(\ln 2) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \log_2(\ln 2) < \frac{1}{2}$.

Ответ: 1,5.

376. $y' = 2(x - 4)(x - 1) + (x - 4)^2 = (x - 4)(3x - 6)$.

1) Найдём точки экстремума функции.

$y'(x) = 0$ при $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

2) Найдём значение функции в точках экстремума и на концах отрезка.

$y(4) = 0$; $y(2) = 4$; $y(1,5) = 3,125$; $y(4,5) = 0,875$.

Следовательно, наибольшее значение функции $y = (x - 4)^2(x - 1)$ на

отрезке $[1, 5; 4, 5]$ равно 4.

Ответ: 4.

$$377. y' = \frac{5x^4}{15} - 3x^2 = \frac{x^4}{3} - 3x^2 = x^2 \left(\frac{x^2}{3} - 3 \right).$$

1) Найдём точки экстремума функции.

$$y'(x) = 0 \text{ при } x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3 \notin [0; 4].$$

2) Найдём значение функции в точках экстремума, принадлежащих отрезку $[0; 4]$, и на его концах.

$$y(0) = 0; y(3) = -10, 8; y(4) = 4 \frac{4}{15}.$$

Следовательно, наименьшее значение функции $y = \frac{x^5}{15} - x^3$ на отрезке $[0; 4]$ равно $-10, 8$.

Ответ: $-10, 8$.

$$378. 1. y' = 6x^2 + 4x - 10.$$

$$2. y' = 0, x = 1, x = -\frac{5}{3}, 1 \in [-1; 2], -\frac{5}{3} \notin [-1; 2].$$

$$3. y(-1) = -2 + 2 + 10 + 1 = 11,$$

$$y(1) = 2 + 2 - 10 + 1 = -5,$$

$$y(2) = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 10 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Из чисел 11, 5, -5 наименьшее число -5 .

Ответ: -5 .

$$379. y' = \frac{4x - 4}{(2x^2 - 4x + 3) \ln 0,5},$$

$$y' = 0, x = 1, 1 \in [0; 2],$$

$$y(0) = \log_{\frac{1}{2}} 3, y(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0, y(2) = \log_{\frac{1}{2}} (2 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 3) = \log_{\frac{1}{2}} 3.$$

Из чисел $\log_{\frac{1}{2}} 3$ и 0 наибольшее число 0.

Ответ: 0.

$$380. f(x) = 3(5x - 4)^2 - (5x - 4)^3.$$

1) Найдём точки экстремума функции.

$$f'(x) = 6(5x - 4) - 3(5x - 4)^2 = 3(5x - 4)(2 - 5x + 4) = 3(5x - 4)(6 - 5x).$$

$$f'(x) = 0; 3(5x - 4)(6 - 5x) = 0; x_1 = \frac{4}{5}, x_2 = \frac{6}{5}.$$

2) $|2x - 3| \leq 1; -1 \leq 2x - 3 \leq 1; 2 \leq 2x \leq 4; 1 \leq x \leq 2. x = \frac{4}{5}$ не принадлежит данному промежутку.

3) Найдём значение функции $f(x)$ в точке $x = \frac{6}{5}$ и на концах отрез-

ка $[1; 2]$.

$f(1) = 2$; $f\left(\frac{6}{5}\right) = 4$; $f(2) = -108$. Следовательно, наибольшее значение заданной функции при x , удовлетворяющих условию $|2x - 3| \leq 1$, равно 4.

Ответ: 4.

381. $f(x) = 4(2x - 3)^3 + (2x - 3)^4$.

1) Найдём точки экстремума функции.

$$f'(x) = 12(2x - 3)^2 \cdot 2 + 4(2x - 3)^3 \cdot 2 = (2x - 3)^2(24 + 16x - 24) = (2x - 3)^2 \cdot 16x. f'(x) = 0 \text{ при } x_1 = 1,5; x_2 = 0.$$

2) $|2x + 1| \leq 1$; $-1 \leq 2x + 1 \leq 1$; $-2 \leq 2x \leq 0$; $-1 \leq x \leq 0$. $x = 1,5$ не принадлежит данному промежутку.

3) Найдём значение функции $f(x)$ на концах отрезка $[-1; 0]$.

$$f(-1) = 4(-5)^3 + (-5)^4 = -5^3(-1) = 5^3 = 125.$$

$f(0) = 4 \cdot (-3)^3 + (-3)^4 = -3^3 = -27$. Следовательно, наименьшее значение заданной функции при x , удовлетворяющих условию $|2x + 1| \leq 1$, равно -27 .

Ответ: -27 .

382. Найдём стационарные точки функции $y = -x^3 + 3x + 5$. $y'(x) = -3x^2 + 3$; $y'(x) = 0$; $-3x^2 + 3 = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Найдём значения функции на концах отрезка $[-1; 2]$ и в стационарных точках, ему принадлежащих: $y(-1) = 3$, $y(1) = 7$, $y(2) = 3$.

Из чисел 3, 7 наибольшим является число 7.

Ответ: 7.

383. Найдём стационарные точки функции $y = x^3 - 3x + 8$.

$$y'(x) = 3x^2 - 3; y'(x) = 0; 3x^2 - 3 = 0; x^2 - 1 = 0; x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Найдём значения функции на концах отрезка $[-3; 2]$ и в стационарных точках, ему принадлежащих.

$$y(-3) = -10, f(-1) = 10, f(1) = 6, f(2) = 10.$$

Из чисел $-10, 10, 6$ наименьшее число -10 .

Ответ: -10 .

384. Найдём производную данной функции: $y' = e^{(x+2)} + (x+3)e^{x+2} = (x+4)e^{x+2}$. $y' = 0$ при $x = -4$. Таким образом, нужно выбрать наибольшее из значений $y(-3)$, $y(-4)$ и $y(-5)$. $y(-3) = 0$; $y(-4) = -e^{-2} < 0$; $y(-5) = -2e^{-3} < 0$. Наибольшее из этих значений равно 0.

Ответ: 0.

385. $y' = \left(5 \cos x - \frac{24}{\pi}x + 3\right)' = -5 \sin x - \frac{24}{\pi}$. Так как $y' < 0$, то функ-

ция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$. Наибольшим является значение

$$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 5 \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{24}{\pi} \cdot \left(-\frac{2\pi}{3}\right) + 3 = 16,5.$$

Ответ: 16,5.

386. $y' = \left(2 \cos x - \frac{18}{\pi}x + 1\right)' = -2 \sin x - \frac{18}{\pi}$. Так как $y' < 0$, то функ-

ция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{2}{3}\pi; 0\right]$. Наибольшим является значение

$$y\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) - \frac{18}{\pi} \cdot \left(-\frac{2}{3}\pi\right) + 1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 12 + 1 = 12.$$

Ответ: 12.

387. $y' = (4 \operatorname{ctg} x + 4x + 3 - 2\pi)' = -\frac{4}{\sin^2 x} + 4 = 4\left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 4\left(1 - (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\right) = -4 \operatorname{ctg}^2 x$. Видно, что $y'(x) < 0$ для любого $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right]$. Следовательно, $y(x)$ убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right]$. Тогда наи-

большее значение y достигается при $x = \frac{\pi}{2}$ и равно 3.

Ответ: 3.

388. $y' = \left(3x + 4 \operatorname{ctg} x - 1 - \frac{3}{4}\pi\right)' = 3 - \frac{3}{\sin^2 x} = 3\left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 3\left(1 - (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\right) = -3 \operatorname{ctg}^2 x$. Видно, что $y'(x) < 0$ для любого $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, $y(x)$ убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ и наиболь-

шее значение равно $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \cdot \frac{\pi}{4} + 3 \cdot 1 - 1 - \frac{3}{4} \cdot \pi = 2$.

Ответ: 2.

389. $y' = -e^{2-x} - (5-x)e^{2-x} = (x-6)e^{2-x}$.

$y' = 0$ при $x = 6$; $y' < 0$ при $x < 6$; $y' > 0$ при $x > 6$. $x = 6$ — точка минимума.

Ответ: 6.

390. $y' = e^{x-6} + (x-7)e^{x-6} = (x-6)e^{x-6}$.

$y' = 0$ при $x = 6$. $y(1) = -6e^{-5}$; $y(6) = -1$; $y(7) = 0$. Наименьшее значение равно -1 .

Ответ: -1 .

$$391. y = (x - 8)e^{5-x}, y' = e^{5-x} - (x - 8)e^{5-x} = (1 - x + 8)e^{5-x} = (9 - x)e^{5-x}; y' = 0 \text{ при } x = 9.$$

$x = 9$ — точка максимума исходной функции (см. рис. 17).

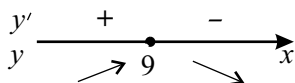


Рис. 17.

Ответ: 9.

$$392. y = (x - 7)e^{x-8}, x \in [7; 8].$$

$$y' = e^{x-8} + (x - 7)e^{x-8} = e^{x-8}(1 + x - 7) = e^{x-8}(x - 6).$$

На заданном отрезке производная положительна, значит, функция на этом отрезке возрастает и принимает наименьшее значение при наименьшем x . Тогда $y_{\text{наим.}} = y(7) = 0$.

Ответ: 0.

393. $y = (x - 12)e^{x-11}$; $y' = e^{x-11} + (x - 12)e^{x-11} = e^{x-11}(x - 11)$; $y' = 0$, $x = 11$ — точка экстремума исходной функции. Находим значения функции в точке экстремума и на концах отрезка и выбираем наименьшее.

$$y(10) = -2e^{-1}, y(11) = -1, y(12) = 0.$$

Ответ: -1.

$$394. y = 2(x - 7)e^{x-6}; y' = 2e^{x-6} + 2(x - 7)e^{x-6} = 2(x - 6)e^{x-6}.$$

$y' = 0$ при $x = 6$, $x = 6$ — точка экстремума исходной функции. Находим значения функции в точке экстремума и на концах отрезка и выбираем наименьшее.

$$y(5) = -4e^{-1}, y(6) = -2, y(7) = 0.$$

Ответ: -2.

$$395. y' = -6 \sin x + 3\sqrt{3}; y' = 0; \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит только $x = \frac{\pi}{3}$. Из чисел $y(0) = 14 - \pi\sqrt{3}$,

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 11, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \text{ наибольшим является } 11.$$

Ответ: 11.

$$396. y' = -4\sqrt{2} \sin x + 4; y' = 0; \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит только $x = \frac{\pi}{4}$. Из чисел $y(0) = 4\sqrt{2} - \pi - 1$,

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 1$ наибольшим является 3.

Ответ: 3.

397. $y'(x) = -6 \sin x - 10, y'(x) < 0$ при $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$, значит, $y(x)$

убывает на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$, значит, наименьшее значение

$$y(0) = 6 \cos 0 - 10 \cdot 0 + 1 = 7.$$

Ответ: 7.

398. $y'(x) = -5 \sin x - 7, y'(x) < 0$ при $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$, значит, $y(x)$ убывает

на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$, значит, наименьшее значение принимает при $x = 0$.

$$y(0) = 5 \cdot \cos 0 - 7 \cdot 0 + 4 = 9.$$

Ответ: 9.

399. $y' = 15 - 4 \cos x$. Так как $y' > 0$, то $y(x)$ возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Следовательно, наибольшее значение $y(0) = 15 \cdot 0 - 4 \sin 0 + 6 = 6$.

Ответ: 6.

400. $y' = 2 \cos x - 8$. Так как $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Значит, наименьшее значение $y(0) = 2 \cdot \sin 0 - 8 \cdot 0 + 3 = 3$.

Ответ: 3.

401. $y' = 2 \cos x - 3$; Так как $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{3}{2}\pi; 0\right]$. Значит, наименьшее значение равно $y(0) = 2 \sin 0 - 3 \cdot 0 - 2 = -2$.

Ответ: -2.

402. $y' = 2 \cos x - \frac{6}{\pi}$. Уравнение $2 \cos x - \frac{6}{\pi} = 0$ имеет единственный корень $x_0 = -\arccos \frac{3}{\pi}$, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{5}{6}\pi; 0\right]$. Так как

$y'(x) < 0$ при $x \in \left[-\frac{5}{6}\pi; x_0\right)$ и $y'(x) > 0$ при $x \in (x_0; 0]$, то x_0 — единственная критическая точка непрерывной функции $y(x)$ на отрезке $\left[-\frac{5}{6}\pi; 0\right]$, являющаяся точкой минимума. Следовательно, наибольшее значение функция $y(x)$ принимает на одном из концов отрезка.

$y\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = 2\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + \frac{6}{\pi} \cdot \frac{5}{6}\pi + 1 = -2\sin\frac{\pi}{6} + 5 + 1 =$
 $= -2 \cdot \frac{1}{2} + 6 = -1 + 6 = 5; y(0) = 2\sin 0 - \frac{6}{\pi} \cdot 0 + 1 = 1.$ Наибольшее значение равно 5.

Ответ: 5.

403. $y' = \frac{6}{\cos^2 x} - 2.$ Так как $\frac{6}{\cos^2 x} \geq 6$, то $y' > 0$. Следовательно, функция $y(x)$ возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$. Значит, её наибольшее значение равно $y(0) = 6 \cdot \operatorname{tg} 0 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$.

Ответ: 3.

404. $y' = \frac{7}{\cos^2 x} - 2.$ Так как $\frac{7}{\cos^2 x} \geq 7$, то $y' > 0$. Следовательно, функция $y(x)$ возрастает. Значит, наименьшее значение $y(x)$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ равно $y(0) = 7 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 5 = 5$.

Ответ: 5.

405. $y = (x + 4) \cdot e^{x-4}.$
 $y' = (x + 4)' \cdot e^{x-4} + (x + 4) \cdot (e^{x-4})' = e^{x-4} + (x + 4) \cdot e^{x-4} = e^{x-4} \cdot (x + 5).$
 $y' = 0, x + 5 = 0, x = -5.$

В точке $x = -5$ производная исходной функции обращается в ноль и при переходе через нее меняет знак с минуса на плюс, значит, $x = -5$ — точка минимума исходной функции.

Ответ: -5 .

406. $y = (2 - x) \cdot e^{2-x}.$
 $y' = (2 - x)' \cdot e^{2-x} + (2 - x) \cdot (e^{2-x})' = -e^{2-x} - (2 - x) \cdot e^{2-x} = e^{2-x} \cdot (x - 3).$
 $y' = 0, x = 3.$

В точке $x = 3$ производная исходной функции обращается в ноль и при переходе через нее меняет знак с минуса на плюс, значит, $x = 3$ — точка минимума исходной функции.

Ответ: 3.

407. $y = 6x - \log_2(x + 6)^2 = 6x - 2\log_2(x + 6), y' = 6 - \frac{2}{(x + 6)\ln 2}.$

При $x \in [-5, 5; 0]$ выполняется неравенство $y'(x) > 0$. Следовательно, на отрезке $[-5, 5; 0]$ функция $y(x)$ возрастает. Значит, наименьшее значение на отрезке функция принимает на его левой границе, то есть

$$y_{\text{наим.}} = y(-5,5) = 6 \cdot (-5,5) - \log_2 (0,5)^2 = -33 + 2 \log_2 2 = -31.$$

Ответ: -31 .

$$408. y = 8x - \log_2(x+3)^2 = 8x - 2 \log_2(x+3); y' = 8 - \frac{2}{(x+3) \ln 2}.$$

При $x \in [-2,5; 0]$ выполняется неравенство $y'(x) > 0$. Следовательно, на отрезке $[-2,5; 0]$ функция $y(x)$ возрастает. Значит, наименьшее значение на отрезке функция принимает на его левой границе, то есть

$$y_{\text{наим.}} = y(-2,5) = 8 \cdot (-2,5) - \log_2 (0,5)^2 = -20 + 2 \log_2 2 = -18.$$

Ответ: -18 .

$$409. y' = 5 - \frac{5}{x+4}. \text{ Уравнение } y' = 0 \text{ имеет корень } x = -3.$$

$y(-3) = 5 \cdot (-3) - 5 \ln 1 + 2 = -13$; $y(0) = 5 \cdot 0 - 5 \ln 4 + 2 = 2 - 10 \ln 2$. Так как $\ln 2 < 1$; $-10 \ln 2 > -10$; $2 - 10 \ln 2 > -8$, то наименьшее значение функции $y(x)$ на отрезке $[-3; 0]$ равно -13 .

Ответ: -13 .

$$410. y' = (3x - 3 \ln(x+2))' = 3 - \frac{3}{x+2}. \text{ Уравнение } y' = 0 \text{ имеет корень } x = -1. \text{ Так как } y' < 0 \text{ при } x \in [-1,5; -1], \text{ то функция } y(x) \text{ убывает на отрезке } [-1,5; -1]. \text{ Следовательно, наименьшее значение равно } y(-1) = 3 \cdot (-1) - \ln 1^3 = -3.$$

Ответ: -3 .

$$411. \text{ Пусть } g(x) = \log_2 x, \text{ тогда } g(x) \text{ возрастает на промежутке } \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

Пусть $p(g) = g^2 - 4g - 3$, тогда $p(g)$ убывает на промежутке

$$\left[\log_2 \frac{1}{2}; \log_2 2\right] = [-1; 1]. \text{ Итак, } y(x) = p(g(x)) \text{ убывает на промежутке}$$

$$\left[\frac{1}{2}; 2\right], \text{ значит, наибольшее значение принимает при } x = \frac{1}{2}.$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2^2 \frac{1}{2} - 4 \log_2 \frac{1}{2} + 3 = 1 + 4 + 3 = 8.$$

Ответ: 8 .

412. Каждая из функций $g(x) = 2^{2x}$ и $p(x) = 2^x - 2$ возрастает на промежутке $[-1; 2]$. Тогда их сумма $y = p(x) + g(x)$ также возрастает на промежутке $[-1; 2]$, значит, наименьшее значение принимает при $x = -1$.

$$y(-1) = 2^{-2} + 2^{-1} - 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = -1,25.$$

Ответ: $-1,25$.

$$413. y' = 3x^2 - 8x - 3, y' = 0, 3x^2 - 8x - 3 = 0 \iff \begin{cases} x = 3, \\ x = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$3 \in (2; 5); -\frac{1}{3} \notin (2; 5).$$

$$y(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = -12;$$

$$y(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = -16;$$

$$y(5) = 5^3 - 4 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 2 = 12.$$

Из чисел $-16, -12, 12$ наименьшее число -16 .

Ответ: -16 .

$$414. y' = 3x^2 + 10x - 8, y' = 0, 3x^2 + 10x - 8 = 0 \iff \begin{cases} x = -4, \\ x = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$-4 \in (-5; -2); \frac{2}{3} \notin (-5; -2).$$

$$y(-5) = (-5)^3 + 5 \cdot (-5)^2 - 8 \cdot (-5) + 1 = 41;$$

$$y(-4) = (-4)^3 + 5 \cdot (-4)^2 - 8 \cdot (-4) + 1 = 49;$$

$$y(-2) = (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) + 1 = 29;$$

Из чисел $29, 41, 49$ наибольшее число 49 .

Ответ: 49 .

$$415. 1) y' = -e^{x+10} + (10-x)e^{x+10} = e^{x+10}(-1+10-x) = e^{x+10}(9-x).$$

$$2) \text{ Найдём точки экстремума: } y' = 0 \Rightarrow 9 - x = 0, x = 9.$$

3) При $x < 9$ $y' > 0$, а при $x > 9$ $y' < 0$, значит, $x = 9$ — точка максимума исходной функции.

Ответ: 9 .

$$416. 1) y' = -e^{19-x} + (19-x) \cdot (-e^{19-x}) = -e^{19-x}(1+19-x) = -e^{19-x}(20-x).$$

$$2) \text{ Найдём точки экстремума: } y' = 0 \Rightarrow 20 - x = 0, x = 20.$$

3) При $x < 20$ $y' < 0$, а при $x > 20$ $y' > 0$, значит, $x = 20$ — точка минимума исходной функции.

Ответ: 20 .

417. Найдём производную функции y .

$$y'(x) = \frac{7}{x+7} - 7 = \frac{7-7x-49}{x+7} = \frac{-7x-42}{x+7}, y'(x) = 0$$

при $x = -6 \in [-6, 5; 0]$. На отрезке $[-6, 5; 0]$ заданная функция имеет единственную точку экстремума — точку максимума $x = -6$, следовательно, в этой точке она принимает наибольшее значение

$$y(-6) = 7 \ln(-6 + 7) - 7 \cdot (-6) + 8 = 50.$$

Ответ: 50.

418. Найдём производную функции y .

$$y'(x) = \frac{6}{x+6} - 6 = \frac{6-6x-36}{x+6} = \frac{-6x-30}{x+6}.$$

$$y'(x) = 0 \text{ при } x = -5 \in [-5,5; 0].$$

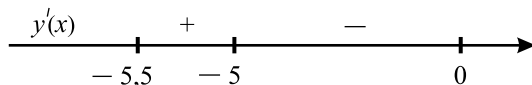


Рис. 18.

На отрезке $[-5,5; 0]$ заданная функция имеет единственную точку экстремума — точку максимума $x = -5$ (см. рис. 18), следовательно, в этой точке функция принимает наибольшее значение

$$y(-5) = 6 \ln(-5 + 6) - 6 \cdot (-5) + 11 = 41.$$

Ответ: 41.

419. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:

$$y(-1) = 15 \cdot 1 - (-1)^3 = 15 + 1 = 16, \quad y(10) = 15 \cdot 100 - 10^3 = 500.$$

2) Найдём производную: $y' = 15 \cdot 2x - 3x^2 = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x)$.

3) Найдём значения x , при которых производная функции равна нулю:
 $3x(10 - x) = 0, x_1 = 0, x_2 = 10$.

4) Значение функции при $x = 10$ подсчитано в 1-м пункте, при $x = 0$ значение функции равно 0.

5) Выберем среди найденных значений функции наибольшее:

$$y(10) = 500.$$

Ответ: 500.

420. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:

$$y(-3) = 6 - 27 \cdot 3 - (-3)^3 = 6 - 81 + 27 = -48,$$

$$y(4) = 6 + 27 \cdot 4 - 64 = 6 + 108 - 64 = 50.$$

2) Найдём производную: $y' = 27 - 3x^2 = 3(9 - x^2)$.

3) Найдём значения x , при которых производная функции равна нулю:
 $3(9 - x^2) = 0$ при $x_{1,2} = \pm 3$.

4) Значения $x = \pm 3$ принадлежат отрезку $[-3; 4]$, $y(-3)$ найдено в 1-м пункте, $y(3) = 6 + 27 \cdot 3 - 27 = 60$.

5) Выберем среди найденных значений функции наименьшее:

$$y(-3) = -48.$$

Ответ: -48.

421. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:

$$y(-2) = 5 + 6 \cdot (-2) - 4 = 5 - 12 - 4 = 5 - 16 = -11,$$

$$y(4) = 5 + 6 \cdot 4 - 16 = 5 + 24 - 16 = 29 - 16 = 13.$$

2) Найдём производную: $y' = 6 - 2x$.

3) Найдём значения x , при которых производная функции равна нулю:
 $6 - 2x = 0, x = 3$.

4) Значение $x = 3$ принадлежит отрезку $[-2; 4]$, Найдём значение функции при $x = 3$: $y(3) = 5 + 18 - 9 = 23 - 9 = 14$.

5) Выберем среди найденных значений функции наибольшее: $y(3) = 14$.

Ответ: 14.

422. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:

$$y(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - (-2^3) = 6 \cdot 4 + 8 = 24 + 8 = 32,$$

$$y(3) = 6 \cdot 9 - 27 = 54 - 27 = 27.$$

2) Найдём производную: $y' = 12x - 3x^2$.

3) Найдём значения x , при которых производная функции равна нулю:
 $12x - 3x^2 = 0, 3x(4 - x) = 0, x = 0, x = 4$.

4) Значение $x = 0$ принадлежит отрезку $[-2; 3]$. Найдём значение функции в этой точке: $y(0) = 6 \cdot 0 - 0 = 0$.

5) Выберем из пунктов 1 и 4 наименьшие значения функции. Видим, что из чисел 32; 27; 0 наименьшим является 0.

Ответ: 0.

423. $y' = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x)$. $y' = 0$ при $x = 0$; $x = 10$.

1) При $x < 0$ $y' < 0$, при $0 < x < 10$ $y' > 0$, значит, $x = 0$ — точка минимума.

2) При $0 < x < 10$ $y' > 0$, при $x > 10$ и $y' < 0$, значит, $x = 10$ — точка максимума.

Ответ: 0.

424. $y' = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x)$. $y' = 0$ при $x = 0$; $x = 10$.

1) При $x < 0$ $y' < 0$, при $0 < x < 10$ $y' > 0$, значит, $x = 0$ — точка минимума.

2) При $0 < x < 10$ $y' > 0$, при $x > 10$ и $y' < 0$, значит, $x = 10$ — точка максимума.

Ответ: 10.

425. $y' = 6 + 2x$. $y' = 0$ при $x = -3$; $y' < 0$ при $x < -3$, $y' > 0$ при $x > -3$. $x = -3$ — точка минимума.

Ответ: -3.

426. $y' = \left(2 \cos x - \frac{12}{\pi}x + 3\right)' = -2 \sin x - \frac{12}{\pi}$. Так как $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{2}{3}\pi; 0\right]$. Наибольшим является значение $y\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) - \frac{12}{\pi} \cdot \left(-\frac{2}{3}\pi\right) + 3 = 10$.

Ответ: 10.

427. $y' = 11 \cos x - 13$. Т. к. $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Значит, наименьшее значение $y(0) = 11 \sin 0 - 13 \cdot 0 + 5 = 5$.

Ответ: 5.

428. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:

$$y(2) = (6 - 2)e^{10-2} = 4e^8,$$

$$y(9) = (6 - 9)e^{10-9} = -3e.$$

2) Найдём производную: $y' = -e^{10-x} + (6 - x)e^{10-x} \cdot (-1) = -e^{10-x}(1 + 6 - x) = -e^{10-x}(7 - x)$.

3) Найдём значения x , при которых производная равна нулю: $-e^{10-x}(7 - x) = 0$, $x = 7$; $7 \in [2; 9]$.

4) Найдём значения функции при $x = 7$: $y(7) = (6 - 7)e^{10-7} = -e^3$.

5) Среди найденных значений функции выберем наименьшее значение: $y(7) = -e^3$, оно достигается при $x = 7$.

Ответ: 7.

429. $y' = \frac{5(x+4)^4}{(x+4)^5} - 5 = \frac{5}{x+4} - 5 = \frac{-5x-15}{x+4} = \frac{-5(x+3)}{x+4}$. $y' = 0$ при $x = -3$.

Найдём значения функции на концах отрезка и при $x = -3$:

$$y(-3,5) = \ln(-3,5 + 4)^5 - 5 \cdot (-3,5) = -5 \ln 2 + 17,5;$$

$$y(-3) = \ln(-3 + 4)^5 - 5 \cdot (-3) = 15; y(0) = \ln(0 + 4)^5 - 5 \cdot 0 = 5 \ln 4.$$

Наибольшее значение функции при $x = -3$ и равно 15.

Ответ: 15.

430. 1) $y' = -(e^{x+27}) + e^{x+27}(27-x) = e^{x+27}(-1+27-x) = (26-x)e^{x+27}$.

2) $y' = 0$ при $x = 26$.

3) При переходе через точку $x = 26$ производная функции меняет знак с «плюса» на «минус», значит, $x = 26$ — точка максимума исходной функции.

Ответ: 26.

431. 1) $y' = e^{x-5} + (x+9)e^{x-5} = e^{x-5}(1+x+9) = e^{x-5}(10+x)$.

2) $y' = 0$, $(10 + x)e^{x-5} = 0$, $10 + x = 0$, $x = -10$.

3) При переходе через точку $x = -10$ производная функции меняет знак с «минуса» на «плюс», значит, $x = -10$ — точка минимума.

Ответ: -10 .

432. 1) Найдём значения функции на концах отрезка: $y(1) = 1 + \frac{16}{1} = 17$;

$$y(8) = 8 + \frac{16}{8} = 10.$$

2) Найдём производную: $y' = 1 - \frac{16}{x^2}$.

3) Найдём стационарные точки: $1 - \frac{16}{x^2} = 0$, $x^2 = 16$, $x = \pm 4$.

4) Значение $x = -4$ не принадлежит указанному в условии отрезку. Значение $x = 4$ отрезку $[1; 8]$ принадлежит.

5) Найдём значение функции в точке, где производная равна нулю:

$$y(4) = 4 + \frac{16}{4} = 8.$$

6) Выберем из пунктов 1 и 5 наименьшее значение функции. Наименьшим является 8.

Ответ: 8.

433. 1) Найдём значения функции на концах отрезка:

$$y(-3) = -3 - 3 + 16 = 10, \quad y(9) = 1 + 9 + 16 = 26.$$

2) Найдём производную: $y' = -\frac{9}{x^2} + 1$.

3) Найдём стационарные точки: $y' = 0$, $-\frac{9}{x^2} + 1 = 0$, $\frac{9}{x^2} = 1$, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$.

4) Найдём значение функции при $x = 3$: $y(3) = 3 + 3 + 16 = 22$.

5) Выберем среди найденных значений функции наибольшее: $y(9) = 26$.

Ответ: 26.

434. $y' = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2}$, $x \neq 0$. $y' = 0$ при $x = \pm 4$.

1. $y' > 0$ при $x < -4$ и $x > 4$;

2. $y' < 0$ при $-4 < x < 4$.

Точка $x = -4$ — точка максимума.

Ответ: -4 .

$$435. y' = -\frac{9}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 9}{x^2}, x \neq 0. y' = 0, \text{ при } x = \pm 3.$$

$$1. y' < 0 \text{ при } -3 < x < 3;$$

$$2. y' > 0 \text{ при } x < -3 \text{ или } x > 3.$$

Точка $x = 3$ — точка минимума функции $y = \frac{9}{x} + x + 16$.

Ответ: 3.

$$436. y' = -\left(\frac{1 \cdot (x^2 + 169) - (2x \cdot x)}{(x^2 + 169)^2}\right) = \frac{x^2 - 169}{(x^2 + 169)^2}. y' = 0 \text{ при } x = \pm 13.$$

$$1. y' > 0 \text{ при } x < -13 \text{ или } x > 13;$$

$$2. y' < 0 \text{ при } -13 < x < 13.$$

Точка $x = -13$ — точка максимума.

Ответ: -13.

$$437. y' = -\left(\frac{x^2 + 9 - 2x \cdot x}{(x^2 + 9)^2}\right) = -\frac{9 - x^2}{(x^2 + 9)^2} = \frac{x^2 - 9}{(x^2 + 9)^2}. y' = 0, x^2 - 9 = 0, \text{ при } x = \pm 3.$$

$$1) y' > 0 \text{ при } x < -3 \text{ или } x > 3;$$

$$2) y' < 0 \text{ при } -3 < x < 3.$$

Точка $x = 3$ — точка минимума.

Ответ: 3.

$$438. y' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 49)}{x^2} = \frac{x^2 - 49}{x^2}. y' = 0, x^2 - 49 = 0, x = \pm 7. -7 \notin (1; 7), 7 \notin (1; 7).$$

Найдём значения функции на концах отрезка: $y(1) = \frac{1+49}{1} = 50$,

$$y(7) = \frac{49+49}{7} = \frac{49 \cdot 2}{7} = 14.$$

Ответ: 50.

$$439. y' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 49)}{x^2} = \frac{x^2 - 49}{x^2}. y' = 0, x^2 - 49 = 0, x = \pm 7. -7 \notin (-7; -1), 7 \notin (-7; -1).$$

Найдём значения функции на концах отрезка: $y(-1) = \frac{1+49}{-1} = -50$,

$$y(-7) = \frac{49+49}{-7} = \frac{49 \cdot 2}{-7} = -14.$$

Ответ: -50 .

$$440. y' = 2 \cos x - 2(\cos x - x \sin x) - x = 2x \sin x - x = x(2 \sin x - 1).$$

$$y' = 0, \begin{cases} x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases} \text{ так как } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right], \text{ то } \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{\pi}{6}. \end{cases} \text{ Найдём значе-}$$

ния функции на концах отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$ и при $x = 0$:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 0,5 \cdot \frac{\pi^2}{4} = -2 - \frac{1}{8}\pi^2 = \\ = \frac{-16 - \pi^2}{8};$$

$$y(0) = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 0 = 0; y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} - 0,5 \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \\ = 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{\pi^2}{72}. \text{ Среди этих значений наибольшим является значение } y(0), \text{ равное } 0.$$

Ответ: 0 .

$$441. y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[4]{x^3}}{4x} = \frac{\sqrt[4]{x}(1 - 3\sqrt{x})}{4x}.$$

Если $y' = 0$, то $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$, откуда $x = \frac{1}{9}$, но $\frac{1}{9} \notin [1; 16]$.

При $x \in [1; 16]$ $y' < 0$, следовательно, наименьшее значение функция $y(x)$ принимает при $x = 16$:

$$y(16) = \sqrt[4]{16} - \sqrt[4]{16^3} = 2 - \sqrt[4]{2^{12}} = 2 - 8 = -6.$$

Ответ: -6 .

$$442. y = (x-2)^2 e^{5-x}; y' = 2(x-2)e^{5-x} - (x-2)^2 e^{5-x} = \\ = -(x-2)(x-4)e^{5-x}. y' = 0 \text{ при } x = 2 \text{ или } x = 4; y' < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty). y(x) \text{ убывает на } (-\infty; 2], \text{ возрастает на } [2; 4], \\ \text{убывает на } [4; +\infty]. \text{ Единственная точка минимума — это } x = 2.$$

Ответ: 2 .

$$443. y' = (2x-10)e^{x+2} + (x^2-10x+17)e^{x+2} = \\ = (x^2-8x+7)e^{x+2} = (x-1)(x-7)e^{x+2}. y' = 0 \text{ при } x = 1 \text{ и } x = 7; \\ y' > 0 \text{ при } x \in (-\infty; 1) \cup (7; +\infty); y' < 0 \text{ при } x \in (1, 7). y(x) \text{ возрастает}$$

на $(-\infty; 1]$, убывает на $[1; 7]$, возрастает на $[7; +\infty)$. Единственная точка максимума — это $x = 1$.

Ответ: 1.

$$444. y' = 2x - 8 + \frac{6}{x}; y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0; x^2 - 4x + 3 = 0;$$

$$x_1 = 1, x_2 = 3. x_1 \in \left[\frac{15}{17}; \frac{19}{17}\right]; x_2 \notin \left[\frac{15}{17}; \frac{19}{17}\right]; y' > 0 \text{ при } x \in (0; 1),$$

$y' < 0$ при $x \in (1; 3)$, поэтому $x = 1$ — точка максимума функции $y(x)$ и наибольшее значение на указанном отрезке достигается в точке $x = 1$; $y(1) = 1 - 8 + 0 + 19 = 12$.

Ответ: 12.

$$445. y' = 24 - 4x - \frac{20}{x}; y' = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 24x - 20 = 0; x^2 - 6x + 5 = 0;$$

$$x_1 = 1; x_2 = 5; x_1 \in \left[\frac{1}{7}; \frac{13}{7}\right], x_2 \notin \left[\frac{1}{7}; \frac{13}{7}\right]. y' < 0 \text{ при } x \in (0; 1),$$

$y' > 0$ при $x \in (1; 5)$, поэтому $x = 1$ — точка минимума функции $y(x)$ и наименьшее значение $y(x)$ на отрезке $\left[\frac{1}{7}; \frac{13}{7}\right]$ достигается в точке $x = 1$; $y(1) = 3 + 24 - 2 - 0 = 25$.

Ответ: 25.

$$446. y' = \frac{4(x+5)^3}{(x+5)^4} - 10 = \frac{4}{x+5} - 10; y' = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x+5} = 10; x+5 = 0,4; x = -4,6.$$

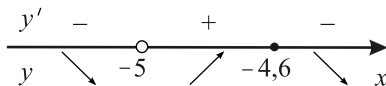


Рис. 19.

$x = -4,6$ — точка максимума (см. рис. 19).

Ответ: $-4,6$.

$$447. y' = \frac{2x-8}{(x^2-8x+21)\ln 4}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 4; x^2 - 8x + 21 = (x-4)^2 + 5 > 0, \text{ поэтому } x = 4 \text{ — точка минимума (см. рис. 20).}$$

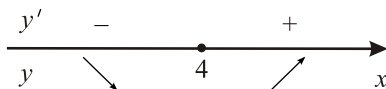


Рис. 20.

Ответ: 4.

448. $y' = 4 - \frac{3}{\cos^2 x}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4}$; $\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ корнями последнего уравнения являются $x = \pm \frac{\pi}{6}$. Находим значения функции $y(x)$ на концах отрезка и в стационарных точках.

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\pi - 3 \cdot (-1) + \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = 3 - \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

$$y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{2\pi}{3} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = 0.$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}.$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi - 3 \cdot 1 + \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{5\pi}{3} - 3 - \sqrt{3}.$$

Наименьшим среди найденных значений является 0.

Ответ: 0.

449. $y' = 24 \cos x - 12\sqrt{3}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеем единственный корень $x = \frac{\pi}{6}$. Найдём значения $y(x)$ на концах отрезка и в стационарной точке.

$$y(0) = 2\sqrt{3}\pi + 2; y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 24 \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\pi + 2\sqrt{3}\pi + 2 = 14;$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 24 - 6\sqrt{3}\pi + 2\sqrt{3}\pi + 2 = 26 - 4\sqrt{3}\pi.$$

Наибольшим среди найденных значений является 14.

Ответ: 14.

450. Найдём стационарные точки. $y' = -e^{x-9} + (10-x)e^{x-9} = (9-x)e^{x-9}$. $y' = 0$ при $x = 9$, $y' > 0$ при $x < 9$, $y' < 0$ при $x > 9$. Поэтому $y(x)$ возрастает на отрезке $[8; 9]$ и убывает на отрезке $[9; 10]$. Наибольшие значения достигаются в точке $x = 9$; $y(9) = (10-9)e^{9-9} = 1$.

Ответ: 1.

451. Найдём стационарные точки. $y' = (8x+24)e^x + (4x^2+24x-24)e^x = (4x^2+32x)e^x = 4x(x+8)e^x$. $y' = 0$ при $x = 0$ или $x = -8$, на отрезке $[-1; 2]$ из этих двух точек лежит только $x = 0$. На промежутке $[-1; 0)$ имеем $y'(x) < 0$, на промежутке $(0; 2]$ имеем $y'(x) > 0$. Поэтому $y(x)$ убывает

на отрезке $[-1; 0]$ и возрастает на отрезке $[0; 2]$. Наименьшее значение достигается в точке $x = 0$; $y'(0) = -24$.

Ответ: -24 .

452. $y' = 6x^2 - 150$; $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 = 150$; $x^2 = 25$; $x = \pm 5$.

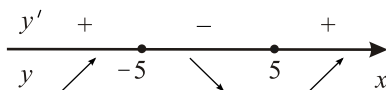


Рис. 21.

$x = 5$ — точка минимума (см. рис. 21).

Ответ: 5.

453. $y' = -3\sqrt{x} + 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 9$; $\sqrt{x} = 3$; $x = 9$.

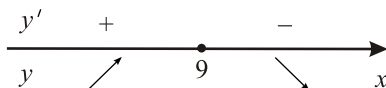


Рис. 22.

$x = 9$ — точка максимума (см. рис. 22).

Ответ: 9.

454. $y' = (-6x + 18)5^{-3x^2+18x-24} \ln 5$; $y' = 0$ при $x = 3$.

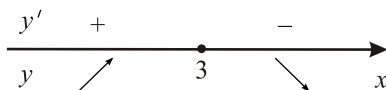


Рис. 23.

Наибольшее значение $y(3) = 5^{-27+54-24} = 5^3 = 125$ (см. рис. 23).

Ответ: 125.

455. $y' = -\frac{16}{x^2} + 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16$; $x = \pm 4$. Находим $y(4)$ и $y(8)$.

$y(4) = \frac{16}{4} + 4 = 8$; $y(8) = \frac{16}{8} + 8 = 10$. Наибольшим среди найденных значений является 10.

Ответ: 10.

456. ОДЗ: $x^2 - 8x + 17 \geq 0$, $(x - 4)^2 + 1 \geq 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$y' = -\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+17}}, \quad y' = 0 \text{ при } x = 4.$$

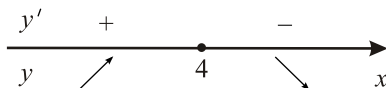


Рис. 24.

$x = 4$ — точка максимума (см. рис. 24).

Ответ: 4.

$$457. y = -\frac{x^2 + 361}{x} = -x - \frac{361}{x}.$$

$$y' = -1 + \frac{361}{x^2}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 361; \quad x = \pm 19.$$

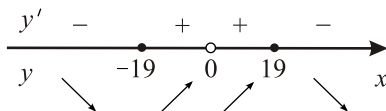


Рис. 25.

$x = -19$ — точка минимума (см. рис. 25).

Ответ: -19.

458. $y' = 4 \sin x + (4x - 3) \cos x - 4 \sin x = (4x - 3) \cos x$. Найдём стационарные точки на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. $y' = 0$; $(4x - 3) \cos x = 0$; на указанном интервале имеется единственный корень $x = 0,75$. При $x \in (0; 0,75)$ имеем $y'(x) < 0$; при $x \in \left(0,75; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $y'(x) > 0$. Поэтому $x = 0,75$ — точка минимума.

Ответ: 0,75.

459. $y' = 2 \cos x - 2 \cos x + (2x - 7) \sin x = (2x - 7) \sin x$. На интервале $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ уравнение $y' = 0$ имеет единственный корень $x = 3,5$.

При $x \in (\pi; 3,5)$ имеем $y' > 0$; при $x \in \left(3,5; \frac{3\pi}{2}\right)$ имеем $y' < 0$. Точка $x = 3,5$ — точка максимума.

Ответ: 3,5.

460. $y' = 16 - \frac{1}{x}$; $y' = 0$ при $x = \frac{1}{16} \notin \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right]$. При $x > \frac{1}{16}$ $y' > 0$, значит, на отрезке $\left[\frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right]$ функция y возрастает и принимает наименьшее значение на левом конце отрезка. $y\left(\frac{1}{8}\right) = 2 - \ln 1 + 4 = 6$.

Ответ: 6.

461. $y' = \frac{10}{x+3} - 4$; $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{x+3} = 4$; $x+3 = 2,5$; $x = -0,5$, $-0,5 \notin (-2; -0,5)$. На промежутке $(-2; -0,5)$ $y' > 0$ функция $y(x)$ возрастает, значит, наименьшее значение на отрезке $[-2; -0,5]$ достигается в точке $x = -2$. $y(-2) = 10 \ln 1 + 8 + 2 = 10$.

Ответ: 10.

$$462. S = \int_{\frac{1}{2}}^2 (24x - 9x^2) dx = (12x^2 - 3x^3) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = 48 - 24 - 3 + \frac{3}{8} = 21,375.$$

Ответ: 21,375.

$$463. S = \int_0^{\ln \frac{5}{2}} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln \frac{5}{2}} = e^{\ln \frac{5}{2}} - e^0 = \frac{5}{2} - 1 = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

464. Графиком функции $y = \frac{1}{x} - 1$ является гипербола, смещенная на

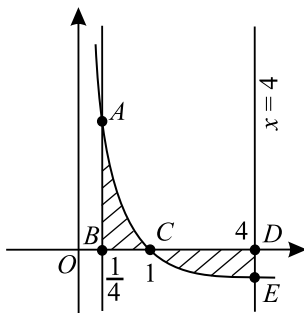


Рис. 26.

единицу вниз по оси ординат относительно гиперболы $y = \frac{1}{x}$. При этом этот график пересекает ось абсцисс в единственной точке при $x = 1$, что можно определить, решив уравнение $\frac{1}{x} - 1 = 0$. Таким образом, фигура, ограниченная указанными в задаче линиями, будет иметь вид заштрихованной части плоскости на рисунке 26. Тогда площадь этой фигуры равна $S = S_{ABC} + S_{CDE}$ (см. рис. 26). Поскольку функция $y = \frac{1}{x} - 1$ на интервале $(1; 4]$ принимает отрицательные значения, то площадь части CDE фигуры будет вычислена по формуле

$$S_{CDE} = - \int_1^4 y(x) dx, \text{ в то время как площадь части } ABC \text{ определяется равенством } S_{ABC} = \int_{\frac{1}{4}}^1 y(x) dx.$$

Итак,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx - \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx = (\ln x - x) \Big|_{\frac{1}{4}}^1 - (\ln x - x) \Big|_1^4 = \\ &= \ln 1 - 1 - \ln \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ln 4 + 4 + \ln 1 - 1 = 2,25. \end{aligned}$$

Ответ: 2,25.

465. На отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$ $\sin x \geq 0$, на отрезке $\left[\pi; \frac{4\pi}{3} \right]$ $\sin x \leq 0$.

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} = \\ &= -\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) - \cos \pi = 1 + 0 - \frac{1}{2} + 1 = 1,5. \end{aligned}$$

Ответ: 1,5.

466. Найдём абсциссы точек пересечения данных линий $x^2 = x + 2$, $x^2 - x - 2 = 0$: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ — искомые абсциссы.

$$S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

467. Найдём абсциссы точек пересечения данных линий. Для этого решим уравнение

$-3x^2 - 3x = -9x - 9$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = 1 \pm 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Значит, данные линии ограничивают фигуру на отрезке $[-1; 3]$. При этом линия $y = -3x^2 - 3x$, ограничивая фигуру, лежит выше линии $y + 9x + 9 = 0$, так как $y = -3x^2 - 3x$ — квадратный трёхчлен с отрицательным первым коэффициентом, то есть его ветви направлены вниз. Поэтому, искомая площадь равна

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 (-3x^2 - 3x - (-9x - 9)) dx &= \int_{-1}^3 (-3x^2 + 6x + 9) dx = \\ &= (-x^3 + 3x^2 + 9x) \Big|_{-1}^3 = -27 + 27 + 27 - (1 + 3 - 9) = 32. \end{aligned}$$

Ответ: 32.

468. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x$.

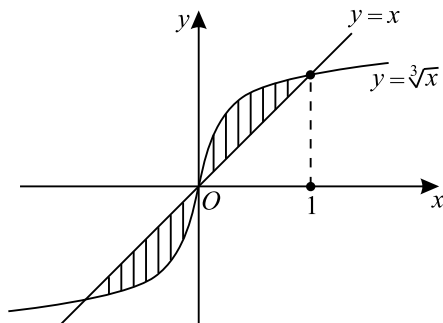


Рис. 27.

[t!b!p!] *Решение.* Функции $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x$ являются нечётными. Поэтому их графики симметричны относительно начала координат, а значит, фигура, ограниченная графиками этих функций, также симметрична относительно начала координат. Найдём площадь той части фигуры, которая лежит в правой полуплоскости системы координат. Для этого определим абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x$, лежащих в правой полуплоскости, из уравнения $\sqrt[3]{x} = x$. Очевидно, что эти абсциссы $x = 0$ и $x = 1$. Так как при $0 \leq x \leq 1$, $\sqrt[3]{x} \geq x$, а при $x > 1$, $\sqrt[3]{x} < x$, что можно определить аналитически или графически (см. рисунок 27), то графики функций $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x$ ограничивают искомую часть фигуры на отрезке $[0; 1]$. Поэтому площадь части фигуры, расположенной в правой полуплоскости, равна

$$\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x) dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx - \int_0^1 x dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \text{ Учитывая}$$

симметрию фигуры, получаем, что искомая площадь равна $S = 2 \cdot \frac{1}{4} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

469. Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий

$x^3 - x = 8x$, $x(x-3)(x+3) = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$. Функции $y = x^3$ и $y = 8x$ нечётные, фигура, ограниченная их графиками, симметрична от-

носительно начала координат. $S = 2 \int_0^3 (8x - x^3 + x) dx =$

$$2 \int_0^3 (9x - x^3) dx = 2 \left(\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^3 = 2 \cdot \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right) = 2 \cdot \frac{81}{4} = 40,5.$$

Ответ: 40,5.

470. Функции $y = x^2 + |x| + 1$ и $y = 3|x| + 4$ чётные, фигура, ограниченная их графиками, симметрична относительно оси Oy . Найдём абсциссы точек пересечения заданных функций на промежутке $x \geq 0$.

$x^2 + x + 1 = 3x + 4$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. $x_1 = -1$ не удовлетворяет условию $x \geq 0$.

$$S = 2 \int_0^3 (3x + 4 - x^2 - x - 1) dx = 2 \int_0^3 (2x + 3 - x^2) dx =$$

$$= 2 \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 2(9 + 9 - 9) = 18.$$

Ответ: 18.

471. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x^4 - 6x^2 + 3$, $y = 3 - 3x^2$.

Решение Ясно, что графики данных в условии функций ограничивают фигуру на участках между своими точками пересечения. Поэтому найдем абсциссы точек пересечения графиков заданных функций, решив уравнение:

$$3x^4 - 6x^2 + 3 = 3 - 3x^2, \quad 3x^4 - 3x^2 = 0, \quad x^2(x^2 - 1) = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Таким образом, линии данные в условии задачи пересекаются в трёх точках. Следовательно, фигура ограниченная ими состоит из двух частей: одна часть расположена в полосе между линиями $x = -1$, $x = 0$, вторая часть — в полосе между линиями $x = 0$, $x = 1$. Аналитически, исследовав

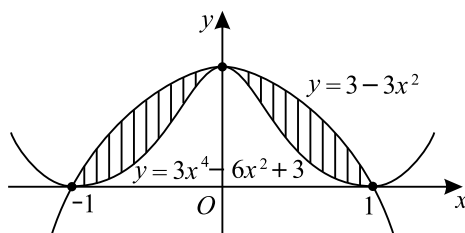


Рис. 28.

знак разности $(3x^4 - 6x^2 + 3) - (3 - 3x^2)$ на промежутках $[-1; 0]$ и $[0; 1]$, или графически (см. рисунок 28) можно определить, что при $-1 \leq x \leq 0$ и при $0 \leq x \leq 1$ $3x^4 - 6x^2 + 3 \leq 3 - 3x^2$. Поэтому площадь искомой фигуры равна

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 ((3 - 3x^2) - (3x^4 - 6x^2 + 3))dx + \int_0^1 ((3 - 3x^2) - (3x^4 - 6x^2 + 3))dx = \\ &= \int_{-1}^0 (3x^2 - 3x^4)dx + \int_0^1 (3x^2 - 3x^4)dx = \\ &= 3 \int_{-1}^0 x^2 dx - 3 \int_{-1}^0 x^4 dx + 3 \int_0^1 x^2 dx - 3 \int_0^1 x^4 dx = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^0 - 3 \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_{-1}^0 + 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 - 3 \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{3}{5} + 1 - \frac{3}{5} = \frac{4}{5} = 0,8. \end{aligned}$$

Ответ: 0,8.

472. Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий:

$$3x^3 - 9x^2 + 9x = 3x^2, \quad 3x^3 - 12x^2 + 9x = 0, \quad 3x(x^2 - 4x + 3) = 0, \\ 3x(x-1)(x-3) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3.$$

На отрезке $[0; 1]$ график функции $y = 3x(x^2 - 3x + 3)$ лежит выше графика функции $y = 3x^2$, а на отрезке $[1; 3]$ график функции $y = 3x^2$ лежит выше графика функции $y = 3x(x^2 - 3x + 3)$.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (3x^3 - 9x^2 + 9x - 3x^2)dx + \int_1^3 (3x^2 - 3x^3 + 9x^2 - 9x)dx = \\ &= \int_0^1 (3x^3 - 12x^2 + 9x)dx + \int_1^3 (12x^2 - 3x^3 - 9x)dx = \end{aligned}$$

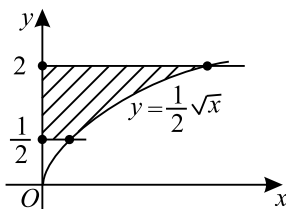


Рис. 29.

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{3x^4}{4} - 4x^3 + \frac{9x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(4x^3 - \frac{3x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} \right) \Big|_1^3 = \\
 &= \frac{3}{4} - 4 + \frac{9}{2} + 108 - \frac{243}{4} - \frac{81}{2} - 4 + \frac{3}{4} + \frac{9}{2} = 9,25.
 \end{aligned}$$

Ответ: 9,25.

473. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 \cos 2x$, $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{4}$ и $y = 0$.

Решение. Если $\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, то $\frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$. Функция $y = \cos t$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ неотрицательна, а следовательно, функция $y = 3 \cos 2x$ неотрицательна на отрезке $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right]$. Поэтому искомая площадь равна

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} 3 \cos 2x dx &= 3 \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = 3 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} = \\
 &= \frac{3}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

Ответ: 0,75.

474. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, $y = 1$, $y = 2$ и осью ординат.

Решение. Рассмотрим данную в условии линию не как зависимость координаты y от координаты x , а наоборот, как зависимость координаты x от координаты y . Это можно сделать так как функция $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ монотонна. Итак, выражая x через y , получаем, что та же самая линия задается

функцией $x = 4y^2$ при $y \in [0; +\infty]$. Тогда искомая фигура (см. рисунок 29) является криволинейной трапецией, ограниченной графиком функции $x = 4y^2$, осью аргумента Oy и прямыми $y = \frac{1}{2}$, $y = 2$, поэтому искомая площадь равна

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 4y^2 dy = 4 \int_{\frac{1}{2}}^2 y^2 dy = 4 \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{4}{3} \left(2^3 - \frac{1}{2^3} \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{63}{8} = \frac{21}{2}.$$

Ответ: 10,5.

$$475. S = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = -2 \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -2 \cos \pi + 2 \cos \frac{\pi}{2} = 2.$$

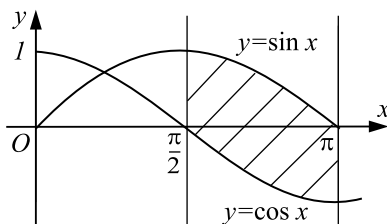


Рис. 30.

Ответ: 2.

476. По определению первообразной, $F'(x) = f(x)$. Угловый коэффициент касательной к графику $y = F(x)$ в точке $x_0 = \pi$ равен

$$F'(\pi) = f(\pi) = \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 = 0,75 + 1 = 1,75.$$

Ответ: 1,75.

477. Так как $f(x) = F'(x)$ и из графика видно, что $F(x)$ — возрастающая функция на отрезке $[-3; 2]$, то $f(x) > 0$ на этом отрезке. Следовательно, искомая площадь равна:

$$S = \int_{-3}^2 f(x) dx = F(2) - F(-3) = 2 - (-2) = 4.$$

Ответ: 4.

478. 1) Пусть 10%-ного раствора взяли x г, тогда собственно соляной кислоты в нем: $\frac{x}{10}$ г.

2) В 600 г 15%-ного раствора концентрированной соляной кислоты

содержится: $600 \cdot \frac{15}{100} = 90$ г кислоты.

3) 30%-ного раствора концентрированной соляной кислоты взяли:
 $\left(90 - \frac{x}{10}\right) \cdot \frac{100}{30} = \left(300 - \frac{x}{3}\right)$ г.

4) Тогда 10%-ого раствора было:

$$600 - \left(300 - \frac{x}{3}\right) = \left(300 + \frac{x}{3}\right) \text{ г.}$$

Составим уравнение и решим его.

$$x = 300 + \frac{x}{3}, \quad \frac{2}{3}x = 300, \quad x = 450 \text{ г.}$$

Ответ: 450.

479. Если в сплав массой 24 кг добавить x кг олова, то масса нового сплава окажется равной $(24 + x)$ кг с 40%-ным содержанием меди, то есть меди в новом сплаве $0,4(24 + x)$ кг. В 45%-ном сплаве массой 24 кг меди содержится $24 \cdot 0,45 = 10,8$ кг; эта же количество меди содержится в новом сплаве.

Составим и решим уравнение: $0,4(24 + x) = 10,8$; $24 + x = 27$, $x = 3$.

Значит, 3 кг чистого олова надо добавить в сплав.

Ответ: 3.

480. Пусть 1-ый сосуд содержит $x\%$ щелочи, тогда 2-ой — $(x - 40)\%$.

Если 4 л составляют $x\%$ раствора, то всего раствора в 1-ом сосуде

$4 : \frac{x}{100} = \frac{400}{x}$ (л); во 2-ом сосуде 6 л щелочи, что составляет $(x - 40)\%$

всего объема раствора, значит, весь объем раствора:

$6 : \frac{x - 40}{100} = \frac{600}{x - 40}$ (л). В двух сосудах $\left(\frac{400}{x} + \frac{600}{x - 40}\right)$ л, а по усло-

вию задачи в них 20 л. Составим и решим уравнение: $\frac{400}{x} + \frac{600}{x - 40} = 20$;

$$x(x - 40) \neq 0; \quad \frac{20}{x} + \frac{30}{x - 40} = 1; \quad 20(x - 40) + 30x = x(x - 40);$$

$$20x - 800 + 30x = x^2 - 40x; \quad x^2 - 90x + 800 = 0; \quad x_{1,2} = 45 \pm \sqrt{2025 - 800};$$

$$x_{1,2} = 45 \pm \sqrt{1225}; \quad x_1 = 45 - 35; \quad x_2 = 45 + 35; \quad x_1 = 10; \quad x_2 = 80.$$

Оба числа — корни составленного уравнения. По смыслу задачи $x > 40$, значит, $x = 80$. 80% щелочи содержал 1-ый сосуд.

Ответ: 80.

481. Пусть x — первоначальная масса сплава. Тогда

$x - 5$ — количество меди в сплаве;

$\frac{x-5}{x} \cdot 100$ — содержание меди в «старом» сплаве в процентах,

$\frac{x-5}{x+15} \cdot 100$ — содержание меди в «новом» сплаве в процентах.

Составим и решим уравнение:

$$\frac{(x-5) \cdot 100}{x} - \frac{(x-5) \cdot 100}{x+15} = 30, 10(x-5)(x+15-x) = 3x(x+15),$$

$$50(x-5) = x(x+15), x^2 - 35x + 250 = 0, x_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 250 \cdot 4}}{2},$$

$$x_{1,2} = \frac{35 \pm 5\sqrt{49-40}}{2} = \frac{35 \pm 5}{2}, x_1 = 25, x_2 = 10. \text{ Но так как в условии сказано, что } x < 20, \text{ то } x = 10 \text{ кг.}$$

Ответ: 10.

482. Пусть x г — первоначальная масса сплава. Тогда $(x-80)$ г — масса серебра в сплаве, $\frac{80}{x} \cdot 100\%$ — содержание в нем золота. После добавления

100 г чистого золота $(x+100)$ г — масса «нового» сплава; $\frac{80+100}{x+100} \cdot 100\%$ — содержание золота в «новом» сплаве, и это на 20% выше первоначального.

Составим и решим уравнение: $\frac{180}{x+100} \cdot 100 - \frac{80}{x} \cdot 100 = 20;$

$$\frac{180 \cdot 5}{x+100} - \frac{80 \cdot 5}{x} = 1; x(x+100) \neq 0; 180 \cdot 5x - 80 \cdot 5 \cdot (x+100) = x(x+100);$$

$$x^2 + 100x = 900x - 400x - 40000; x^2 - 400x + 40000 = 0; (x-200)^2 = 0; x = 200 \text{ (при } x(x+100) \neq 0).$$

200 г — первоначальная масса сплава, серебра в нем $200 - 80 = 120$ (г).

Ответ: 120.

483. Пусть x элементов продукции было выпущено в 1-ый месяц, выпуск падал на 40%, значит, во 2-ой месяц выпущено 60% от x , то есть $0,6x$ элементов; в 3-ий месяц — 60% от $0,6x$, то есть $0,36x$ элементов и т. д. Итак, числа выпускаемых ежемесячных элементов составляют геометрическую прогрессию: 1-ый член $b_1 = x$, $q = 0,6$, $n = 5$, $b_5 = x \cdot q^4$, $b_5 = 324$, поэтому $x \cdot 0,6^4 = 324$, $x = \frac{324}{0,6^4}$, $x = 2500$, $b_1 = 2500$.

$\frac{b_1(1-q^5)}{1-q}$ — сумма пяти первых членов — число элементов, выпущенных

$$\begin{aligned} \text{за пять месяцев. } & \frac{2500 \left(1 - \left(\frac{3}{5} \right)^5 \right)}{1 - 0,6} = 6250 \cdot \left(1 - \frac{243}{3125} \right) = \\ & = \frac{6250 \cdot 2882}{3125} = 5764. \end{aligned}$$

Ответ: 5764.

484. Пусть x л содержится уксуса в 6%-ном растворе, тогда

$$x = \frac{2 \cdot 6}{100} = 0,12 \text{ л.}$$

Пусть y л уксуса содержится в 1%-ном растворе, тогда

$$y = \frac{3 \cdot 1}{100} = 0,03 \text{ л.}$$

$(x + y)$ л — содержится уксуса в окончательном растворе, что составляет $\frac{x + y}{2 + 3} \cdot 100\% = \frac{0,12 + 0,03}{5} \cdot 100\% = 3\%$.

Ответ: 3.

485. Обозначим через x — стоимость летней коллекции одежды в рублях, через y — первоначальную прибыль магазина в рублях.

Тогда $(x + y)$ — первоначальная цена коллекции, а $0,6(x + y)$ — цена коллекции после снижения. С другой стороны, эту же цену можно определить по формуле $x + 0,2y$. Имеем уравнение: $0,6(x + y) = x + 0,2y$;

$$0,4y = 0,4x; \quad \frac{y}{x} \cdot 100\% = 100\%.$$

Ответ: 100.

486. Пусть x — размер первоначального тарифа в рублях. Тогда $1,3x$ — размер тарифа после запланированного увеличения, а $0,9 \cdot 1,3x$ — размер окончательно утвержденного тарифа. Следовательно, услуги фирмы подорожали на

$$\frac{(0,9x \cdot 1,3x - x)}{x} \cdot 100\% = 17\%.$$

Ответ: 17.

487. Пусть v — количество продукции молокозавода, c_1, c_2 — себестоимость продукции и её отпускная цена до повышения цен, а \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 — те же величины после повышения. Тогда планируемый выпуск продукции — $1,1v$, прибыль завода до повышения цен — $s = v \cdot (c_2 - c_1)$ у.е., а прибыль завода после увеличения выпуска продукции и повышения цен — $\tilde{s} = 1,1v \cdot (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1)$ у.е. По условию, $\tilde{c}_2 = 1,15c_2, c_1 = 0,75c_2, \tilde{c}_1 = 1,2c_1 \Rightarrow s = v \cdot (c_2 - 0,75c_2) = 0,25v \cdot c_2, \tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 = 1,15c_2 - 1,2c_1 = 1,15c_2 - 1,2 \cdot 0,75c_2 = 1,15c_2 - 0,9c_2 = 0,25c_2, \tilde{s} = 1,1v \cdot (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1) =$

$= 1,1v \cdot 0,25c_2 \Rightarrow \frac{\tilde{s}}{s} = 1,1$, то есть прибыль завода увеличится на 10%.

Ответ: 10.

488. Пусть v — ежемесячный объём продаж услуг до расширения, c — тарифы компании до преобразований, тогда vc — ежемесячная прибыль компании до преобразований. После преобразований ежемесячный объём продаж услуг равен $3v$, тарифы — $0,5c$, ежемесячная прибыль — $3v \cdot 0,5c = 1,5vc$. Значит дополнительная ежемесячная прибыль компании равна

$1,5vc - vc = 0,5vc$. Затраты на расширение, равные $6vc$, будут компенсированы дополнительной прибылью через $(6vc) : (0,5vc) = 12$ месяцев.

Ответ: 12.

489. Пусть в конце года a рублей стоимость золота в изделии, а b рублей стоимость серебра, тогда в начале года $1,2a$ рублей стоимость золота, и $1,05b$ рублей стоимость серебра. Зная, что стоимость изделия увеличивается на 15%, составим уравнение:

$1,2a + 1,05b = 1,15(a + b)$, $1,2a - 1,15a = 1,15b - 1,05b$, $0,05a = 0,1b$, $b = 0,5a$.

Примем за x г массу золота в изделии, а за y г массу серебра, тогда $\frac{a}{x}$

рублей — цена 1 г золота в начале года, а $\frac{b}{y}$ рублей — цена 1 г серебра в начале года. По условию 1 г золота был в 18 раз дороже 1 г серебра, составим уравнение:

$\frac{a}{x} = \frac{18b}{y}$, $\frac{a}{x} = \frac{18 \cdot 0,5a}{y}$, $y = 9x$. Узнаем, какую часть

ювелирного изделия составляет золото: $\frac{x}{x + 9x} = \frac{1}{10} = 0,1$.

Ответ: 0,1.

490. Пусть в сосуде находится 100 г раствора, тогда раствор содержит 10 г спирта и 90 г воды. После того как отлили $\frac{1}{3}$ содержимого, масса

раствора стала $\frac{200}{3}$ г, причем спирта $\frac{20}{3}$ г. В раствор долили воды, и его

масса стала $100 \cdot \frac{5}{6} = \frac{250}{3}$ (г). Найдём процентное содержание спирта.

$\left(\frac{20}{3} : \frac{250}{3}\right) \cdot 100\% = 8\%$.

Ответ: 8.

491. Пусть первоначально раствор объёмом 100 л, содержит x л цемента, тогда после того как вылили $\frac{2}{5}$ раствора, то цемента осталось $\frac{3}{5}x$ л. Бетономешалка после перемешиваний заполнена на $\frac{7}{9}$, значит объём полученного раствора $\frac{700}{9}$ л. Он содержит 27% цемента. Составим пропорцию:

$$\frac{\frac{3}{5}x}{\frac{700}{9}} = \frac{27}{100}, \quad x = 35.$$

Ответ: 35.

492. Пусть $a_1 = 100$ единиц составляет ВВП в первый год, $x\%$ — рост ВВП за год, через год ВВП составляет a_2 единиц, через 2 года $a_3 = 200$.

$$a_2 = 100 + \frac{100 \cdot x}{100} = 100 + x; \quad a_3 = a_2 + a_2 \cdot \frac{x}{100} = 100 + x + \frac{100 + x}{100} \cdot x;$$

$$a_3 = \frac{10000 + x^2 + 200x}{100}; \quad a_3 = 200; \quad 10000 + x^2 + 200x = 20000;$$

$$x^2 + 200x - 10000 = 0; \quad x_{1,2} = -100 \pm \sqrt{10000 + 10000}. \text{ По условию } x > 0: \\ x = -100 + \sqrt{20000}; \quad x \simeq -100 + 141,42 \approx 41\%.$$

Ответ: 41%.

493. Пусть a_i — количество самолётов, взлетающих в сутки с i -го по интенсивности аэропорта, тогда $a_1 = 42$, $a_2 = 38$, a_n — арифметическая прогрессия, где $n = 10$, $a_1 = 42$, $d = -4$, $S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 =$

$$= \frac{2 \cdot 42 - 36}{2} \cdot 10 = 24 \cdot 10 = 240. \text{ 240 самолётов взлетает в сутки во всех направлениях.}$$

Ответ: 240.

494. Ясно, что максимальную сумму, которую Василий Петрович может взять у банка, нужно вычислять в предположении, что в конце каждого года он будет выплачивать именно по 90 тыс. руб., а не меньше. Пусть s — величина этой суммы. В расчётах за единицу измерения примем 1000 руб. Тогда в конце года, долг Василия Петровича банку, после погашения им 90 тыс. руб. долга, составит $1,2 \cdot s - 90$. Ещё через год он должен выплатить банку $1,2 \cdot (1,2 \cdot s - 90)$, что, согласно нашему предположению, составляет 90 тыс. руб. Решим полученное уравнение: $1,2 \cdot (1,2 \cdot s - 90) = 90$,

$1,44 \cdot s - 108 = 90$, $s = \frac{19800}{144} = \frac{2200}{16} = \frac{275}{2} = 137,5$. Таким образом, максимальная сумма, которую Василий Петрович может взять у банка, равна 137500 руб.

Ответ: 137500.

495. Пусть банк выплачивает $p \cdot 100\%$ годовых. Тогда через год, после пополнения Марией Павловной своего счёта на 30 тыс. руб., сумма на её счёте будет составлять $(1 + p) \cdot 20 + 30$ тыс. руб. Еще через год, после начисления банком процентов, эта сумма возрастёт до $(1 + p) \cdot ((1 + p) \cdot 20 + 30)$ тыс. руб., что, по условию, составляет 60,95 тыс. руб. Решим полученное уравнение: $(1 + p)^2 \cdot 20 + (1 + p) \cdot 30 = 60,95$, $20p^2 + 70p - 10,95 = 0$, $D = 70^2 + 4 \cdot 20 \cdot 10,95 = 5776 = 76^2$, так как по смыслу задачи $p > 0$, то

$$p = \frac{-70 + 76}{40} = 0,15. \text{ Таким образом, по виду вклада, открытого Марией}$$

Павловной, банк выплачивает 15% годовых.

Ответ: 15.

496. Пусть p — количество примесей в руде до её обогащения. Тогда после первого этапа, количество примесей составит $(1 - 0,2)p = 0,8p$. После второго этапа эта величина уменьшится до $0,85 \cdot 0,8p = 0,68p$, а после третьего, количество примесей будет составлять $0,9 \cdot 0,68p = 0,612p$. Таким образом, количество примесей уменьшится на $0,388p$, что составляет $\frac{0,388p}{p} \cdot 100\% = 38,8\%$ от величины p .

Ответ: 38,8.

497. Пусть S — стоимость перевозки единицы груза до увеличения расценок, а v — объём почты, перевозимой фирмой в это же время. Тогда прежние затраты фирмы на перевозку равны $S \cdot v$. После двух подорожаний, на 20% в первый раз и на 10% во второй, стоимость перевозки единицы груза будет составлять $1,1 \cdot 1,2S = 1,32S$. А объём перевозимой фирмой почты, увеличившийся на 30%, будет равен $1,3v$. Следовательно, увеличившиеся расходы фирмы равны $1,32S \cdot 1,3v = 1,716S \cdot v$. Таким образом, расходы фирмы возрастут на $0,716S \cdot v$, что составляет $\frac{0,716S \cdot v}{S \cdot v} \cdot 100\% = 71,6\%$ от их прежней величины.

Ответ: 71,6.

498. Пусть банок с вишнёвым компотом — x штук, тогда с абрикосовым — $1,1x$. Пусть с абрикосовым компотом закупорено y трёхлитровых банок и $(1,1x - y)$ — литровых, тогда с вишнёвым компотом — $1,25y$

трёхлитровых и $0,85(1,1x - y)$ литровых. Всего с вишнёвым компотом $(1,25y + 0,85(1,1x - y))$ банок. Получаем уравнение:

$$1,25y + 0,85(1,1x - y) = x; 1,25y + 0,935x - 0,85y = x; 0,4y = 0,065x; y = 0,1625x; y = (0,1625 : 1,1) \cdot (1,1x).$$

$y \approx 0,15 \cdot (1,1x)$, то есть трёхлитровые банки составляют 15% от всех закупоренных банок с абрикосовым компотом.

Ответ: 15.

499. Пусть книг по физике выпущено x штук, тогда по математике — $1,2x$. Пусть по математике выпущено y книг для девятого класса и $(1,2x - y)$ — для одиннадцатого, тогда по физике — $1,1y$ книг для девятого класса и $0,75(1,2x - y)$ для одиннадцатого. Всего по физике $(1,1y + 0,75(1,2x - y))$ книг.

Получаем уравнение: $1,1y + 0,75(1,2x - y) = x; 1,1y + 0,9x - 0,75y = x; 0,35y = 0,1x; x = 3,5y$.

$\frac{1,1y}{x} \cdot 100\% \approx 31\%$, то есть книги для девятого класса составляют 31% от всех выпущенных по физике.

Ответ: 31.

500. Пусть к 20 кг первого сплава добавили y кг второго сплава. Тогда в получившемся сплаве содержится $0,4 \cdot 20 + 0,2 \cdot y$ кг серебра. Если серебро составляет 30% от общей массы в $20 + y$ кг получившегося сплава, то справедливо соотношение $0,4 \cdot 20 + 0,2 \cdot y = 0,3(20 + y)$, $8 + 0,2y = 6 + 0,3y$, $0,1y = 2 \Rightarrow y = 20$.

Ответ: 20.

501. Пусть x — количество процентов цинка в первом и втором сплавах. Тогда после того как сплавляли 150 кг первого сплава и 150 кг второго сплава, в получившемся сплаве содержится $\frac{x}{100} \cdot 150 + \frac{x}{100} \cdot 250$ кг цинка, что составляет 30% от общей массы (400 кг) получившегося сплава. Значит, $\frac{x}{100} \cdot 150 + \frac{x}{100} \cdot 250 = 0,3 \cdot 400$, $4x = 120 \Rightarrow x = 30$. Поэтому во втором сплаве содержалось $100 - 26 - 30 = 44\%$ олова. Таким образом, 150 кг первого сплава содержали $0,4 \cdot 150 = 60$ кг олова, а 250 кг второго сплава содержали $0,44 \cdot 250 = 110$ кг олова. Значит, получившийся сплав содержит $60 + 110 = 170$ кг олова.

Ответ: 170.

502. Пусть x — количество процентов песка во втором растворе, тогда $2x$ — количество процентов песка в первом растворе. После того как

смешали 300 кг первого раствора и 400 кг второго раствора, получили раствор, в котором содержится $\frac{2x}{100} \cdot 300 + \frac{x}{100} \cdot 400$ кг песка, что составляет 30% от общей массы 700 кг получившегося раствора. Значит, $\frac{2x}{100} \cdot 300 + \frac{x}{100} \cdot 400 = 0,3 \cdot 700$, $10x = 210 \Rightarrow x = 21$. Поэтому в первом растворе содержалось $100 - 10 - 42 = 48\%$ цемента. Таким образом, 300 кг первого раствора содержали $0,48 \cdot 300 = 144$ кг цемента, а 400 кг второго раствора содержали $0,4 \cdot 400 = 160$ кг цемента. Значит, получившийся раствор содержит $144 + 160 = 304$ кг цемента.

Ответ: 304.

503. Пусть в первой канистре x кг раствора, а во второй y кг. Тогда $\frac{0,5(0,05x + 0,1y)}{0,5(x + y)} = 0,07$; $0,05x + 0,1y = 0,07(x + y)$; $0,02x = 0,03y$; $x : y = 3 : 2$.

Ответ: 1,5.

504. Пусть в первой колбе x кг раствора, а во второй — y кг. Тогда 0,01х кг уксуса в первой колбе, а 0,05 кг — во второй. После переливания в третьей колбе окажется $\left(\frac{x + y}{2}\right)$ кг раствора, из которых

$\frac{0,01x + 0,05y}{2}$ кг соли. Значит, процентное содержание соли в третьей

колбе: $\frac{0,01x + 0,05y}{x + y} \cdot 100\%$, что по условию равно 2%.

$$0,01 + 0,05y = 0,02(x + y); 0,01x = 0,03y; \frac{x}{y} = \frac{3}{1}.$$

Следовательно, масса раствора в первой в 3 раза больше, чем во второй.

Ответ: 3.

505. Пусть стоимость старой упаковки равна x , а стоимость сока — y , тогда стоимость пакета сока в этом году — $(x + y)$. По условию стоимость новой упаковки — $1,15x$, а стоимость пакета сока в следующем году — $1,05(x + y)$. Решим уравнение: $1,15x + y = 1,05(x + y)$, $0,1x = 0,05y$, $y = 2x$, $\frac{x}{x + y} = \frac{x}{x + 2x} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \cdot 100\% = 33,3\%$. Округляя до целого числа, получаем, что в этом году стоимость упаковки составляла 33% от стоимости пакета сока.

Ответ: 33.

506. Пусть стоимость струн из нейлона равна x , а стоимость гитары без струн — y , тогда стоимость всей гитары — $(x + y)$. По условию стоимость металлических струн — $1,5x$, а стоимость всей гитары после замены струн — $1,01(x + y)$. Решим уравнение: $1,5x + y = 1,01(x + y)$, $0,49x = 0,01y$, $y = 49x$, $\frac{x}{x + y} = \frac{x}{x + 49x} = 0,02$. Получаем, что стоимость струн из нейлона составляла 2% от стоимости всей гитары.

Ответ: 2.

507. Так как металл содержит 4% примесей, то «чистой руды» в нем содержится 96%. Поэтому в 15 тонн металла содержится $15 \cdot 0,96 = 14,4$ тонн «чистой руды». Так как в руде содержится 40% примесей, то «чистой руды» в ней содержится 60%. Таким образом, для того чтобы выплавить из руды 15 тонн металла, в руде должно содержаться 14,4 тонн «чистой руды», что составляет 60%. Следовательно, 100% будет составлять $14,4 \cdot \frac{100}{60} = 24$ тонны руды.

Ответ: 24.

508. Обозначим через x и y процентное содержание хрома соответственно в первом и втором куске чугуна, через P вес каждого из кусков чугуна.

Тогда в первом куске чугуна содержалось $P \cdot \frac{x}{100}$ кг хрома, а во втором —

$P \cdot \frac{y}{100}$ кг хрома. Так как в полученном сплаве оказалось 12 кг хрома, то

выполняется равенство $P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 12$. Если бы первый кусок чу-

гуна весил $2P$ кг, то в сплаве содержалось бы $2P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100}$ кг хрома,

что, по условию, равняется 16 кг. Учитывая также, что содержание хрома в первом куске чугуна было на 5% меньше чем во втором, получаем систе-

$$\text{му уравнений} \begin{cases} P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 12, \\ 2P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 16, \\ y - x = 5. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе и, воспользовавшись третьим уравнением, подставим в полученное равенство $y = x + 5$. В ре-

зультате таких действий получим: $\frac{x + (x + 5)}{2x + (x + 5)} = \frac{12}{16}$, $\frac{2x + 5}{3x + 5} = \frac{3}{4}$, $4(2x + 5) = 3(3x + 5)$, $x = 5$. Значит, $y = 10$. Значение P найдем из первого уравнения системы: $P \cdot \frac{5}{100} + P \cdot \frac{10}{100} = 12 \Rightarrow P = \frac{12 \cdot 100}{15} = 80$. Итак, полученный из двух одинаковых по весу кусков чугуна сплав весит 160 кг и содержит 12 кг хрома. Следовательно, процентное содержание хрома в таком сплаве равно $\frac{12}{160} \cdot 100 = 7,5\%$.

Ответ: 7,5.

509. Пусть сплавляли два слитка по P кг, в первом из которых содержится $x\%$ золота, а во втором — $y\%$ золота. Тогда в первом слитке содержалось $P \cdot \frac{x}{100}$ кг золота, а во втором — $P \cdot \frac{y}{100}$ кг золота. Так как в полученном сплаве оказалось 3 кг золота, то выполняется равенство $P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 3$. Если бы второй слиток весил $2P$ кг, то в сплаве содержалось бы $P \cdot \frac{100 - x}{100} + 2P \cdot \frac{100 - y}{100}$ кг серебра, что по условию равняется 11 кг. Таким образом, учитывая также, что содержание золота в первом слитке было на 20% больше чем во втором, получаем систему

$$\text{уравнений} \begin{cases} P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 3, \\ P \cdot \frac{100 - x}{100} + 2P \cdot \frac{100 - y}{100} = 11, \\ x - y = 20. \end{cases} \quad \text{Выразим из последнего}$$

уравнения системы x через y : $x = y + 20$, подставим его в первые два уравнения и разделим первое уравнение системы на второе. В результате та-

$$\text{ких действий получим равенство } \frac{\frac{P}{100} \cdot (y + 20 + y)}{\frac{P}{100} \cdot (100 - y - 20 + 2(100 - y))} = \frac{3}{11},$$

$$\frac{2y + 20}{280 - 3y} = \frac{3}{11} \Rightarrow 11(2y + 20) = 3(280 - 3y) \Rightarrow y = 20. \text{ Значит, } x = 40.$$

$$\text{Значение } P \text{ найдем из первого уравнения системы } P \cdot \frac{40}{100} + P \cdot \frac{20}{100} = 3 \Rightarrow$$

$P = \frac{3 \cdot 100}{60} = 5$. Итак, полученный из двух одинаковых по весу, равному 5 кг, слитков сплав весит 10 кг и содержит 3 кг золота. Остальную часть сплава составляет серебро, которого в сплаве содержится $10 - 3 = 7$ кг.

Ответ: 7.

510. Концентрация 1-го раствора:

$$\frac{1056}{1056 + 44} \cdot 100\% = \frac{1056}{1100} \cdot 100\% = \frac{1056}{11}\% = 96\%.$$

Концентрация 2-го раствора:

$$\frac{756}{756 + 1344} \cdot 100\% = \frac{756}{2100} \cdot 100\% = \frac{756}{21}\% = 36\%.$$

Пусть нужно взять x г первого раствора и $(1500 - x)$ г второго раствора.

Тогда содержание кислоты:

в первом растворе — $\frac{96 \cdot x}{100}$ г;

во втором растворе — $\frac{36(1500 - x)}{100}$ г;

в третьем растворе — $\frac{40 \cdot 1500}{100}$ г.

Составим и решим уравнение:

$$\frac{96x}{100} + \frac{36(1500 - x)}{100} = \frac{40 \cdot 1500}{100}, \quad 96x + 36(1500 - x) = 40 \cdot 1500,$$

$$8x + 3(1500 - x) = 5000, \quad 5x = 500, \quad x = 100.$$

Ответ: 100.

511. Содержание золота в третьем сплаве $600 \cdot \frac{85}{100}$ г.

	1 слиток	2 слиток
масса используемого куска	x г	$(600 - x)$ г
масса золота в используемом куске	$x \cdot \frac{92}{100}$ г	$(600 - x) \cdot \frac{80}{100}$ г

Тогда масса золота в полученном слитке: $\frac{x \cdot 92}{100} + (600 - x) \frac{80}{100}$ г.

$$x \cdot \frac{92}{100} + (600 - x) \cdot \frac{80}{100} = 600 \cdot \frac{85}{100}; \quad x = 250.$$

Ответ: 250.

512. Пусть x рублей — закупочная цена коллекции, тогда $0,8 \cdot x \cdot 0,75 =$

= 0,6x рублей — прибыль после продажи этой части составит 0,75 всей коллекции. Осталось продать 0,25 всей коллекции по цене $1,8x \cdot 0,4$, тогда прибыль от продажи этой части составляет $0,25x \cdot (0,72 - 1) = -0,07x$ (фактически убыток). Общая прибыль: $0,6x - 0,07x = 0,53x$, что составляет 53% от закупочной цены.

Ответ: 53.

513. Пусть x — закупочная цена коллекции, тогда $2,4x$ — цена, по которой салон выставил коллекцию на продажу. Примем все элементы коллекции за единицу. После продажи 0,85 всей коллекции выручка салона составила $2,4x \cdot 0,85 = 2,04x$, а прибыль $2,04x - 0,85x = 1,19x$. Осталось продать $1 - 0,85 = 0,15$ коллекции. Пусть $k\%$ составила скидка, тогда $2,4x \cdot (1 - 0,01k) \cdot 0,15$ — выручка салона от продажи 0,15 всей коллекции, а прибыль $2,4x \cdot (1 - 0,01k) \cdot 0,15 - 0,15x = 0,21x - 0,0036xk$. По условию задачи прибыль от продажи всей коллекции составила 1,13x. Составим уравнение $1,19x + 0,21x - 0,0036xk = 1,13x$; $k = 75$.

Ответ: 75.

514. Пусть x — закупочная цена портсигара, а y — статуэтки, тогда $1,4(x + y)$ — общая выручка магазина от двух предметов. Причём 1,35x — выручка магазина, за портсигар, а $1,6y$ — выручка, полученная за статуэтку. Составим уравнение: $1,35 + 1,6y = 1,4(x + y)$, $\frac{x}{y} = 4$.

Следовательно, портсигар обошелся магазину в 4 раза дороже статуэтки.

Ответ: 4.

515. Пусть x — количество шоколада, выпущенного в прошлом году, тогда в новом году шоколада будет $0,25x \cdot 1,1 + 0,4x + 0,35x \cdot 1,2 = 1,095x$, значит выпуск шоколада увеличился на $\frac{1,095x - x}{x} \cdot 100\% = 9,5\%$.

Ответ: 9,5.

516. Пусть x — первоначальное число безработных. Тогда к концу второго года их количество снизилось на $0,6x$. Обозначим через $y\%$ снижение безработицы за первый год, тогда $(x - 0,01xy)$ — осталось безработных к концу первого года. К концу второго года их число снизилось на $(x - 0,01xy) \cdot \frac{2,5y}{100}$ человек. Таким образом, $\frac{xy}{100} + \frac{xy}{40} \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right)$ снижение безработицы за два года, что по условию задачи составляет $0,6x$.

$\frac{y}{100} + \frac{y}{40} - \frac{y^2}{4000} = 0,6, y^2 - 140y + 2400 = 0, y_1 = 120, y_2 = 20$. Условию задачи удовлетворяет только $y = 20$.

Ответ: 20.

517. Пусть 1 — первоначальный размер пенсии, $x\%$ — первое повышение, $1,5x\%$ — второе повышение. Из условия следует:

$1 + 0,01x + (1 + 0,01x) \cdot 0,015x = 1,56; 3x^2 + 500x - 11200 = 0; x_1 = 20, x_2 < 0$ — не удовлетворяет условию.

Ответ: 20.

518. Пусть x л — искомое количество воды, тогда $(20 - x)$ л кислоты осталось после первого переливания. Её концентрация в растворе была равна $\frac{20 - x}{20}$. После второго переливания в сосуде оказалось

$\left(20 - x - \frac{x(20 - x)}{20}\right)$ л кислоты, и её концентрация стала равной:

$$\frac{20 - x - \frac{x(20 - x)}{20}}{20} = \frac{(20 - x)^2}{400}, \text{ что по условию равно } 0,36.$$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{(20 - x)^2}{400} = 0,36 \Rightarrow x_1 = 8, x_2 = 32, \text{ но } x < 20 \Rightarrow x = 8.$$

Ответ: 8.

519. Пусть x — искомое количество воды, тогда $(10 - x)$ л масла осталось после первого переливания. Его концентрация была $\frac{10 - x}{10}$. После вто-

рого переливания в сосуде оказалось $\left(10 - x - \frac{x(10 - x)}{10}\right) = \frac{(10 - x^2)}{100}$, что по условию равно 0,81.

Составим и решим уравнение:

$$\frac{(10 - x)^2}{100} = 0,81 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 19, \text{ по } x < 10 \Rightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

520. $\frac{12}{100} \cdot 45 = 5,4$ г. — меди в 12 кг сплава.

$\frac{5,4}{40} \cdot 100 = 13,5$ (г) — вес нового сплава.

$13,5 - 12 = 1,5$ г. — олова надо добавить.

Ответ: 1,5.

521. Пусть x — стоимость пакета акций первого июля, а y — 30 сентября, тогда $\frac{x+y}{2} = 1,25x$; $y = 1,5x$; $\frac{1,5x - 1,25x}{1,25x} = 0,2 \cdot 100\% = 20\%$.

Ответ: 20.

522. Пусть x — цена товара без наценки, тогда выручка магазина: $0,6 \cdot 1,45x + 0,4 \cdot 1,45x \cdot 0,6 = 1,218x$. Значит, прибыль магазина $1,218x - x = 0,218x$.

Ответ: 21,8.

523. Обозначим за x количество капустницы, а за y — колорадского жука. После обработки насекомых стало $0,8x$ и $0,6y$. Всего $0,75(x + y)$. Решая уравнение $0,75(x + y) = 0,8x + 0,6y$, получим $y = \frac{1}{3}x$. По свойству про-

порции $100x : \frac{4}{3}x = 75\%$.

Ответ: 75.

524. Пусть x — средний ежегодный процент роста населения. Из условия задачи получаем квадратное уравнение:

$20000 + 200x + 0,01x(20000 + 200x) = 22050$; $x^2 + 200x - 1025 = 0$. Его корни: $x_1 = 5$, $x_2 = -205$. По смыслу задачи x — положительное число, то есть $x = 5$.

Ответ: 5.

525. $12,5 \cdot 0,4 = 5$ (кг) — масса меди в сплаве.

$12,5 - 5 = 7,5$ (кг) — масса цинка в сплаве.

$7,5 - 5 = 2,5$ (кг) — надо добавить меди, чтобы меди и цинка в сплаве было поровну.

Ответ: 2,5.

526. В полученном растворе $600 \cdot 0,18 = 108$ (г) соляной кислоты, значит изначально в растворе было $108 - 100 = 8$ (г) кислоты.

Ответ: 8.

527. За 2 минуты, то есть за 120 секунд, скачается $0,25 \text{ Мб/с} \cdot 120 \text{ с} = 30 \text{ Мб}$. Число 30 составляет $\frac{30}{75} \cdot 100\% = 40\%$ от числа 75.

Ответ: 40.

528. Скорость скачивания равна $\frac{1,5}{27} \text{ Мб/с} = \frac{1}{18} \text{ Мб/с}$. После увеличе-

ния на 20% скорость станет равна $\frac{1}{18} \cdot 1,2 \text{ Мб/с} = \frac{1}{15} \text{ Мб/с}$.

Файл величиной 80 Мб скачается за $80 : \frac{1}{15} = 1200 \text{ с}$, то есть за 20 минут.

Ответ: 20.

529. В первый раз тётя Маша купила черешню по цене $\frac{90}{0,9} = 100$ рублей за килограмм, то есть потратила всего $100 + 30 = 190$ рублей.

Ответ: 190.

530. Пусть объём первого раствора равен x л, тогда второго — $(19 - x)$ л.

Процентное содержание щёлочи в первом растворе равно $\frac{5}{x} \cdot 100\%$, а во втором — $\frac{2}{19 - x} \cdot 100\%$.

Из условия следует, что $\frac{5}{x} \cdot 100\% \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{19 - x} \cdot 100\%$, $\frac{15}{x} = \frac{4}{19 - x}$, $15(19 - x) = 4x$, $15 \cdot 19 = 19x$, $x = 15$.

Ответ: 15.

531. Флэш карта объёмом 32 Гб стоила $1200 \cdot 1,6 = 1920$ рублей, тогда всего Эльдар потратил $1200 + 1920 = 3120$ рублей.

Ответ: 3120.

532. Пусть масса второго сплава равна x кг, тогда масса первого — $(44 - x)$ кг. Процентное содержание олова во втором сплаве равно $\frac{7}{x} \cdot 100\%$,

а в первом — $\frac{5}{44 - x} \cdot 100\%$. Из условия следует, что

$\frac{7}{x} \cdot 100\% = 3 \cdot \frac{5}{44 - x} \cdot 100\%$, $\frac{7}{x} = \frac{15}{44 - x}$, $7(44 - x) = 15x$, $7 \cdot 44 = 22x$, $x = 14$.

Ответ: 14.

533. Расфасовано в пакеты $30 - 0,4 \cdot 30 = 18(\text{ц}) = 1800(\text{кг})$. Для этого понадобится $1800 : 2 = 900$ (пакетов), то есть $900 : 40 = 22,5$ (ящика). Таким образом, чтобы расфасовать муку, потребуется 23 ящика.

Ответ: 23.

534. После подорожания на 15% комплект учебников будет стоить $420 \cdot 1,15 = 483$ (руб.). Выясним, какое максимальное число комплектов можно купить на 5000 рублей после подорожания: $5000 : 483 \approx 10,35$.

Значит, на 5000 рублей можно купить не более 10 комплектов учебников.

Ответ: 10.

535. До уценки один мяч стоил $900 : 20 = 45$ (руб.). После уценки один мяч стал стоить $45 \cdot 0,9 = 40,5$ (руб.).

Выясним, какое максимальное количество мячей можно приобрести на 900 рублей после уценки. $900 : 40,5 \approx 22,2$. Значит, на 900 рублей можно купить не более 22-х мячей.

Ответ: 22.

536. $87 : (20 \cdot 0,9) = 4,8$. Для перевозки школьников потребуется 5 такси.

Ответ: 5.

537. За 2 часа операционист обслужит $\frac{2 \cdot 60}{10} = 12$ клиентов, что состав-

ляет $\frac{12}{30} \cdot 100\% = 40\%$ от общего числа клиентов.

Ответ: 40.

538. Так как шоколадки и с орехами, и с изюмом учитываются при подсчёте шоколадок каждого из двух указанных видов, то в сумме $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ они

учитываются дважды. То есть всего $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) - 1 = \frac{1}{2}$ шоколадок содержат и орехи, и изюм. $\frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$.

Ответ: 50.

539. Так как студенты, владеющие обоими языками, учитываются при подсчёте студентов, владеющих каждым из языков, то в сумме $\frac{3}{5} + \frac{7}{10}$

они учитываются дважды. То есть всего $\left(\frac{3}{5} + \frac{7}{10}\right) - 1 = 0,3$ студентов владеют обоими языками.

$0,3 \cdot 100\% = 30\%$.

Ответ: 30.

540. $20 \cdot 1,25 = 25$ (руб.) — новая цена открытки. $200 : 25 = 8$, значит, можно будет купить 8 открыток.

Ответ: 8.

541. $10 \cdot 0,9 = 9$ (руб.) — новая цена метра сетевого кабеля. $300 : 9 = 33\frac{1}{3}$, значит, можно будет купить 33 м.

Ответ: 33.

542. После увеличения производительности тракторист будет вспахивать $8 \cdot 1,25 = 10$ га пашни за день, тогда, чтобы вспахать поле площадью 120 га ему понадобится $\frac{120}{10} = 12$ дней.

Ответ: 12.

543. После снижения цены пирожок будет стоить $12 \cdot 0,75 = 9$ рублей.
 $50 : 9 = 5\frac{5}{9}$, значит, максимум можно будет купить 5 пирожков.

Ответ: 5.

544. Цена повысилась на 10%, то есть стала $30 + \frac{30 \cdot 10}{100} = 33$ (руб);
 $360 : 33 = 10\frac{10}{11}$. Значит, можно купить 10 наборов.

Ответ: 10.

545. Цена снижена на 20%, то есть на $\frac{100 \cdot 20}{100} = 20$ (руб.). Цена стала 80 (руб.); $500 : 80 = 6\frac{1}{4}$. Купить можно шесть калькуляторов.

Ответ: 6.

546. Цена одного цветочного горшка с наценкой равна $1,2 \cdot 120 = 144$ рубля. Так как $1400 : 144 = 9\frac{13}{18}$, то наибольшее число горшков равно 9.

Ответ: 9.

547. После понижения цены одна тетрадь будет стоить $0,9 \cdot 50 = 45$ рублей.
Так как $570 : 45 = 12\frac{2}{3}$, то наибольшее число тетрадей равно 12.

Ответ: 12.

548. Новая цена составляет $\frac{5852}{6650} \cdot 100\% = 88\%$ от старой, значит, цена была снижена на 12%.

Ответ: 12.

549. Цитрусовых фруктов в магазине $1000 \cdot (1 - 0,76) = 240$, из них $240 \cdot (1 - 0,65) = 84$ апельсинов.

Ответ: 84.

550. Вместе с процентами клиент должен отдать банку $1,14 \cdot 100\,000 = 114\,000$ рублей. Значит, ежемесячно он должен выплачивать $114\,000 : 12 = 9\,500$ рублей.

Ответ: 9 500.

$$551. 100\% - 13\% = 87\%; \frac{13\,485 \cdot 100}{87} = 15\,500.$$

Ответ: 15 500.

552. Стаканчик жареных семечек стоит $5 \cdot 1,6 = 8$ рублей. Тогда на 100 рублей можно купить $100 : 8 = \frac{100}{8} = 12\frac{4}{8}$, то есть 12 стаканов.

Ответ: 12.

553. Стоимость пирожного у поставщика $21 : 1,4 = 15$ рублей. Так как $70 : 15 = 4\frac{2}{3}$, то у поставщика можно купить 4 пирожных.

Ответ: 4.

554. Стоимость литра кефира до повышения цены равна $32,2 : 1,15 = 28$ (руб.).

Ответ: 28.

555. Зарплата программиста после вычета 13%-го налога на доходы составит $(1 - 0,13) \cdot 35\,000 = 30\,450$ (руб.).

Ответ: 30 450.

556. После повышения цены товар будет стоить $180 \cdot 1,15 = 207$ рублей.

$1000 : 207 = 4\frac{172}{207}$, значит, можно будет купить 4 единицы товара.

Ответ: 4.

557. Пусть $x\%$ начислял банк ежегодно, тогда сумма вклада увеличивалась каждый год в $\frac{100+x}{100}$ раз. За два года она увеличилась в $\left(\frac{100+x}{100}\right)^2$

раз, следовательно, $2000\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 = 4380,8$; $\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 = 2,1904$;

$$\frac{100+x}{100} = 1,48, \quad 100+x = 148, \quad x = 48.$$

Ответ: 48.

558. После повышения цены билет будет стоить $500 \cdot 1,15 = 575$ рублей.

$5000 : 575 = 8\frac{400}{575}$, значит, можно будет купить 8 билетов.

Ответ: 8.

559. Пусть $x\%$ начислял банк ежегодно, тогда сумма вклада увеличивалась каждый год в $\frac{100+x}{100}$ раз. За два года она увеличилась в $\left(\frac{100+x}{100}\right)^2$

раз, следовательно, $1500\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 = 1949,4$; $\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 = 1,2996$;

$$\frac{100+x}{100} = 1,14, \quad 100+x = 114, \quad x = 14.$$

Ответ: 14.

560. Пусть x кг инжира перешло в y кг сушёного инжира, тогда в x кг содержится $0,7x$ кг влаги, в y кг сушёного инжира содержится $0,034y$ влаги. Составляем уравнение: $(1-0,7)x = (1-0,034)y$; по условию $y = 10$, тогда $0,3x = 0,966 \cdot 10$, $x = \frac{0,966 \cdot 10}{0,3} = \frac{9,66}{0,3} = 32,2$ кг.

Ответ: 32,2.

561. Цена была снижена на $600 - 330 = 270$ рублей, что в процентах составляет $\frac{270}{600} \cdot 100 = 45\%$.

Ответ: 45.

562. Конечная цена холодильника составляет 112% , то есть $\frac{112}{100}$ от первоначальной. Поэтому начальная цена была $14\,000 \cdot \frac{100}{112} = 12\,500$ рублей.

Ответ: 12 500.

563. Первая фирма — 30 млн рублей, Вторая фирма (по условию) — 22,5 млн руб, Третья фирма 45 млн рублей. Итого: 97,5 млн рублей.

Оставшаяся часть составляет 35% уставного капитала, таким образом, сумма от общей прибыли причитающейся для четвёртой фирмы составляет $100(\text{млн}) \cdot 0,35 = 35(\text{млн})$.

Ответ: 35.

564. После удержания налога у студента останется $100\% - 13\% = 87\%$ гонорара, то есть $1200 \cdot \frac{87}{100} = 1044$ рубля. Так как $\frac{1044}{50} = 20,88$, то искомое наибольшее нечётное число тюльпанов равно 19.

Ответ: 19.

565. В 24 кг сплава меди содержится $\frac{24 \cdot 45}{100} = 10,8$ (кг).

Пусть x кг чистого олова надо прибавить к куску сплава. Составим и решим уравнение:

$$\frac{10,8}{24+x} = \frac{40}{100}; \quad 24+x = 27, \quad x = 3.$$

Ответ: 3.

566. Футболом интересуются $100\% - 70\% = 30\%$ жителей, то есть

$50\,000 \cdot \frac{30}{100} = 15\,000$ человек. Из них финал смотрели 60%, то есть

$15\,000 \cdot \frac{60}{100} = 9\,000$ человек.

Ответ: 9000.

567. Так как на счёт будет зачислено $100\% - 6\% = 94\%$ от внесённой суммы, то внести нужно не менее $500 \cdot \frac{100}{94} = 531\frac{86}{94}$ рублей. Так как внесённая сумма должна быть целой и кратной числу 10, то внести нужно минимум 540 рублей.

Ответ: 540.

568. Капитал «Омега-транс» каждый следующий год составлял $100\% + 100\% = 200\%$ от капитала предыдущего года, то есть в 2 раза больше. Капитал «Елена-плюс» каждый следующий год составлял $100\% + 300\% = 400\%$ от капитала предыдущего года, то есть в 4 раза больше. Через 5 лет капитал «Омега-транс» равнялся $10\,000 \cdot 2^5 = 320\,000$ (долл.), а капитал «Елена-плюс» через 4 года — $5\,000 \cdot 4^4 = 1\,280\,000$ (долл.).

$1\,280\,000 - 320\,000 = 960\,000$ (долл.).

Ответ: 960 000.

569. Стоимость одной поездки равна $400 \cdot \frac{2,5}{100} = 10$ рублей. Без проездного Аня потратила бы $10 \cdot 55 = 550$ рублей. Экономия составила $550 - 400 = 150$ рублей.

Ответ: 150.

570. За год клиент должен выплатить $100\% + 15\% = 115\%$ от взятой суммы, то есть $18\,000 \cdot \frac{115}{100} = 20\,700$ рублей. Каждый месяц необходимо вносить $\frac{20\,700}{12} = 1\,725$ рублей.

Ответ: 1725.

571. Цена билета для школьника равна $1580 \cdot \frac{50}{100} = 790$ рублей. Общая стоимость билетов составляет $790 \cdot 17 + 1580 \cdot 3 = 18\,170$ рублей.

Ответ: 18 170.

572. Взрослых жителей в городе $100\% - 20\% = 80\%$, то есть

$300\,000 \cdot \frac{80}{100} = 240\,000$ человек. Из них работают $100\% - 40\% = 60\%$, то

есть $240\,000 \cdot \frac{60}{100} = 144\,000$ человек.

Ответ: 144 000.

573. Пусть 15%-го раствора взяли x г, тогда 25%-го раствора — $(750 - x)$ г. Кислоты в 15%-ом растворе было $0,15x$ г, а в 25%-ом — $0,25(750 - x)$ г. В результате смешивания стало $750 \cdot 0,2 = 150$ г кислоты.

Составим и решим уравнение:

$$0,15x + 0,25(750 - x) = 150; 0,1x = 37,5; x = 375 \text{ г.}$$

Ответ: 375.

574. Присутствовали на занятиях $100\% - 5\% = 95\%$, то есть

$1200 \cdot \frac{95}{100} = 1140$ учеников. Из них обедали в столовой $1140 \cdot \frac{40}{100} = 456$ человек.

Ответ: 456.

575. Пусть средний платёж за кредит составляет 10 000 руб. Тогда после первого повышения платёж стал 11 200 руб. После второго повышения —

стал $11\,200 + \frac{11\,200 \cdot 12}{100} = 12\,544$ (руб.). Итак, в среднем за год платёж

повысился на $\frac{(12\,544 - 10\,000) \cdot 100}{10\,000} = \frac{2544 \cdot 100}{10\,000} = 25,44$ (%).

Ответ: 25,44.

576. Розничная цена составляет $100\% + 30\% = 130\%$ от оптовой, поэтому оптовая цена равна $156 \cdot \frac{100}{130} = 120$ рублей. Так как $\frac{5000}{120} = 41 \frac{80}{120}$, то купить по оптовой цене можно максимум 41 учебник.

Ответ: 41.

577. Со скидкой одна книга стоит $180 \cdot \frac{100 - 25}{100} = 135$ рублей.

$\frac{1050}{135} = 7 \frac{105}{135}$, поэтому за эти деньги можно купить 7 книг.

Ответ: 7.

578. После повышения цены одна поездка будет стоить

$20 \cdot \frac{100 + 30}{100} = 26$ рублей. $\frac{1600}{26} = 61 \frac{14}{26}$.

Таким образом, на эти деньги можно совершить 61 поездку.

Ответ: 61.

579. В школе $8 \cdot \frac{100}{5} = 160$ выпускников.

Ответ: 160.

580. В 6 л 15%-ного раствора содержится 0,9 л некоторого вещества, тогда $\frac{0,9}{6+4} \cdot 100\% = \frac{0,9 \cdot 100\%}{10} = 9\%$.

Ответ: 9.

581. Пусть x — количество процентов, на которые торговая компания ежемесячно уменьшает цену телевизора, тогда $a_1 = 40\,000$, $a_2 =$
 $= 40\,000 \left(1 - \frac{x}{100}\right)$, $a_3 = 40\,000 \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2$. Составляем уравнение:

$$40\,000 \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 35\,344; 1 - \frac{x}{100} = \sqrt{\frac{35\,344}{40\,000}} = \frac{188}{200}; x = 6.$$

Ответ: 6.

582. В городе $100\% - 10\% = 90\%$ взрослых, то есть $200\,000 \cdot \frac{90}{100} = 180\,000$

человек. Из них работают $100\% - 50\% = 50\%$, то есть $180\,000 \cdot \frac{50}{100} = 90\,000$.

Ответ: 90 000.

583. До повышения поездка стоила $16 \cdot \frac{100}{100+28} = 12,5$ рублей.

Ответ: 12,5.

584. Новая цена составляет $\frac{1632}{2400} \cdot 100 = 68$ процентов от первоначальной.

Цена была снижена на $100 - 68 = 32$ процента.

Ответ: 32.

585. С наценкой один флакон стоит $120 \cdot \frac{100+35}{100} = 162$ рубля. $\frac{900}{162} = 5 \frac{90}{162}$. Таким образом, наибольшее число флаконов, которые можно купить на 900 рублей, равно 5.

Ответ: 5.

586. Так как на счёт попадает $100\% - 7\% = 93\%$ от внесённой суммы, то необходимо внести не менее $220 \cdot \frac{100}{93} = 236 \frac{52}{93}$ рублей. Так как терминатор принимает только суммы, кратные 10 рублям, в приёмное устройство

терминала нужно положить 240 рублей.

Ответ: 240.

587. Уставной капитал 240 000 рублей. Анна внесла 15% от уставного капитала, то есть $240\,000 \cdot 0,15 = 36\,000$ рублей. Мария — 43 200 рублей, Людмила внесла 0,25, то есть $240\,000 \cdot 0,25 = 60\,000$ рублей, Александра — $240\,000 - (36\,000 + 43\,200 + 60\,000) = 100\,800$ рублей, что составляет $100\,800 : 240\,000 = 0,42$, то есть 42% от уставного капитала. $820\,000 \cdot 0,42 = 344\,400$ рублей — прибыль, причитающаяся Александре.

Ответ: 344 400.

588. Введём в рассмотрение арифметическую прогрессию, 1-ый член которой $a_1 = 720$, $d = -40$, n — число дней путешествия, а i — число километров, пройденного в i -й день. Длина пройденного пути — $S_n = 5040$ км. Сумма n первых членов введенной прогрессии: $\frac{2 \cdot 720 - 40(n-1)}{2} \cdot n = 5040$. Решение уравнения:

$$(720 - 20(n-1)) \cdot n = 5040;$$

$$720n - 20n^2 + 20n - 5040 = 0; n^2 - 37n + 252 = 0;$$

$$D = 37^2 - 4 \cdot 252 = 361; n_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{361}}{2}; n_{1,2} = \frac{37 \pm 19}{2}; n_1 = 9;$$

$n_2 = 28$ (противоречит смыслу задачи).

9 дней путешествовал автотурист.

Ответ: 9.

589. Рассмотрим движение мотоциклиста на участке от шлагбаума до места назначения: длина его $90 - 54 = 36$ (км); если плановая скорость x км/ч, то время движения $\frac{36}{x}$ ч. Из-за остановки в течение

5 мин. = $\frac{1}{12}$ ч, мотоциклист поехал со скоростью $(x+6)$ км/ч и 36 км про-

ехал за $\frac{36}{x+6}$ ч. По условию задачи он прибыл в намеченное время, значит:

$$\frac{36}{x+6} + \frac{1}{12} = \frac{36}{x}. \text{ Решение уравнения: } 36 \cdot 12x + x(x+6) = 36 \cdot 12(x+6);$$

$$x^2 + 6x = 36 \cdot 12 \cdot 6; x^2 + 6x - 2592 = 0; x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 2592}; x_1 = -54; x_2 = 48.$$

Оба числа входят удовлетворяют условию $x(x+6) \neq 0$, но $x = -54$ не удовлетворяет смыслу задачи.

48 км/ч — первоначальная скорость мотоцикла.

Ответ: 48.

590. Пусть t — искомое время до момента встречи, C — точка встречи автомобилей, а v_1, v_2 — скорость 1-ого и 2-ого автомобилей соответственно. Тогда 1-ый автомобиль преодолел расстояние от A до C (обозначим его AC) за t часов, а расстояние от C до B (обозначим его BC) за $15 - t$ часов, то есть $v_1 \cdot t = AC$, $v_1 \cdot (15 - t) = BC$. Аналогично для 2-ого автомобиля имеем: $v_2 \cdot t = BC$, $v_2 \cdot 4 = AC$. Следовательно, v_1, v_2, t удовлетворяют системе:
$$\begin{cases} v_1 \cdot t = v_2 \cdot 4, \\ v_2 \cdot t = v_1 \cdot (15 - t). \end{cases}$$

Перемножая левые и правые части этих уравнений и сокращая на $v_1 \cdot v_2$, получаем, $t^2 = (15 - t) \cdot 4$, $t^2 + 4t - 60 = 0$, $t_1 = -10$, $t_2 = 6$. Отрицательное значение t противоречит смыслу задачи, поэтому $t = 6$ часов.

Ответ: 6.

591. Пусть t — искомое время, прошедшее от начала движения до момента встречи пешехода и велосипедиста, измеряемое в часах, C — точка их встречи, v_1 — скорость велосипедиста, v_2 — скорость пешехода. По условию, велосипедист прибыл в пункт B через 45 минут, что составляет $\frac{3}{4}$ часа, следовательно, на дорогу от C до B он затратил $\frac{3}{4} - t$ часа. Име-

ем: $AC = v_1 \cdot t$, $BC = v_1 \cdot \left(\frac{3}{4} - t\right)$. С другой стороны, записав условие задачи для пешехода, получим: $BC = v_2 \cdot t$, $AC = v_2 \cdot 1$. Значит, v_1, v_2, t удовлетворяют системе:
$$\begin{cases} v_1 \cdot \left(\frac{3}{4} - t\right) = v_2 \cdot t, \\ v_2 = v_1 \cdot t. \end{cases}$$

Перемножая левые и правые части этих уравнений и сокращая на $v_1 \cdot v_2$, получим: $\frac{3}{4} - t = t^2$, $4t^2 + 4t - 3 = 0$, $t_1 = -\frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Отрицательное значение t не удовлетворяет смыслу задачи, поэтому $t = \frac{1}{2}$ часа, что составляет 30 минут.

Ответ: 30.

592. Пусть t — время (в сек), прошедшее от момента поворота 1-ого спортсмена до момента встречи со 2-ым спортсменом. Тогда $2(t + 25)$ сек — искомое время, затраченное 1-ым спортсменом. Обозначим через v_1, v_2 скорости 1-ого и 2-ого спортсменов, через A точку старта спортсменов, а через B и C — второй конец бассейна и точку их встречи соответственно.

Тогда из условий задачи имеем: $v_1 \cdot t = BC$, $v_1 \cdot 25 = AC$; $v_2 \cdot t = AC$, $v_2 \cdot (36 - t) = BC$. Следовательно, v_1, v_2, t удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} v_1 \cdot t = v_2 \cdot (36 - t), \\ v_2 \cdot t = v_1 \cdot 25. \end{cases}$$

Перемножив эти уравнения и сократив на $v_1 \cdot v_2$, получим: $t^2 = (36 - t) \cdot 25$, $t^2 + 25t - 900 = 0$, $t_1 = -45$, $t_2 = 20$. Отрицательное значение t не удовлетворяет смыслу задачи. Поэтому $t = 20$, а общее время, затраченное 1-ым спортсменом составляет $2 \cdot (25 + 20) = 90$ сек, в минутах — 1,5 минуты.

Ответ: 1,5.

593. Пусть v км/ч — собственная скорость катера. Тогда против течения он плыл со скоростью $(v - 5)$ км/ч, а по течению — со скоростью $(v + 5)$ км/ч. На путь против течения катер затратил $\frac{10}{v - 5}$ ч, а на путь

по течению — $\frac{45}{v + 5}$ ч. Составим уравнение: $\frac{10}{v - 5} + \frac{45}{v + 5} = 2$. Решим

его: $\frac{10}{v - 5} + \frac{45}{v + 5} = 2 \Leftrightarrow$

$$10(v + 5) + 45(v - 5) = 2(v^2 - 25) \Leftrightarrow 2v^2 - 55v + 125 = 0, v_1 = \frac{5}{2}, v_2 = 25.$$

v_1 не удовлетворяет условию задачи, так как с такой скоростью катер не может двигаться против течения реки. Значит, $v = 25$ км/ч.

Ответ: 25.

594. Ученик бежал $20 \cdot \frac{2}{60} = \frac{2}{3}$ км. Пусть x — расстояние, которое он должен был пробежать со скоростью 20 км/ч, а не пройти, чтобы успеть. Так как проходя это расстояние со скоростью 5 км/ч, он опоздал на минуту, то $\frac{x}{5} - \frac{x}{20} = \frac{1}{60}$, откуда $x = \frac{1}{9}$. Все расстояние, которое ему следовало

пробежать, составляет $\frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$ км/ч. Разделив $\frac{7}{9}$ км/ч на скорость

20 км/ч, получим $\frac{7}{180}$ часа или 140 секунд.

Ответ: 140.

595. Чтобы прийти на 5 минут раньше, студенту нужно компенсировать это время, значит он должен пройти со скоростью 6 км/ч расстояние, которое он прошел бы со скоростью 2 км/ч за 5 минут без потери времени. Так как $\frac{6 \text{ км/ч}}{2 \text{ км/ч}} = 3$, то 5 минут — это $\frac{2}{3}$ времени, затраченного на

компенсацию, следовательно полное время компенсации равно 7,5 минут.
 $7,5 + 5 = 12,5$.

Ответ: 12,5.

596. Пусть x — скорость пешехода, а y — расстояние между автобусами, тогда пусть в какой-то момент автобус поравнялся с пешеходом. В этот момент расстояние от следующего автобуса до пешехода равно y . А скорость, с которой следующий автобус догоняет пешехода, равна

$10x - x = 9x$. Таким образом, $\frac{y}{9x} = 10$ минут. А мимо неподвижной точки

автобусы проезжают с интервалом $\frac{y}{10x} = \frac{9}{10} \cdot \frac{y}{9x} = 9$ минут.

Ответ: 9.

597. $40 \text{ мин} = \frac{40}{60} \text{ ч} = \frac{2}{3} \text{ ч}$.

Пусть x км/ч — собственная скорость лодки, $x > 2$.

	v (км/ч)	t (ч)	s (км)
по течению	$x + 2$	$\frac{16}{x + 2}$	16
против течения	$x - 2$	$\frac{16}{x - 2}$	16

По условию лодка затратила на обратный путь на $\frac{2}{3}$ часа больше. Составим и решим уравнение:

$\frac{16}{x - 2} - \frac{16}{x + 2} = \frac{2}{3}$; $24(x + 2) - 24(x - 2) = x^2 - 4$; $x^2 - 4 = 96$,
 $x^2 = 100$; $x_1 = 10$, $x_2 = -10$ — не удовлетворяет условию $x > 2$.

$v_c = 10$ км/ч — скорость лодки в стоячей воде, $v_p = 2$ км/ч — скорость течения реки.

$$\frac{v_c}{v_p} = \frac{10 \text{ км/ч}}{2 \text{ км/ч}} = 5$$

В 5 раз скорость лодки в стоячей воде больше скорости течения реки.

Ответ: 5.

598. Пусть x км/ч — собственная скорость теплохода, тогда его скорость по течению равна $(x + 4)$ км/ч, а против течения — $(x - 4)$ км/ч. К моменту встречи теплохода с плотом плот прошёл 30 км за $\frac{30}{4} = 7,5$ часов. Время,

которое до этого момента находился в пути теплоход, описывается формулой $\frac{42}{x+4} + 1 + \frac{12}{x-4}$. Получаем уравнение: $\frac{42}{x+4} + 1 + \frac{12}{x-4} = 7,5$;

$$42(x-4) + 12(x+4) = 6,5(x^2 - 16); 13x^2 - 108x + 32 = 0; x_1 = \frac{4}{13}, x_2 = 8.$$

По смыслу задачи скорость теплохода больше скорости течения, тогда скорость теплохода равна 8, то есть в 2 раза больше скорости течения.

Ответ: 2.

599. Пусть x км/ч — собственная скорость теплохода, y км/ч — скорость течения реки, S км — расстояние от пристани A до пристани B .

По условию $S = 3(x+y)$, $S = 4(x-y)$, требуется найти $\frac{S}{y}$.

$$3(x+y) = 4(x-y), x = 7y, S = 3(x+y) = 24y, \text{ тогда } \frac{S}{y} = 24.$$

Ответ: 24.

600. Из условия задачи следует, что Маша собирает малину со скоростью $\frac{1}{3}$ ведра в час, а Саша — $\frac{1}{5}$ ведра в час. Вместе за час они собирают

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \text{ ведра, значит, два ведра они соберут за}$$

$$2 : \frac{8}{15} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ часа.}$$

Ответ: 3,75.

601. Пусть x км/ч — первоначальная скорость автобуса, y км/ч — скорость маршрутного такси. Тогда автобус 180 км прошёл за $\frac{180}{x}$ ч, а так-

си — за $\frac{180}{y}$ ч. Из условия следует, что автобус был в пути на 27 мин

$$\text{дольше. Значит, } \frac{180}{x} - \frac{180}{y} = \frac{27}{60} = \frac{9}{20}.$$

После изменения скорости автобус прошёл 180 км — за $\frac{180}{x+10}$ ч, а

маршрутное такси — за $\frac{180}{y-10}$ ч. Из условия следует $\frac{180}{x+10} = \frac{180}{y-10}$.

Получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{180}{x} - \frac{180}{y} = \frac{9}{20}, \\ \frac{1}{x+10} = \frac{1}{y-10}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y = x + 20, \\ \frac{20}{x} - \frac{20}{x+20} = \frac{1}{20}. \end{array} \right.$$

Отсюда: $x + 20 - x = \frac{x^2 + 20x}{400}$; $x^2 + 20x - 8000 = 0$; $x_1 = -100$; $x_2 = 80$.

По смыслу задачи $x > 0$, значит искомое значение скорости автобуса равно 80 км/ч.

Ответ: 80.

602. Пусть V_1 км/ч — скорость первого велосипедиста, V_2 км/ч — скорость второго велосипедиста, S км — протяжённость дистанции (см. рис. 31). Очевидно, что длина дистанции для обоих велосипедистов одинакова. Тогда первый велосипедист прошёл всю дистанцию за время $\frac{S}{V_1}$ ч, а второй за $\frac{S}{V_2}$ ч.

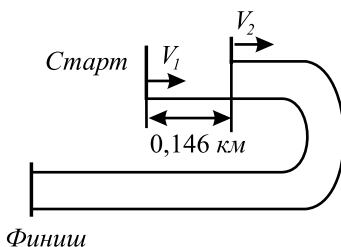


Рис. 31.

По условию первый велосипедист финишировал на 30 минут раньше, значит $\frac{S}{V_2} - \frac{S}{V_1} = \frac{30}{60}$. Кроме того, первый велосипедист расстояние, равное $\frac{S}{120}$ км, прошёл за 1 минуту. Значит, $V_1 \frac{1}{60} = \frac{S}{120}$; $S = 2V_1$. Второй велосипедист за 1 минуту, согласно условию, прошёл расстояние

$$\left(\frac{S}{120} - 0,146 \right) \text{ км. Значит, } \frac{\frac{S}{120} - 0,146}{V_2} = \frac{\frac{S}{120}}{V_1};$$

$\frac{S - 120 \cdot 0,146}{V_2} = \frac{S}{V_1}$. Учитывая, что $S = 2V_1$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2V_1}{V_2} - \frac{2V_1}{V_1} = \frac{1}{2}, \\ \frac{2V_1 - 120 \cdot 0,146}{V_2} = \frac{2V_1}{V_1}; \end{cases} \begin{cases} V_2 = \frac{2V_1}{2,5}, \\ V_2 = \frac{2V_1 - 120 \cdot 0,146}{2}; \end{cases}$$

$$\frac{2V_1}{2,5} = V_1 - 8,76.$$

$$0,5V_1 = 21,9; V_1 = 43,8 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 43,8.

603. Пусть s км — расстояние между пунктами A и B , v км/ч — искомая скорость. Тогда на весь путь первый автомобиль затратил $\frac{s}{v}$ часов, а второй — $\left(\frac{0,5s}{30} + \frac{0,5s}{v+20}\right)$ часов. Так как в пункт B автомобили прибыли одновременно, то условию задачи соответствует уравнение $\frac{s}{v} = \frac{0,5s}{30} + \frac{0,5s}{v+20}$, где $v > 0$. $\frac{2}{v} = \frac{1}{30} + \frac{1}{v+20}$; $60(v+20) = v(v+20) + 30v$; $v^2 - 10v - 1200 = 0$; $v_{1,2} = 5 \pm 35$. Так как $v > 0$, то $v = 5 + 35 = 40$ км/ч.

Ответ: 40.

604. Пусть x км/ч — скорость течения реки, тогда $(12+x)$ км/ч — скорость катера по течению реки, а $(12-x)$ км/ч — скорость катера против течения. Предположим, что река течёт в направлении от B к A . Тогда время, затраченное катером на путь из пункта A в пункт B , равно $\frac{20}{12-x}$.

Время, затраченное катером на путь от B к A , с учетом времени на остановку в пункте B , равно $\frac{1}{4} + \frac{20}{12+x}$. Общее время составляет 4 часа. Составим уравнение:

$$\frac{20}{12-x} + \frac{1}{4} + \frac{20}{12+x} = 4 \text{ (заметим, что вид этого уравнения не зависит от направления течения реки),}$$

$$4 \cdot 20 \cdot (12-x) + (12+x)(12-x) + 4 \cdot 20 \cdot (12+x) = 4 \cdot 4(12^2 - x^2),$$

$$960 - 80x + 12^2 - x^2 + 960 + 80x = 16(12^2 - x^2),$$

$$960 + 960 + 144 - 2304 = -15x^2, \quad 15x^2 = 240, \quad x^2 = 16, \quad x = \pm 4. \text{ При этом } x = -4 \text{ — не удовлетворяет условию задачи.}$$

Ответ: 4.

605. Пусть x км/ч — скорость течения реки, тогда $(5+x)$ км/ч — скорость моторной лодки по течению реки, а $(5-x)$ км/ч — скорость против течения. Общее время в пути составило 8 часов. Предположим, что река течёт

в направлении от A к B . Тогда время, затраченное на путь от A до B , с учетом времени на остановку в пункте B , равно $\left(\frac{14}{5+x} + 1\frac{1}{3}\right)$ часов. Время, затраченное на путь от B до A , равно $\left(\frac{14}{5-x}\right)$ часов. Составим уравнение:

$\frac{14}{5+x} + 1\frac{1}{3} + \frac{14}{5-x} = 8$ (заметим, что вид этого уравнения не зависит от направления течения реки), $\frac{14}{5+x} + \frac{14}{5-x} - 6\frac{2}{3} = 0$, $\frac{7}{5+x} + \frac{7}{5-x} - \frac{10}{3} = 0$, $3(7(5-x) + 7(5+x)) - 10(5^2 - x^2) = 0$, $10x^2 = 40$, $x = \pm 2$. При этом $x = -2$ — не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 2.

606. Пусть x — скорость велосипедиста в км/ч. Тогда $x + 40$ — скорость мотоциклиста. Из условия задачи следует уравнение: $\frac{30}{x} - \frac{30}{x+40} = 1$;
 $\frac{30(x+40) - 30x - x(x+40)}{x(x+40)} = 0$; $\frac{-x^2 - 40x + 1200}{x(x+40)} = 0$; $x_1 = -60$, $x_2 = 20$. Так как скорость велосипедиста выражается положительным числом, то $x = 20$.

Ответ: 20.

607. Пусть x — скорость мотоциклиста в км/ч. Тогда $(x - 60)$ — скорость велосипедиста. Из условия задачи следует уравнение $\frac{50}{x-60} - \frac{50}{x} = 2\frac{2}{3}$;
 $x_1 = -15$, $x_2 = 75$. Так как скорость мотоциклиста выражается положительным числом, то $x = 75$.

Ответ: 75.

608. Обозначим скорость первого велосипедиста через v (км/ч). Тогда скорость второго велосипедиста равна $(v + 10)$, а на всю дорогу они потратили $\frac{60}{v}$ и $\frac{60}{v+10}$ часов соответственно. Получаем уравнение:

$\frac{60}{v} = \frac{60}{v+10} + 0,5 + 0,5$; $60v + 600 = 60v + v^2 + 10v$; $v^2 + 10v - 600 = 0$;
 $v_1 = 20$ и $v_2 = -30$. Так как скорость положительна, то $v = 20$.

Ответ: 20.

609. Обозначим через x расстояние от A до B в километрах. Тогда

$$\frac{x}{20} = \frac{x}{30} + 1; 3x = 2x + 60; x = 60 \text{ (км)}.$$

Ответ: 60.

610. Половину пути велосипедист проехал за $\frac{20}{40}$ (ч) = $\frac{1}{2}$ (ч), а ещё 10 км за $\frac{1}{4}$ часа, тогда мотоциклист до встречи с велосипедистом находился в пути $\frac{1}{4}$ часа и проехал 30 км. Значит, его скорость равна $30 : \frac{1}{4} = 120$ км/ч, тогда скорость сближения — $120 - 40 = 80$ км/ч.

Ответ: 80.

611. Пусть v — скорость первого мотоциклиста, а S — путь. Тогда первый прошёл весь путь за время $\frac{S}{v}$, а второй — за время $\frac{S}{2(v+15)} + \frac{S}{2 \cdot 50}$.

Так как мотоциклисты прибыли в пункт B одновременно, то

$$\frac{S}{2(v+15)} + \frac{S}{2 \cdot 50} = \frac{S}{v}.$$

Умножив на $2 \cdot 50v(v+15)$ и разделив на S , получим

$$50v + v(v+15) = 2 \cdot 50(v+15); v^2 - 35v - 1500 = 0; v_{1,2} = \frac{35 \pm 85}{2};$$

$$v_1 = -25, v_2 = 60.$$

По смыслу задачи $v > 0$, значит, $v = 60$.

Ответ: 60.

612. Пусть v — скорость велосипедиста на пути из A в B , t — время, за которое он проехал этот путь. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (v+3)(t-3) = 108, \\ vt = 108; \end{cases} \Rightarrow vt + 3t - 3v - 9 = vt; t = v + 3. \text{ Подставляя}$$

последнее выражение для t во второе уравнение, получим: $v(v+3) = 108$; $v^2 + 3v - 108 = 0$; $v_1 = -12, v_2 = 9$. Так как по смыслу задачи $v > 0$, то $v = 9$.

Ответ: 9.

613. Пусть v — скорость велосипедиста на пути из A в B , t — время, за которое он проехал этот путь. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (v-2)(t+2) = 120, \\ vt = 120; \end{cases} \Rightarrow vt - 2t + 2v - 4 = vt; t = v - 2. \text{ Подставляя}$$

последнее выражение для t во второе уравнение, получим: $v(v-2) = 120$;

$v^2 - 2v - 120 = 0$; $v_1 = -10$, $v_2 = 12$. Так как по смыслу задачи $v > 0$, то $v = 12$.

Ответ: 12.

614. Пусть x км/ч — скорость первого велосипедиста, тогда $(x - 5)$ км/ч — скорость второго. На весь путь первый велосипедист затратил $\frac{84}{x}$ часов, а второй — $\frac{84}{x - 5}$ часов, и по условию $\frac{84}{x} = \frac{84}{x - 5} - 5$.

Считая, что $x \neq 0$ и $x \neq 5$, имеем

$$84(x - 5) = 84x - 5x(x - 5); \quad x(x - 5) = 84; \quad x^2 - 5x - 84 = 0; \quad (x - 12)(x + 7) = 0.$$

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то $x = 12$.

Скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, равна 7.

Ответ: 7.

615. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x км/ч. На прямой путь лодка затратила $\frac{144}{x - 2}$ часа, а на обратный — $\frac{144}{x + 2}$ часа. По условию, $\frac{144}{x - 2} = \frac{144}{x + 2} + 3$.

Так как по смыслу задачи $x > 2$, то получаем

$$48(x + 2) = 48(x - 2) + (x - 2)(x + 2); \quad x^2 = 49 \cdot 4; \quad x = 14.$$

Ответ: 14.

616. Пусть x км/ч — скорость течения реки. Из условия задачи следует таблица

	$v \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$	$t \text{ (ч)}$	$S \text{ (км)}$
По течению	$17 + x$	$\frac{140}{17 + x}$	140
Против течения	$17 - x$	$\frac{140}{17 - x}$	140

$$\text{Имеем уравнение: } \frac{140}{17 - x} - \frac{140}{17 + x} = 3;$$

$$140x + 2380 + 140x - 2380 = -3x^2 + 867;$$

$$x_{12} = \frac{-140 \pm \sqrt{19600 + 2601}}{3} = \frac{-140 \pm 149}{3},$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{289}{3} \quad (x_2 \text{ не удовлетворяет условию задачи}).$$

Ответ: 3.

617. Пусть v км/ч — собственная скорость теплохода.

Тогда $(v - 2)$ км/ч — скорость против течения, $(v + 2)$ км/ч — скорость

по течению. Из условия задачи следует уравнение $\frac{221}{v-2} - \frac{221}{v+2} = 4$.

$221v + 442 - 221v + 442 = 4v^2 - 16$, $4v^2 = 16 + 884$, $4v^2 = 900$, $v^2 = 225$,
 $v = \pm 15$. Так как по условию $v > 0$, то $v = 15$.

Ответ: 15.

618. Пусть x км/ч — скорость течения реки. Тогда $(18 + x)$ км/ч — скорость теплохода по течению реки, $(18 - x)$ км/ч — скорость теплохода против течения реки. Время, затраченное на движение по течению реки,

равно $\frac{315}{18+x}$ ч. Время, затраченное на дорогу назад, равно $\frac{315}{18-x}$ ч.

Составим уравнение: $\frac{315}{18+x} + \frac{315}{18-x} = 36$.

Решим его: $315(18-x) + 315(18+x) = 36(18^2 - x^2)$;
 $315(18-x+18+x) = 36(18^2 - x^2)$; $315 \cdot 36 = 36(18^2 - x^2)$; $x^2 = 324 - 315$;
 $x^2 = 9$; $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. При этом x_2 не удовлетворяет условию, так как скорость должна быть положительна.

Ответ: 3.

619. Пусть x км/ч — скорость второго теплохода, тогда $(x - 3)$ км/ч — скорость первого. Время пути первого теплохода $\frac{418}{x-3}$ часов, а второго —

$\frac{418}{x}$ часов. По условию разность между ними составила 3 часа. Составим

уравнение: $\frac{418}{x-3} - \frac{418}{x} = 3$, $x \neq 3$; $418x - 418(x-3) = 3x(x-3)$;

$3x^2 - 9x = 1254$; $x^2 - 3x - 418 = 0$; $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+1672}}{2} = \frac{3 \pm 41}{2}$;
 $x_1 = 22$, $x_2 = -19$, при этом x_2 не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 22.

620. Пусть x — скорость первого теплохода, тогда $(x + 2)$ — скорость второго. Так как они прибыли одновременно, то $\frac{255}{x} = \frac{255}{x+2} + 2$. Тогда

$\frac{255x + 2x^2 + 4x - 255x - 510}{x(x+2)} = 0$; $x^2 + 2x - 255 = 0$; $x_1 = 15$, $x_2 = -17$.

Так как $x_2 < 0$, то $x = 15$.

Ответ: 15.

621. Пусть v — скорость мотоциклиста, t — время, за которое он проехал весь путь.

По условию задачи составим систему уравнений.

$$\begin{cases} (v + 25) \cdot (t - 1,5) = 156, \\ vt = 156; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} vt + 25t - 1,5v - 37,5 = 156, \\ vt = 156; \end{cases} \Rightarrow$$

$$25t - 1,5v - 37,5 = 0; \quad v = \frac{50t - 75}{3}. \text{ Подставим во второе уравнение.}$$

$$\frac{50t^2 - 75t}{3} = 156; \quad 50t^2 - 75t - 468 = 0; \quad t_1 = 3,9, \quad t_2 = -2,4. \text{ Так как } t > 0,$$

$$\text{то } t = 3,9. \text{ Тогда } v = \frac{156}{3,9} = 40.$$

Ответ: 40.

622. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста, тогда $(x + 40)$ км/ч — скорость мотоциклиста. $\frac{90}{x}$ ч был в пути велосипедист, $\frac{90}{x + 40}$ ч — мотоциклист. На $\left(\frac{90}{x} - \frac{90}{x + 40}\right)$ часов больше затратил на путь от пункта A до пункта B велосипедист, чем мотоциклист, что по условию задачи составляет 3 часа. Составим уравнение:

$$\frac{90}{x} - \frac{90}{x + 40} = 3, \quad x > 0.$$

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x + 40} = 1,$$

$$30x + 1200 - 30x = x^2 + 40x,$$

$$x^2 + 40x - 1200 = 0,$$

$$x = 20, \quad x = -60 \text{ — корни уравнения.}$$

Условию $x > 0$ удовлетворяет только $x = 20$.

20 км/ч — скорость велосипедиста.

Ответ: 20.

623. Пусть x км/ч — скорость первого мотоциклиста, S км — расстояние между пунктами A и B . Тогда $\frac{S}{x}$ ч — время в пути первого мотоциклиста.

$\frac{S}{2 \cdot 30}$ ч — время второго мотоциклиста, затраченное на первую половину

пути, $\frac{S}{2 \cdot (x + 20)}$ ч — время второго мотоциклиста, затраченное на вто-

рую половину пути. $\left(\frac{S}{60} + \frac{S}{2(x+20)}\right)$ ч — время второго мотоциклиста, затраченное на весь путь от пункта A до пункта B . По условию мотоциклисты прибыли в пункт B одновременно. Составим уравнение:

$$\frac{S}{x} = \frac{S}{60} + \frac{S}{2(x+20)}, \quad x > 0$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{60} + \frac{1}{2(x+20)},$$

$$60x + 1200 = x^2 + 20x + 30x,$$

$$x^2 - 10x - 1200 = 0,$$

$x = 40$, $x = -30$ — корни уравнения.

$x = -30$ не удовлетворяет условию $x > 0$.

Второй мотоциклист во второй половине пути ехал со скоростью $40 + 20 = 60$ км/ч.

Ответ: 60.

624. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста в пути от B к A , тогда $(x - 5)$ км/час — скорость велосипедиста в пути от A к B . Составляем уравнение $\frac{120}{x} + 2 = \frac{120}{x-5}$, $x - 5 > 0$; $120(x - 5) + 2x(x - 5) = 120x$,

$$2x^2 - 10x - 600 = 0, \quad x^2 - 5x - 300 = 0, \quad x = \frac{5+35}{2} = 20.$$

Ответ: 20.

625. Среднюю скорость автомобиля найдём по формуле $v_{\text{ср.}} = \frac{S}{t}$;

$$v_{\text{ср.}} = \frac{360 + 180 + 200}{360 : 60 + 180 : 90 + 200 : 100} = 74 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 74.

626. Среднюю скорость автомобиля найдём по формуле $v_{\text{ср.}} = \frac{S}{t}$.

$$v_{\text{ср.}} = \frac{432 + 150 + 66}{432 : 72 + 150 : 75 + 1} = 72 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 72.

627. Весь путь 3270 км, тогда обозначим через x км — расстояние, на которое каждый день увеличивается пройденный путь, во второй день — $(520 + x)$ км, в третий день — $(520 + 2x)$ км и т. д. За пять дней он прошёл $(2600 + 10x)$ км, что равно 3270 км. Составляем уравнение и решаем его: $2600 + 10x = 3270$, $10x = 670$, $x = 67$. За третий день грузовой автомо-

билъ проехал 654 км.

Ответ: 654.

628. Пусть x км/ч — скорость теплохода в стоячей воде, тогда скорость теплохода по течению реки $(x + 4)$ км/ч, скорость теплохода против течения реки $(x - 4)$ км/ч, его время в пути 24 часа. Составляем уравнение

$$\frac{180}{x+4} + \frac{180}{x-4} = 24, \quad x > 4. \quad 180x - 720 + 180x + 720 = 24(x^2 - 16),$$

$$24x^2 - 360x - 384 = 0, \quad x^2 - 15x - 16 = 0, \quad x = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 64}}{2}, \quad x = 16.$$

Ответ: 16.

629. Автобус, выехавший из B , проехал $(270 - 140) = 130$ (км). Его скорость равна $130 : 2,5 = 52$ (км/ч).

Ответ: 52.

630. Найдём время на прохождение всего пути: $\frac{200}{80} + \frac{190}{95} + \frac{150}{100} = 6$ (ч).

Найдём среднюю скорость автобуса на протяжении всего пути:

$$(200 + 190 + 150) : 6 = 90 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 90.

631. Найдём, сколько км пройдут два автомобиля за 1 час:

$$95 + 105 = 200 \text{ (км)}.$$

Найдём, через сколько часов автомобили встретятся:

$$700 : 200 = 3,5 \text{ (ч)}.$$

Ответ: 3,5.

632. Выхавший из A мотоциклист проехал $280 - 80 = 200$ (км), его скорость равна $\frac{200}{4} = 50$ (км/ч).

Ответ: 50.

633. $70 + 80 = 150$ (км/ч), $720 : 150 = 4,8$ (ч).

Ответ: 4,8.

634. Пусть x км/ч — собственная скорость теплохода, тогда $(x + 4)$ км/ч — скорость теплохода по течению, $(x - 4)$ км/ч — скорость теплохода против течения, время в пути составляет 8 часов.

$$\frac{60}{x+4} + \frac{60}{x-4} = 8, \quad x > 4. \quad 60x - 240 + 60x + 240 = 8(x^2 - 16),$$

$$8x^2 - 120x - 128 = 0, \quad x^2 - 15x - 16 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 64}}{2} = \frac{15 \pm 17}{2},$$

$$x = 16.$$

Ответ: 16.

635. x км/ч — скорость мотоциклиста, $(x - 20)$ км/ч — скорость велосипедиста, тогда время, затраченное на путь мотоциклистом, — $\frac{105}{x}$ ч,

велосипедистом — $\frac{105}{x - 20}$. Составляем уравнение: $\frac{105}{x - 20} - \frac{105}{x} = 4$,
 $105x - 105x + 2100 = 4x^2 - 80x$, $4x^2 - 80x - 2100 = 0$, $x^2 - 20x - 525 = 0$.
 $x > 20$, $x = 10 \pm 25$, $x = 35$.

Ответ: 35.

636. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста, тогда $(x - 3)$ км/ч — скорость пешехода. Время, затраченное на проезд всего пути велосипедистом, — $\frac{158\frac{2}{3}}{x}$ ч, а время, затраченное пешеходом на прохождение всего

пути, — $\frac{158\frac{2}{3}}{x - 3}$ ч. Разница во времени составляет два часа, то есть имеем

уравнение: $\frac{158\frac{2}{3}}{x - 3} - \frac{158\frac{2}{3}}{x} = 2$, $x > 3$. Решаем уравнение:

$$158\frac{2}{3} \cdot x - 158\frac{2}{3} \cdot (x - 3) = 2x(x - 3), \frac{476}{3}x - \frac{476}{3}x + \frac{476}{3} \cdot 3 = 2x^2 - 6x,$$

$$2x^2 - 6x - 476 = 0, x^2 - 3x - 238 = 0, x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 238 \cdot 4}}{2} = \frac{3 \pm 31}{2},$$

$x_1 = 17$, $x_2 = -14$ — посторонний корень.

Ответ: 17.

637. Пусть x км/ч — скорость течения реки, тогда составим таблицу:

S(км)	v(км/ч)	t(ч)
21 км	$8 + x$	$\frac{21}{8 + x}$
21 км	$8 - x$	$\frac{21}{8 - x}$
Итого		$(16 - 8) - 1 = 7$

Составляем уравнение: $\frac{21}{8 + x} + \frac{21}{8 - x} = 7$. Решим уравнение:

$$3 \cdot (8 - x) + 3 \cdot (8 + x) = (64 - x^2), 24 - 3x + 24 + 3x = 64 - x^2, 64 - x^2 = 48,$$

$$x^2 = 16, x = 4.$$

Ответ: 4.

638. Пусть x км/ч — скорость теплохода на пути из A в B , тогда $(x+8)$ км/ч — скорость теплохода на пути от B до A . Составляем таблицу:

S (км)	v (км/ч)	t (ч)
570 км	x	$\frac{570}{x}$
570 км	$x + 8$	$\frac{570}{x + 8}$

Уравнение: $\frac{570}{x} - \frac{570}{x+8} = 4, x > 0; 570 \cdot (x+8) - 570 \cdot x = 4x(x+8),$
 $570x + 4560 - 570x = 4x^2 + 32x, 4x^2 + 32x - 4560 = 0, x^2 + 8x - 1140 = 0,$
 $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 + 1140} = -4 \pm \sqrt{1156} = -4 \pm 34. x_1 = 30, x_2 = -38$ —
 посторонний корень.

Ответ: 30.

639. Пусть x км — расстояние от города A до места, где автомобили встретятся, тогда x км — расстояние, которое прошёл первый автомобиль, $850 - x$ км — прошёл второй автомобиль до встречи.

Время первого автомобиля до встречи $\frac{x}{75}$ часов, время второго автомобиля до встречи $\frac{850-x}{80}$ часов.

Составляем уравнение: $\frac{x}{75} = \frac{850-x}{80} + 1. 80x = 850 \cdot 75 - 75x + 75 \cdot 80,$
 $(80 + 75)x = 75(850 + 80), x = \frac{930 \cdot 75}{155}, x = 450.$

Ответ: 450.

640. Пусть x км — расстояние между городами. Тогда в первый день автомобиль проехал — $\left(\frac{x}{4} + 40\right)$ км, во второй день — $\left(\frac{x}{3} + 30\right)$ км, а в третий день $\left(\frac{17}{60}x + 45\right)$ км. Составим и решим уравнение.

$\frac{x}{4} + 40 + \frac{x}{3} + 30 + \frac{17}{60}x + 45 = x. 15x + 60 \cdot 40 + 20x + 60 \cdot 30 + 17x + 45 \cdot 60 = 60x,$
 $60x - 52x = 6900, 8x = 6900, x = 862,5.$

Ответ: 862,5.

641. $2 \cdot 65 + 80 + 3 \cdot 70 = 420$ (км) — это весь путь, который проехал автомобиль. Время, за которое он проехал этот путь, равно 6 часам.

Тогда средняя скорость автомобиля равна $420 : 6 = 70$ (км/ч).

Ответ: 70.

642. Первый мотоциклист проехал $60 \cdot \frac{3}{4} = 45$ (км); второй мотоциклист — $45 - 15 = 30$ (км); второй мотоциклист двигался со скоростью $30 : \frac{3}{4} = 40$ (км/ч).

Ответ: 40.

643. Пусть x км/ч — скорость катера в неподвижной воде ($x > 4$), тогда $\frac{120}{x-4}$ ч — время, затраченное катером на путь против течения реки,

$\frac{120}{x+4}$ ч — время, затраченное катером на путь по течению реки. Состав-

ляем уравнение $\frac{120}{x-4} - \frac{120}{x+4} = 4$. $120x - 120x + 960 = 4(x^2 - 16)$, $4x^2 - 64 - 960 = 0$, $x^2 - 256 = 0$, $x = 16$ ($x = -16$ не удовлетворяет условию $x > 4$).

Ответ: 16.

644. x км/ч — скорость течения реки, $(16 + x)$ км/ч — скорость теплохода по течению реки, $(16 - x)$ км/ч — скорость теплохода против течения реки, $\frac{126}{16+x}$ ч — время, затраченное на путь по течению реки.

$\frac{126}{16-x}$ ч — время, затраченное на путь против течения реки. Составим

уравнение $\frac{126}{16+x} + \frac{126}{16-x} + 3 = 19$, где $x \in (0; 16)$.

$126(16-x) + 126(16+x) = 16(256 - x^2)$; $16x^2 = 4096 - 4032$; $x^2 = 4$, $x = 2$ ($x = -2$ не удовлетворяет условию $x \in (0; 16)$).

Ответ: 2.

645. Пройденный автомобилем путь равен $150 + 210 + 150 = 510$ (км).

Время, затраченное на прохождение пути, $\frac{150}{60} + \frac{210}{70} + \frac{150}{75} = 2,5 + 3 + 2 = 7,5$ (ч). Скорость автомобиля (средняя) — $510 : 7,5 = 68$ (км/ч).

Ответ: 68.

646. Пусть длина поезда — x м, тогда при скорости 90 (км/ч) = 1500 (м/мин) он проезжает мимо светофора за $0,3$ мин.
 $x = 1500 \cdot 0,3 = 450$ (м).

Ответ: 450.

647. x км/ч — скорость мотоциклиста, $(x + 15)$ км/ч — скорость автомобилиста, $\frac{150}{x}$ ч — время мотоциклиста, $\frac{150}{x + 15}$ ч — время автомобилиста.

Составим уравнение $\frac{150}{x} - \frac{150}{x + 15} = 2\frac{15}{60}$, $150(x + 15) - 150x = 2,25x(x + 15)$; $2,25x^2 + 33,75x - 2250 = 0$; $x^2 + 15x - 1000 = 0$, $x > 0$.
 $x = \frac{-15 \pm 65}{2}$, $x = 25$.

Ответ: 25.

648. При скорости 63 (км/ч) = $\frac{63 \cdot 1000}{3600} = 17,5$ (м/с) поезд проезжает мимо платформы за 62 с, поэтому длина поезда равна $17,5 \cdot 62 - 600 = 485$ (м).

Ответ: 485.

649. Скорость движения пассажирского поезда относительно товарного равна $80 - 50 = 30$ км/ч = $\frac{25}{3}$ (м/с). За 3 мин 6 с пассажирский поезд переместился относительно товарного на $\frac{25}{3} \cdot (3 \cdot 60 + 6) = 1550$ (м), длина пассажирского поезда равна $1550 - 1100 = 450$ (м).

Ответ: 450.

650. Пусть скорость велосипедиста на пути из A в B — x км/ч, тогда время, затраченное на этот путь, равно $\frac{120}{x}$ ч. Обрато он ехал со скоростью $(x + 2)$ км/ч, и время, затраченное на путь от B к A , равно (с учётом остановки) $\left(\frac{120}{x + 2} + 2\right)$ ч. Составляем уравнение $\frac{120}{x} = \frac{120}{x + 2} + 2$; $120x + 240 - 120x = 2x^2 + 4x$; $x^2 + 2x - 120 = 0$. $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 120}$, $x = 10$ (так как скорость не может быть отрицательной по условию задачи).

Ответ: 10.

651. Пусть x км — расстояние от города A до места встречи автомоби-

лей. Время первого автомобиля до встречи $\frac{x}{75}$ ч, а время второго автомобиля до встречи $\frac{641-x}{80}$ ч. Составляем уравнение $\frac{x}{75} - \frac{641-x}{80} = 4$.
 $16x - 641 \cdot 15 + 15x = 4 \cdot 1200$, $31x = 15(80 \cdot 4 + 641)$, $31x = 14\,415$,
 $x = 465$.

Ответ: 465.

652. Обозначим всю работу за 1. Для выполнения всей работы: 1-му крану требуется x часов; 2-му крану — $4x$ часов; а 3-му крану — $(x-9)$ часов.

Тогда производительность: 1-го крана — $\frac{1}{x}$ всей работы в час; 2-го крана — $\frac{1}{4x}$ всей работы в час; 3-го крана — $\frac{1}{x-9}$ всей работы в час.

Производительность трёх кранов вместе (при их совместной работе):

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{x-9}\right) \text{ всей работы в час.}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{x-9} = \frac{4(x-9) + (x-9) + 4x}{4x(x-9)} = \frac{9x-45}{4x(x-9)}.$$

Всю работу три крана выполнили бы (при совместной работе) за $\left(1 : \frac{9x-45}{4x(x-9)} = \frac{4x(x-9)}{9(x-5)}\right)$ часов, что по условию равно 18 часов.

$$\frac{4x(x-9)}{9(x-5)} = 18, \quad 4x(x-9) = 9 \cdot 18 \cdot (x-5),$$

$$2x(x-9) = 81(x-5),$$

$$2x^2 - 18x - 81x + 81 \cdot 5 = 0, \quad 2x^2 - 99x + 81 \cdot 5 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{99 \pm \sqrt{99^2 - 4 \cdot 2 \cdot 81 \cdot 5}}{4} = \frac{99 \pm \sqrt{9^2(11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5)}}{4} =$$

$$= \frac{99 \pm 9\sqrt{121-40}}{4} = \frac{99 \pm 9 \cdot 9}{4}. \quad x_1 = \frac{180}{4} = 45, \quad x_2 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.$$

$x_2 = \frac{9}{2}$ не удовлетворяет условию задачи, так как один кран не может выполнить всю работу быстрее, чем три крана вместе. Значит, $x = 45$ часов. Понятно, что 1-й и 3-й краны работают быстрее, чем любой из них вместе 2-м. Следовательно, время их совместная разгрузки и будет наименьшим.

Для выполнения всей работы требуется: 1-му крану — 45 часов, 3-му крану — 36 часов. Производительность: 1-го крана — $\frac{1}{45}$, 3-

го крана — $\frac{1}{36}$. Совместная производительность 1-го и 3-го крана:
 $\frac{1}{45} + \frac{1}{36} = \frac{4+5}{180} = \frac{9}{180} = \frac{1}{20}$. Всю работу 1-й и 3-й краны при совместной работе выполняют за $1 : \frac{1}{20} = 20$ часов.

Ответ: 20.

653. Примем объем всей работы за 1. При совместном действии задание выполняется за 30 ч, значит, за 1 ч — $\frac{1}{30}$ часть всей работы, за 6 ч — $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ ее. После 6 ч совместной работы осталось выполнить $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ задания, что выполнил 2-ой механизм за 40 ч. Отсюда его производительность $\frac{4}{5} : 40 = \frac{1}{50}$ всей работы в час, а 1-го механизма — $\frac{1}{30} - \frac{1}{50} = \frac{1}{75}$ всей работы. На выполнение всего задания 1-му потребовалось бы $1 : \frac{1}{75} = 75$ часов.

Ответ: 75.

654. Примем длину тоннеля за 1. Если 1-ый «крот» прорыл бы весь тоннель самостоятельно за x дней, то его производительность $\frac{1}{x}$ длины в день, а производительность двух «кротов» при совместной работе — $\frac{1}{27}$ длины тоннеля в день, тогда 2-го «крота» — $\left(\frac{1}{27} - \frac{1}{x}\right)$ длины в день. Вместе два «крота» рыли $\frac{1}{3} : \frac{1}{x} = \frac{x}{3}$ дней. За эти дни 1-ый «крот» вырыл $\frac{1}{3}$ длины, 2-ой — $\left(\frac{1}{27} - \frac{1}{x}\right) \frac{x}{3}$ длины, а вместе они вырыли $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{x}\right) \frac{x}{3} = \frac{x}{81}$ длины тоннеля. Оставшуюся часть длины тоннеля $\left(1 - \frac{x}{81}\right)$ 1-ый «крот» вырыл за 8 дней при производительности $\frac{1}{x}$ длины в день, то есть, он вы-

рыл $\frac{8}{x}$ длины тоннеля. Уравнение: $1 - \frac{x}{81} = \frac{8}{x}$, $x > 0$; $81x - x^2 = 8 \cdot 81$;

$$x^2 - 81x + 648 = 0; D = 81^2 - 4 \cdot 648 = 6561 - 2592 = 3969; x_{1,2} = \frac{81 \pm 63}{2};$$

$x_1 = 9$; $x_2 = 72$. Оба числа удовлетворяют условию $x > 0$. Смыслу задачи соответствует $x = 72$.

За 72 дня 1-ый «крот» прорыл бы весь тоннель.

Ответ: 72.

655. Выполнение работы в процентах от всей порученной составляет арифметическую прогрессию: $a_1 = 18$, $d = 1$, $S_n = 100$, n — число дней выполнения всей работы. $\frac{2 \cdot 18 + (n-1)}{2} \cdot n = 100$; $n^2 + 35n - 200 = 0$.

По теореме, обратной теореме Виета, $n_1 = -40$ (что не удовлетворяет условию задачи: $n \in N$), $n_2 = 5$.

За 5 дней рабочий выполнит всю работу.

Ответ: 5.

656. Промежутки времени, необходимые на решение каждой задачи, составляет арифметическую прогрессию: $a_1 = 1,8$, $d = -0,2$, $S_{n-1} = 7,8$, n — число предложенных задач.

$$S_{n-1} = \frac{2a_1 + d(n-2)}{2} \cdot (n-1); \frac{2 \cdot 1,8 - 0,2(n-2)}{2} \cdot (n-1) = 7,8;$$

$$(1,8 - 0,1(n-2))(n-1) = 7,8; (2 - 0,1n)(n-1) = 7,8;$$

$$2n - 2 - 0,1n^2 + 0,1n = 7,8; 0,1n^2 - 2,1n + 9,8 = 0; n^2 - 21n + 98 = 0;$$

$$D = 441 - 392 = 49; n_{1,2} = \frac{21 \pm 7}{2}; n_1 = 7, n_2 = 14. \text{ Время решения}$$

задачи — число положительное, то есть $a_n > 0$. Определим число положительных членов прогрессии: $a_1 + d(n-1) > 0$, $1,8 - 0,2(n-1) > 0$, $-0,2(n-1) > -1,8$, $n-1 < 9$, $n < 10$. $7 < 10$, значит, 7-ой член прогрессии положительный; $14 > 10$, то есть 14-ый член — отрицательный. 7 — число предложенных задач.

Ответ: 7.

657. Введём в рассмотрение арифметическую прогрессию, каждый член a_n которой означает число задач, решенных школьником в n -ый день. Из условия следует, что разность d этой прогрессии — натуральное число. Общее количество рассмотренных им задач за первые 20 дней — сумма первых 20 членов введенной прогрессии $\frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20$, после упрощения $(a_1 + a_{20}) \cdot 10$. (1)

Число задач, решенных за последние 10 дней, можно определить как сумму первых 10 членов арифметической прогрессии (b_n) :

$b_1 = a_{21}, b_{10} = a_{30}$; $b_1 + b_{10} \cdot 5$ (2) По условию суммы (1) и (2) равны: $(a_1 + a_{20}) \cdot 10 = (a_{21} + a_{30}) \cdot 5$. Зная, что $a_n = a_1 + d(n-1)$, получим $(2a_1 + 19d) \cdot 2 = 2a_1 + 49d$; $4a_1 + 38d = 2a_1 + 49d$; $2a_1 = 11d$;
 $a_1 = \frac{11}{2}d$. Найдём число задач, решенных за первые и за последние 15

дней: $\frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7d) \cdot 15$; $\frac{a_{16} + a_{30}}{2} \cdot 15 = (a_1 + 22d) \cdot 15$. Определим, во сколько раз больше школьник рассмотрел задач за последние 15 дней по сравнению с первыми 15-ю днями: $\frac{(a_1 + 22d) \cdot 15}{(a_1 + 7d) \cdot 15} = \frac{a_1 + 22d}{a_1 + 7d}$.

Так как $a_1 = \frac{11}{2}d$, получим $\frac{\frac{11}{2}d + 22d}{\frac{11}{2}d + 7d} = \frac{11d + 44d}{11d + 14d} = \frac{55d}{25d} = 2,2$.

Ответ: 2,2.

658. Увеличение числа на 200% означает прибавление к данному числу числа, вдвое бóльшего. Если в 1-ый день вырубili x сосен, то во 2-ой день: $x + 2x = 3x$, это по условию 12, отсюда $x = 4$; в 3-ий — $3x + 6x = 9x$; в 4-ый — $9x + 18x = 27x, \dots$

Числа сосен, вырубаемых ежедневно, в течение n дней, составляют геометрическую прогрессию: $b_1 = 4, q = 3, b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$, что по условию задачи равно 2916. Уравнение: $4 \cdot 3^{n-1} = 2916, 4 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^6, 3^{n-1} = 3^6, n-1 = 6, n = 7$.

7 дней продолжалась вырубка сосен.

Ответ: 7.

659. Если x деталей в час — производительность опытного рабочего, то молодого — $(x - 5)$. 40 деталей опытный рабочий изготавливает за $\frac{40}{x}$

ч, а молодой — 30 деталей за $\frac{30}{x-5}$ ч, что по условию задачи на 2 ч

дольше. Уравнение: $\frac{30}{x-5} - \frac{40}{x} = 2, x(x-5) \neq 0, \frac{15}{x-5} - \frac{20}{x} = 1$;

$15x - 20(x-5) = x(x-5); x^2 - 5x = 15x - 20x + 100; x^2 = 100; x_1 = -10, x_2 = 10$. Оба числа удовлетворяют условию $x(x-5) \neq 0$, а значит, они корни уравнения (1). Смыслу задачи $x > 5$ соответствует $x = 10$. 10

штук в час изготавливает опытный рабочий, молодой: $10 - 5 = 5$ (штук в час), вместе за час: $10 + 5 = 15$ штук, значит, 120 деталей изготовят за $120 : 15 = 8$ часов.

Ответ: 8.

660. Пусть x автомобилей за 1 час обслуживает ручная мойка, тогда автоматизированная — $(x + 7)$. 45 автомобилей ручная мойка обслуживает за $\frac{45}{x}$ ч, 20 автомобилей автоматизированная мойка — за $\frac{20}{x+7}$ ч, что по

условию задачи на 5 ч меньше, чем $\frac{45}{x}$ ч.

Уравнение: $\frac{20}{x+7} + 5 = \frac{45}{x}$, $x(x-7) \neq 0$. (1)

$\frac{4}{x+7} + 1 = \frac{9}{x}$; $4x + x(x+7) = 9(x+7)$; $4x + x^2 + 7x = 9x + 63$; $x^2 + 2x - 63 = 0$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+63}$; $x_{1,2} = -1 \pm 8$; $x_1 = -9$, $x_2 = 7$.

Числа -9 и 7 удовлетворяют условию $x(x+7) \neq 0$, значит, они корни уравнения (1), но $x = -9$ не соответствует смыслу задачи, поэтому $x = 7$.

Ручная мойка 105 машин обслужит за $\frac{105}{7} = 15$ (часов).

Ответ: 15.

661. Если на выполнение задания бригада рабочих затратила x дней, то она изготавливала $\frac{360}{x}$ деталей в день. Предполагалось изготовить по

плану 360 деталей за $(x+1)$ дней, то есть по $\frac{360}{x+1}$ деталей в день, и

это на 4 меньше, чем $\frac{360}{x}$. Уравнение: $\frac{360}{x+1} + 4 = \frac{360}{x}$, $x(x+1) \neq 0$;

$\frac{90}{x+1} + 1 = \frac{90}{x}$; $90x + x^2 + x = 90x + 90$; $x^2 + x - 90 = 0$;

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{2}$; $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 19}{2}$; $x_1 = -10$, $x_2 = 9$. При $x_1 = -10$,

$x_2 = 9$, $x(x+1) \neq 0$. $x = 9$ соответствует смыслу задачи.

9 дней затратила бригада на выполнение задания.

Ответ: 9.

662. Введём в рассмотрение арифметическую прогрессию, каждый член a_n которой означает промежуток времени решения n -ой задачи; Разность этой прогрессии равна 6 мин. Если n — число заданных задач, а

S_n — сумма первых n членов введенной прогрессии, то математическая запись условия задачи принимает вид уравнения:

$$\frac{2 \cdot 60 - 6(n-1)}{2} \cdot n = 324, \text{ так как } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$(60 - 3(n-1))n = 324; 60n - 3n^2 + 3n = 324; -3n^2 + 63n - 324 = 0; n^2 - 21n + 108 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, $n_1 = 12$, $n_2 = 9$. Определим, какое значение n удовлетворяет условию задачи. По смыслу $a_n > 0$, то есть $a_1 + d(n-1) > 0 - 1) > 0$; ($a_n = a_1 + d(n-1)$) $60 - 6n + 6 > 0$; $-6n > -66$; $n < 11$. Значит, $n = 9$.

Было задано 9 задач.

Ответ: 9.

663. Пусть x , y и z — производительности первого, второго и третьего насоса соответственно. По условию задачи $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$, $x + y = 4z$ и

$$6(x + y + z) = V, \text{ где } V \text{ — объем бассейна. Отсюда получаем: } x = \frac{3y}{5},$$

$$z = \frac{x+y}{4}, \text{ а } x + y + z = \frac{5}{4}(x+y) = \frac{5}{4}\left(\frac{3}{5} + 1\right)y = 2y. \text{ Значит,}$$

$$V = 6(x + y + z) = 12y \Rightarrow y = \frac{V}{12}. \text{ Тогда } x = \frac{3y}{5} = \frac{V}{20}, \text{ а } z = \frac{1}{4}(x + y) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{V}{20} + \frac{V}{12}\right) = \frac{V}{30}. \text{ Так как 3 часа 36 минут — это 3,6 часа, то за это}$$

$$\text{время первый и третий насосы заполнят } 3,6(x+z) \text{ часть объема бассейна.}$$

$$3,6(x+z) = 3,6\left(\frac{V}{20} + \frac{V}{30}\right) = 0,36 \cdot \frac{5V}{6} = 0,3V. \text{ То есть первый и третий}$$

насосы за 3 часа 36 минут заполняют 30% объема бассейна.

Ответ: 30.

664. Пусть x , y и z — производительности первого, второго и третьего насоса соответственно. По условию задачи $\frac{y}{z} = \frac{2}{3}$, $3x = y + z$ и

$$5(x + y + z) = V, \text{ где } V \text{ — объем бассейна. Откуда, } y = \frac{2z}{3}, x = \frac{y+z}{3}, \text{ а}$$

$$x + y + z = \frac{4}{3}(y + z) = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3} + 1\right)z = \frac{20z}{9}. \text{ Значит, } V = 5(x + y + z) =$$

$$= \frac{100z}{9} \Rightarrow z = 0,09V. \text{ Тогда } y = \frac{2z}{3} = 0,06V, \text{ а } x = \frac{1}{3}(y + z) =$$

$$= \frac{1}{3}(0,06V + 0,09V) = 0,05V.$$

Так как 6 часов работал первый насос, а потом 5 часов второй, то объем бензина, который они закачали, равен: $6x + 5y = 6 \cdot 0,05V + 5 \cdot 0,06V = 0,6V$. То есть они заполнили 60% объема цистерны.

Ответ: 60.

665. Общий план решения такой же, как в задаче В9 варианта 3.

Если x и y — производительности старого и нового станков соответственно, V — общий объем заказа, а t — время, за которое с помощью пяти старых и двух новых станков можно этот заказ выполнить, то $(5x + 2y)t = V$.

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \frac{2y}{9} \text{ и } V = \left(5 \cdot \frac{2}{9} + 2\right)yt = \frac{28}{9}yt \Rightarrow yt = \frac{9V}{28}.$$

$$(6x + y)t = \left(6 \cdot \frac{2}{9} + 1\right)yt = \frac{21}{9}yt = \frac{21}{9} \cdot \frac{9V}{28} = 0,75V.$$

Т. е. с помощью шести старых станков и одного нового за время t можно выполнить 75% заказа.

Ответ: 75.

666. Пусть первый насос работает с производительностью $3x$ литров в час, тогда второй — $4x$, а третий — $5x$ литров в час. Значит, всего в бассейне $(3x + 4x + 5x) \cdot 5 = 60x$ литров. За первый час налилось $3x$ литров, в следующий час $12x$ литров. Осталось $45x$ литров, а все последующее время скорость заполнения была $9x$ литров в час. Итак, после поломки потребовалось еще 5 часов. А всего бассейн заполнялся 7 часов.

Ответ: 7.

667. Примем всю работу за единицу. Пусть x — производительность первого каменщика, а y — второго, тогда $(x + y)$ — производительность при совместной работе. Составим систему уравнений:
$$\begin{cases} 6(x + y) = 1, \\ 3(x + y) + 4x = 1; \end{cases}$$

$x = \frac{1}{8}$, $y = \frac{1}{24}$. Следовательно, второй каменщик мог бы выполнить всю работу за 24 часа.

Ответ: 24.

668. Примем работу по погрузке вагона за единицу. Тогда пусть производительность первого автопогрузчика за час равна $2x$, а второго — x . Тогда согласно условию $10(2x + x) = 1$, откуда находим $x = \frac{1}{30}$.

Пусть теперь y часов первый работал в одиночку. Составляем уравнение:

$$y \frac{2}{30} + (11 - y) \frac{3}{30} = 1, \text{ или } 2y + 33 - 3y = 30, \text{ откуда находим } y = 3.$$

Ответ: 3.

669. Обозначим количество товара, находящегося на складе через 1. Пусть a — объем продаж за 4 дня первого менеджера, b — объем продаж за 4 дня второго менеджера. Так как, по условию, оба менеджера реализовали $\frac{3}{5}$ всего товара, и известно соотношение их объемов продаж за 4 дня, то получаем систему

$$\begin{cases} a + b = \frac{3}{5}, \\ \frac{a}{b} = \frac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4b}{5} + b = \frac{3}{5}, \\ a = \frac{4b}{5}. \end{cases}$$

Отсюда, $b = \frac{1}{3}$, $a = \frac{4}{15}$. Пусть V_1 — скорость продаж первого менеджера,

V_n — скорость продаж нового работника. Тогда

$V_1 = \frac{a}{4} = \frac{1}{15}$, $V_n = \frac{V_1}{2} = \frac{1}{30}$. Определим какой объем продаж выполнил новый работник. Так как всего объем продаж равен 1, а на складе осталось 20% от всего товара, то всего было продано 80%, что соответствует $\frac{4}{5}$. Следовательно, новый работник продал $\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$ товара. Найдём

Время t , которое он затратил: $t = \frac{0,2}{V_n} = \frac{1 \cdot 30}{5} = 6$ дней.

Ответ: 6.

670. Пусть x — скорость основного двигателя, y — скорость дополнительного двигателя. Путь от земли до станции обозначим через S , путь пройденный на основном и дополнительном двигателях вместе — через S_1 , путь пройденный в этом рейсе на основном двигателе — через S_2 . Тогда $S = 10x$, $S_1 = 2(x + y)$, $S_2 = 6x$. Так как $S = S_1 + S_2$, то $S = 2(x + y) + 6x$. Получаем систему уравнений $\begin{cases} S = 10x, \\ S = 2(x + y) + 6x. \end{cases}$ Отсюда, $10x = 2(x + y) + 6x$, $10x - 2x - 6x = 2y$, $x : y = 1$.

Ответ: 1.

671. Пусть p_i — производительность i -го насоса ($i \in \{1, 2\}$), то есть та воды часть бассейна, которую он откачает за одну минуту; t_i — время в минутах, за которое i -ый насос откачает половину воды бассейна. Тогда

из условия получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} t_1 p_1 = \frac{1}{2}, \\ t_2 p_2 = \frac{1}{2}, \\ t_1 + t_2 = 8 \cdot 60, \\ (p_1 + p_2)(3 \cdot 60 + 45) = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения.

Одно из них: $p_1 = \frac{1}{360}$, $t_1 = 180$, $p_2 = \frac{1}{600}$, $t_2 = 300$; другое решение — симметрическое. Оно получается из первого заменой индексов 1 на 2 и наоборот.

Таким образом, более мощный насос откачает всю воду из бассейна за 360 минут.

Ответ: 360.

672. Пусть x м³ воды за час перекачивает первый насос, тогда $(x - 5)$ м³ воды за час перекачивает второй насос. На перекачку 45 м³ первому насосу понадобится $\frac{45}{x}$ минут, а второму на перекачку 50 м³ — $\left(\frac{50}{x-5}\right)$ ми-

нут. По условию: $\frac{50}{x-5} - \frac{45}{x} = \frac{1}{2}$, $x > 5$.

$x^2 - 15x - 450 = 0$, $x_1 = 30$, $x_2 = -15$, x_2 — не удовлетворяет условию $x > 5$.

30 м³ воды ежечасно перекачивает первый насос.

Ответ: 30.

673. Примем всю работу по вспахиванию поля за единицу. Пусть за x часов может вспахать поле первая бригада, работая самостоятельно ($x > 0$), тогда за $(x + 6)$ часов — вторая бригада. Производительности первой и второй бригад $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+6}$ соответственно.

По условию $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$, $x > 0$,

$$4x + 24 + 4x = x^2 + 6x; x^2 - 2x - 24 = 0,$$

$$x_1 = 6, x_2 = -4.$$

x_2 — не удовлетворяет условию $x > 0$.

За 6 часов может вспахать поле первая бригада, работая самостоятельно.

Ответ: 6.

674. Составим систему уравнений, соответствующую условию задачи:

$$\begin{cases} 5x + 5y = 1, \\ 3x + 7,5y = 1; \end{cases}$$

где x — производительность труда первого садовника, а y — второго садовника.

Решив систему, получим: $x = \frac{5}{45}$, $y = \frac{4}{45}$, значит второй садовник подстрижёт кусты за $\frac{45}{4}$ часов.

Ответ: 11,25.

675. Составим систему уравнений, соответствующую условию задачи:

$$\begin{cases} 15x_1 + 15x_2 = 1, \\ 7x_1 + 21x_2 = 1, \end{cases}$$

где x_1 — производительность первого комбайна, а x_2 — второго комбайна. Решив систему, получим: $x_1 = \frac{1}{35}$, $x_2 = \frac{4}{105}$, значит первый комбайн вспашет всё поле за 35 часов.

Ответ: 35.

676. Пусть x, y, z — производительности первого, второго и третьего тракторов соответственно. Если три трактора вспахивают поле за 4 часа, то за 1 час они вспахивают $\frac{1}{4}$ поля, то есть $x + y + z = \frac{1}{4}$. Из второго усло-

вия получаем: $x + y = \frac{1}{6}$. Выразив из первого уравнения $z = \frac{1}{4} - (x + y)$

и подставив $x + y = \frac{1}{6}$, получим: $z = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Итак, третий трактор может вспахать поле за 12 часов.

Ответ: 12.

677. Пусть x, y, z — производительность первого, второго и третьего комбайнов соответственно. Из условия следует, что $\frac{1}{x+y} = 4$, $\frac{1}{y+z} = 6$,

$\frac{1}{x+z} = 12$. Необходимо найти $\frac{1}{x+y+z}$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{4}, \\ y + z = \frac{1}{6}, \\ x + z = \frac{1}{12}. \end{cases} \quad \text{Сложив все уравнения системы, получим:}$$

$$2(x + y + z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}; \quad x + y + z = \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{x + y + z} = 4.$$

Три комбайна уберут поле за 4 часа.

Ответ: 4.

678. Пусть второй рабочий делает x деталей в час, тогда первый делает $(x - 2)$ детали в час. Так как первый рабочий выполняет заказ на 2 часа медленнее, то получим уравнение: $\frac{99}{x - 2} = \frac{99}{x} + 2$; $x_1 = -9$, $x_2 = 11$. Так как $x > 0$, то $x = 11$.

Ответ: 11.

679. Пусть x деталей в час делает второй рабочий, тогда первый рабочий делает $(x + 2)$ детали в час. По условию заказ на 360 деталей, следовательно, время работы второго рабочего составляет $\frac{360}{x}$ ч, а первого —

$\frac{360}{x + 2}$ ч. Составим уравнение:

$$\frac{360}{x + 2} = \frac{360}{x} - 2; \quad 360x = 360x + 720 - 2x^2 - 4x; \quad 2x^2 + 4x - 720 = 0; \\ x^2 + 2x - 360 = 0; \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 360}; \quad x_1 = 18, \quad x_2 = -20.$$

По смыслу задачи $x > 0$, значит, $x = 18$.

Ответ: 18.

680. Пусть x деталей в час делает ученик, тогда $(x + 1)$ деталь в час делает мастер; $\frac{126}{x + 1}$ ч — время для изготовления 126 деталей мастером,

$\frac{143}{x}$ ч — время для изготовления 143 деталей учеником. Составим уравне-

$$\text{ние: } \frac{126}{x + 1} + 2 = \frac{143}{x}; \quad 126x + 2x(x + 1) = 143(x + 1); \quad 2x^2 - 15x - 143 = 0; \\ x_1 = 13, \quad x_2 = -5,5.$$

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то $x = 13$.

Ответ: 13.

681. Пусть x деталей шлифует мастер за один час, тогда ученик за один час шлифует $(x - 6)$ деталей. Тогда $\frac{264}{x}$ ч — время работы мастера,

$\frac{256}{x - 6}$ ч — время работы ученика.

Составим и решим уравнение: $\frac{256}{x - 6} - \frac{264}{x} = 4$, $(x - 6) \neq 0$, $x \neq 0$.

$256x - 264(x - 6) = 4x(x - 6)$; $4x^2 - 16x - 1584 = 0$; $x^2 - 4x - 396 = 0$;
 $x_1 = 22$, $x_2 = -18$ — не удовлетворяет условию.

Ответ: 22.

682. Пусть x литров воды в минуту пропускает вторая труба, тогда первая труба пропускает $(x - 2)$ литров в минуту. Время для заполнения резервуара объёмом 675 литров для первой трубы равно $\frac{675}{x - 2}$, для второй —

$\frac{675}{x}$. Составим и решим уравнение: $\frac{675}{x - 2} - \frac{675}{x} = 2$;

$675x - 675x + 1350 = 2x(x - 2)$; $2x^2 - 4x - 1350 = 0$; $x^2 - 2x - 675 = 0$;
 $x_1 = 27$, $x_2 = -25$. Условию $x > 0$ удовлетворяет значение $x = 27$ (мин.).

Ответ: 27.

683. Пусть x литров в минуту пропускает первая труба, тогда $(x + 4)$ литров в минуту пропускает вторая труба; t — время, за которое наполнится резервуар объёмом 375 литров.

По условию задачи составим систему уравнений.

$$\begin{cases} x(t + 1) = 336, \\ (x + 4)t = 375; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xt + x = 336, \\ xt + 4t = 375; \end{cases} \Rightarrow 4t - x = 39; \quad x = 4t - 39.$$

Подставляя выражение для переменной x в первое уравнение, получим: $4t^2 - 35t - 375 = 0$; $t_1 = 15$, $t_2 = -6,25$. Так как $t_2 < 0$, то $t = 15$.

Тогда $x(15 + 1) = 336$; $x = 21$.

Ответ: 21.

684. Пусть x деталей в час делает второй рабочий, тогда $(x + 4)$ детали делает первый рабочий. $\frac{189}{x}$ ч — время, затраченное на изготовление 189

деталей вторым рабочим, $\frac{189}{x + 4}$ ч — время, затраченное на изготовление

189 деталей первым рабочим. Составляем уравнение: $\frac{189}{x} - \frac{189}{x + 4} = 3$;

$x > 0$; $189(x + 4) - 189 \cdot x = 3(x^2 + 4x)$; $756 = 3x^2 + 12x$;

$$3x^2 + 12x - 756 = 0; x^2 + 4x - 252 = 0; x = -2 \pm \sqrt{4 + 252}; x = 14.$$

Ответ: 14.

685. Пусть x дней необходимо второму маляру, чтобы выполнить работу, тогда $\frac{1}{x}$ часть работы выполняется вторым маляром за один день. Пер-

вый маляр делает в один день $\frac{1}{20}$ часть всей работы. Два маляра, работающие вместе, в один день делают $\frac{1}{15}$ всей работы. Составляем уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{20} = \frac{1}{15}; x \neq 0; 300 + 15x = 20x; 5x = 300; x = 60.$$

Ответ: 60.

686. Пусть x часов потребуется второму рабочему, чтобы выполнить весь заказ. Так как рабочие вместе выполнили половину заказа, то оставшуюся половину работы сделал первый рабочий за 8 часов, следовательно всю работу он выполнит за 16 часов.

Таким образом, за один час первый рабочий сделает $\frac{1}{16}$ часть заказа, а второй рабочий — $\frac{1}{x}$ часть заказа.

$$\text{Составляем уравнение: } \frac{1}{16} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}, \frac{1}{x} = \frac{1}{12} - \frac{1}{16}, x = 48.$$

Ответ: 48.

687. Пусть x вопросов в работе, тогда $\frac{x}{12}$ ч — время исполнения всей контрольной работы Вaley, а $\frac{x}{15}$ ч — время исполнения всей контрольной работы Светой.

$$\text{Составляем уравнение: } \frac{x}{12} - \frac{x}{15} = \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{4} \text{ ч} = 15 \text{ мин}\right).$$

$$5x - 4x = 15, x = 15.$$

Ответ: 15.

688. Пусть x л воды в минуту пропускает 2-я труба, тогда $(x - 15)$ л воды в минуту пропускает 1-я труба. $\frac{300}{x}$ минут — время заполнения резервуара объёмом 300 л второй трубой, $\frac{300}{x - 15}$ минут — первой трубой.

Из условия следует, что $\frac{300}{x-15} - \frac{300}{x} = 18$. Решим это уравнение.

$$300x - 300(x - 15) = 18x(x - 15); 4500 = 18x^2 - 270x;$$

$18x^2 - 270x - 4500 = 0$; $x^2 - 15x - 250 = 0$; $x_1 = 25$, $x_2 = -10$. Так как x — величина положительная, то второй корень не соответствует условию задачи и $x = 25$.

Ответ: 25.

689. Вся выполненная работа — это 1. Пусть v_1 — производительность Антона, v_2 — производительность Пети, v_3 — производительность Димы.

Тогда $v_1 + v_2 = \frac{1}{8}$; $v_2 + v_3 = \frac{1}{12}$; $v_1 + v_3 = \frac{5}{48}$. Найдём совместную производительность каменщиков, для этого сложим полученные уравнения:

$$2(v_1 + v_2 + v_3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{5}{48}; v_1 + v_2 + v_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{48} = \frac{15}{96}.$$

Следовательно, вместе каменщики построят забор за $1 : \frac{15}{96} = 6,4$ ч.

Ответ: 6,4.

690. Первый насос имеет производительность $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (л/мин), второй на-

сос $\frac{6}{2} = 3$ (л/мин), то есть за 1 мин оба насоса перекачивают 4,5 л. Необходимо перекачать 27 л, то есть $27 : 4,5 = 6$ (минут).

Ответ: 6.

691. Первый токарь в один час делает $\frac{1}{10}$ часть заказа, второй токарь в

один час делает $\frac{1}{15}$ часть заказа, третий токарь в один час делает $\frac{1}{12}$ часть

заказа. Таким образом, работая совместно, три токаря за один час сделают $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ часть заказа. Следовательно, весь заказ выполнится тремя токарями за 4 часа.

Ответ: 4.

692. x — количество вопросов в тесте, тогда $\frac{x}{15}$ ч — время, необходимое

Маше для выполнения теста, $\frac{x}{12}$ ч — время, необходимое Даше для вы-

полнения теста. Составим уравнение $\frac{x}{12} - \frac{x}{15} = \frac{20}{60}$, $x\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{3}$,

$$x = \frac{1}{3} : \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \right), x = 20.$$

Ответ: 20.

693. Найдём, сколько деталей за ночь может изготовить каждая бригада.

1-я бригада: $10 \cdot 20 + 5 \cdot 7 = 235$ деталей;

2-я бригада: $7 \cdot 20 + 13 \cdot 7 = 231$ деталь;

3-я бригада: $11 \cdot 20 + 2 \cdot 7 = 234$ детали.

Из условия следует, что вышла работать 1-я бригада, то есть заказчик заплатит $235 \cdot 500 = 117500$ (руб.) = 117,5 тыс. руб.

Ответ: 117,5.

694. Выясним, сколько часов займёт каждый путь.

Напрямую: $t = \frac{80}{80} = 1$ ч;

через пункт C : $t = \frac{AC}{60} + \frac{BC}{100} = \frac{60}{60} + \frac{50}{100} = 1,5$ ч.

Итак, наиболее быстрый путь займёт 1 час.

Ответ: 1.

695. Задача сводится к решению неравенства $-2t^2 + 8 \geq 6$ при $t \geq 0$.
 $-2t^2 + 8 \geq 6$, $2t^2 \leq 2$, $t^2 \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$. Так как $t \geq 0$, то спортсмен находился на высоте не менее шести метров при $t \in [0, 1]$, то есть 1 секунду.

Ответ: 1.

696. Выясним, сколько часов займёт каждый путь.

Напрямую: $t = \frac{AB}{60} = \frac{60}{60} = 1$ ч;

через пункт C : $t = \frac{AC}{100} + \frac{BC}{80} = \frac{50}{100} + \frac{20}{80} = 0,75$ ч.

Наиболее долгий путь займёт 1 час.

Ответ: 1.

697. Задача сводится к решению неравенства $-\frac{1}{2}t^2 + 5 \geq 3$ при $t \geq 0$.

$-\frac{1}{2}t^2 + 5 \geq 3$, $-t^2 \geq -4$, $t^2 \leq 4$, $-2 \leq t \leq 2$. Так как $t \geq 0$, то лыжник находился на высоте не менее трёх метров при $t \in [0, 2]$, то есть 2 секунды.

Ответ: 2.

698. Из рисунка 32 видно, что график функции $\ell = 20 + 5 \cos t$ имеет четыре точки пересечения с графиком прямой $\ell = 18$ при $t \in [0; 12]$.

Ответ: 4.

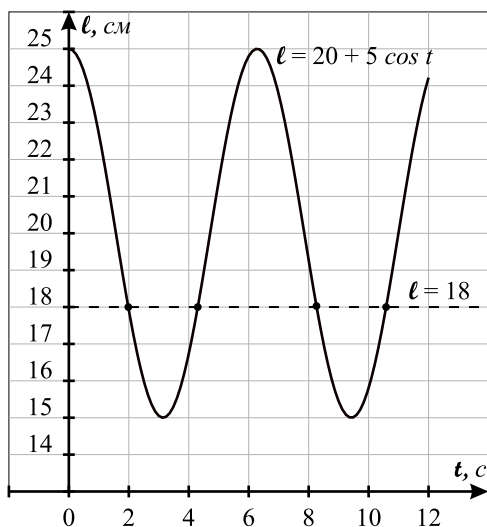


Рис. 32.

699. Укажем на схеме (см. рис. 33) не только длину участка пути, но и время, затраченное туристами на его преодоление.

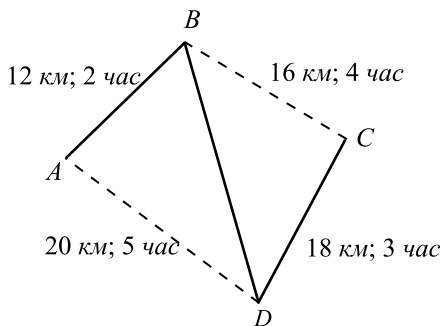


Рис. 33.

Видно, что 8-часовым является маршрут ADC , длина которого равна 38 км.

Ответ: 38.

700. Так как мяч коснулся земли при $h = 0$, то для нахождения d необходимо решить уравнение: $3 - 0,48d^2 = 0$. Его положительный корень —

$d = 2, 5$.

Ответ: 2, 5.

701. Пусть x и y — вес одного карандаша и одной ручки в граммах соответственно. Тогда из условия получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 7 = y, \\ 3y - 11 = x. \end{cases} \quad \text{Её решение } x = 4, y = 5.$$

Значит, 5 ручек и 5 карандашей весят $5x + 5y = 45$ граммов.

Ответ: 45.

702. Расстояние, пройденное тремя участниками эстафеты, равно $3000 + 2700 + 1500 = 7200$ (м).

Время, за которое была пройдена этими спортсменами вся дистанция эстафеты, равно $480 + 450 + 270 = 1200$ (сек).

Следовательно, средняя скорость: $\frac{7200 \cdot 60}{1200} = 360$ (м/мин).

Ответ: 360.

703. Из уравнения движения автомобиля находим уравнение зависимости его скорости от времени: $v(t) = S'(t) = 30 - 10t$. Поскольку в момент остановки автомобиля его скорость была равна 0 м/с, то искомое время находим из уравнения $30 - 10t = 0$; $t = 3$ с.

Ответ: 3.

704. Время в пути от станции 1 до станции 6 электрички I с учётом остановок равно:

$$20 + 1,5 + 20 + 1,5 + 25 + 1,5 + 26 + 1,5 + 20 = 117 \text{ (мин)}.$$

Для электрички II это время равно:

$$20 + 1,5 + 25 + 1,5 + 24 + 1,5 + 25 + 1,5 + 20 = 120 \text{ (мин)}.$$

Следовательно, средняя скорость электрички II меньше, чем электрички I. Так как расстояние между станциями 1 и 6 равно 117 км, то средняя скорость электрички II на этом промежутке пути равна

$$\frac{117 \cdot 60}{120} = 58,5 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 58,5.

705. Чтобы определить, сколько секунд мяч находится на высоте не менее 3 м, решим неравенство $4t - t^2 \geq 3$. Получаем $1 \leq t \leq 3$. Следовательно, мяч на указанной высоте находился 2 секунды.

Ответ: 2.

706. Годовой оборот биржи A:

$$(42 + 13 + 87 + 23) \cdot 10^3 = 165 \cdot 10^3 = 1,65 \cdot 10^5 \text{ (у.е.)}$$

Годовой оборот биржи B:

$$(63 + 47 + 22 + 37) \cdot 10^3 = 169 \cdot 10^3 = 1,69 \cdot 10^5 \text{ (y.e.)}$$

Ответ: 4000.

$$707. a(t_0) = s''(t_0),$$

$$s'(t) = t^3 - 24t - 3,$$

$$s''(t) = 3t^2 - 24,$$

$$s''(t) = 3, 3t^2 - 24 = 3, t^2 = 9, t = 3, \text{ так как } t > 0.$$

Ответ: 3.

708. Объём продукции за год составил: $19 + 23 + 26 + 18 + 20 + 20 + 20 + 20 + 32 + 27 + 35 + 40 = 300$ единиц.

$$\frac{120000}{250} \cdot 300 = 144000 \text{ (y.e.)} — \text{прибыль за год.}$$

Ответ: 144000.

$$709. a(t_0) = S''(t_0), S'(t) = t^2 - 4t + 3, S''(t) = 2t - 4,$$

$$S''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Ответ: 2.

710. Найдём момент времени, в который автомобили поравняются.

$S_1(t) = S_2(t); -t^2 + 6t = 4t; t^2 - 2t = 0; t = 0, t = 2$. В момент времени $t = 0$ автомобилисты выезжали из города, а поравняются они в момент $t = 2$ на расстоянии $S_1(2) = 8$ от города.

Ответ: 8.

711. Пусть изначально требовалось a ниток холодных тонов, тогда тёплых — $2a$. После замены ниток холодных тонов стало b , а тёплых тонов — $1,5b$. Так как общее количество ниток не изменялось, то $a + 2a = b + 1,5b$, откуда $b = 1,2a$, то есть ниток холодных тонов стало в 1,2 раза больше.

Ответ: 1,2.

712. Пусть изначально планировалось сделать a отбивных, тогда котлет — $\frac{2}{3}a$. После приготовления оказалось b отбивных, тогда котлет —

$\frac{5}{6}b$. Так как суммарное количество не изменилось, то $\frac{2}{3}a + a = \frac{5}{6}b + b$,

$\frac{5a}{3} = \frac{11b}{6}$, откуда $a = 1,1b$, то есть предполагаемое количество отбивных в 1,1 раза больше того, которое было приготовлено.

Ответ: 1,1.

713. Задача сводится к решению неравенства: $2 + 4t - t^2 \geq 5; t^2 - 4t + 3 \leq 0; 1 \leq t \leq 3$. Отсюда следует, что волан находится на высоте не менее 5 метров 2 секунды.

Ответ: 2.

714. Теплоход рассчитан на $840 + 26 = 866$ человек, следовательно, нужно не менее $\frac{866}{72} = 12\frac{2}{72}$ шлюпок. Наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому условию — 13.

Ответ: 13.

715. При выборе тарифного плана «0» пользователь заплатит $1,2 \cdot 950 = 1140$ рублей, при выборе плана «800» — заплатит $650 + (950 - 800) \cdot 2 = 950$ рублей, а при выборе плана «Безлимитный» — заплатит 900 рублей. Самый дешёвый тарифный план — «Безлимитный», и пользователь заплатит 900 рублей.

Ответ: 900.

716. Задача сводится к нахождению наименьшего решения неравенства $-\frac{1}{450}x^2 + \frac{1}{3}x + 1 \geq 13 \Leftrightarrow x^2 - 150x + 5400 \leq 0$. Корнями трёхчлена в левой части являются числа 60 и 90, поэтому решением неравенства будет $x \in [60; 90]$. Наименьшим решением является $x = 60$.

Ответ: 60.

717. Площадь всех стёкол $10 \cdot 2,5 = 25 \text{ м}^2$. Составим таблицу:

	Цена 25 м ² стекла (руб)	Резка и шлифовка 10 стёкол (руб)	Итого (руб)
А	$220 \cdot 25 = 5\,500$	$185 \cdot 10 = 1\,850$	7 350
Б	$240 \cdot 25 = 6\,000$	$125 \cdot 10 = 1\,250$	7 250
В	$260 \cdot 25 = 6\,500$	$120 \cdot 10 = 1\,200$	7 700

Ответ: 7 250.

718. Поставка А: $50 \cdot 2300 + 4500 = 119\,500$ (руб).

Поставка Б: $50 \cdot 2250 = 112\,500$ (руб).

Поставка В: $50 \cdot 2350 + 3700 = 121\,200$ (руб).

Самая дешёвая поставка обойдется в 112 500 рублей.

Ответ: 112 500.

719. Экономия от одной поездки на автобусе составляет $14 - 9 = 5$ рублей. Всего $30 \cdot 2 = 60$ поездок, поэтому общая экономия составит $60 \cdot 5 = 300$ рублей.

Ответ: 300.

720. Так как 12 бутылок стоят $12 \cdot 15,5 = 186 < 200$ рублей, а 13 бутылок стоят $201,5 > 200$ рублей, то купить можно 12 бутылок, а в них $12 \cdot 1,5 = 18$ литров воды.

Ответ: 18.

721. Стоимость одной поездки на такси составляет $60 + 10 \cdot 7 = 130$ рублей, стоимость поездок на такси за неделю (туда и обратно) равна $130 \cdot 2 \cdot 3 = 780$ рублей. Стоимость проезда в троллейбусе за неделю (туда и обратно) — $8 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ рублей. Тогда за неделю Ярослав потратит на $780 - 48 = 732$ рублей больше, если будет ездить на такси вместо троллейбуса.

Ответ: 732.

$$\begin{aligned} 722. V &\geq \frac{3}{7}; \quad \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2) \geq \frac{3}{7}; \quad \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1 + \sqrt{S_2} + S_2) \geq \frac{7}{3}; \\ \frac{1}{3}(\sqrt{S_2} + S_2) &\geq \frac{7}{3} - \frac{1}{3}; \quad \sqrt{S_2} + S_2 - 6 \geq 0; \quad (\sqrt{S_2} + 3)(\sqrt{S_2} - 2) \geq 0; \\ \sqrt{S_2} &\geq 2; \quad S_2 \geq 4. \end{aligned}$$

Наименьшая площадь S_2 , удовлетворяющая условию, равна 4.

Ответ: 4.

723. На 40 км потребуется $6,7 \cdot \frac{40}{100} = 2,68$ литров бензина. Один литр стоит 22 рубля, значит, за весь бензин придется заплатить $2,68 \cdot 22 = 58,96$ рублей.

Два билета на автобус стоят $32 \cdot 2 = 64$ рубля, значит, поездка на автомобиле обойдется на $64 - 58,96 = 5,04$ рубля дешевле.

Ответ: 5,04.

$$\begin{aligned} 724. V &\geq \frac{19}{3}; \quad \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2) \geq \frac{19}{3}; \quad \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (4 + 2\sqrt{S_2} + S_2) \geq \frac{19}{3}; \\ \frac{1}{3}(2\sqrt{S_2} + S_2) &\geq \frac{19}{3} - \frac{4}{3}; \quad 2\sqrt{S_2} + S_2 - 15 \geq 0; \quad (\sqrt{S_2} + 5)(\sqrt{S_2} - 3) \geq 0; \\ \sqrt{S_2} &\geq 3; \quad S_2 \geq 9. \end{aligned}$$

Наименьшая площадь S_2 , удовлетворяющая условию, равна 9.

Ответ: 9.

725. Найдём цену каждого из возможных заказов и выберем самый дешёвый:

$$\text{А: } 315 \cdot (35 \cdot 0,24) + 20 \cdot 35 = 2\,646 + 700 = 3\,346;$$

$$\text{Б: } 330 \cdot (35 \cdot 0,24) + 17 \cdot 35 = 2\,772 + 595 = 3\,367;$$

$$\text{В: } 400 \cdot (35 \cdot 0,24) = 3\,360.$$

Самый дешёвый заказ составляет 3 346 рублей.

Ответ: 3 346.

$$726. 11 \cdot \frac{10000}{100} = 1100 \text{ литров бензина расходует такси за месяц. Тогда}$$

ежемесячные затраты равны: $1100 \cdot 21,2 = 23\,320$ рублей.

Ответ: 23 320.

727. Подсчитаем стоимость каждого способа и выберем самый дешёвый.

А: $5 \cdot 70 \cdot 17 = 5\,950$.

Б: $4 \cdot 100 \cdot 17 = 6\,800$.

В: $3 \cdot 120 \cdot 17 = 6\,120$.

Ответ: 5 950.

728. $1\text{ кг } 700\text{ г} = 1,7\text{ кг}$. Для покупки 1,7 кг апельсинов потребуется заплатить $1,7 \cdot 35 = 59,5$ рублей, тогда покупатель получит $100 - 59,5 = 40,5$ рублей сдачи.

Ответ: 40,5.

729. При покупке у поставщика А придётся заплатить

$2400 \cdot 70 + 16400 = 184\,400$.

Цена 70 м^2 бруса у поставщика Б равна $2\,600 \cdot 70 = 182\,000 < 190\,000$, значит, полностью за покупку с доставкой придётся заплатить $182\,000 + 2\,300 = 184\,300$.

Аналогично для поставщика В имеем: $2\,700 \cdot 70 = 189\,000 > 170\,000$, всего нужно будет заплатить 189 000.

Итак, наименьшая стоимость покупки с доставкой равна 184 300.

Ответ: 184 300.

730. Так как $1609\text{ м} = 1,609\text{ км}$, то $75\text{ (миль/час)} = 75 \cdot 1,609 = = 120,675\text{ (км/ч)}$. Округляя до целого, получаем скорость 121 км/ч.

Ответ: 121.

731. При покупке у поставщика А придётся заплатить

$2\,200 \cdot 110 + 17\,400 = 259\,400$.

Цена 110 м^3 пенобетона у поставщика Б равна $2\,300 \cdot 110 = 253\,000 > 250\,000$. Значит, за покупку с доставкой придётся заплатить 253 000.

Нужно приобрести $110\text{ м}^3 > 100\text{ м}^3$ пенобетона, значит, при заказе у поставщика В доставка бесплатно, то есть всего придётся заплатить $2\,500 \cdot 110 = 275\,000$.

Итак, наименьшая стоимость равна 253 тысячи рублей.

Ответ: 253.

732. Бетонный: $4 \cdot 700 + 45 \cdot 250 = 2\,800 + 11\,250 = 14\,050$.

Пеноблочный: $2\,200 \cdot 6 + 3 \cdot 250 = 13\,200 + 750 = 13\,950$.

Ответ: 13 950.

733. Для 5 литров вишнёвого компота необходимо $5 : 0,7 = 7\frac{5}{7}$ банок ёмкостью 700 мл. Значит, можно полностью заполнить 7 банок. Для 9 литров

абрикосового компота необходимо $9 : 0,7 = 12\frac{6}{7}$ банок ёмкость 700 мл.

Значит, можно полностью заполнить 12 банок. Итого: $7 + 12 = 19$.

Ответ: 19.

734. $50 : 6,8 = 7,35$. Наибольшее число круассанов равно 7.

Ответ: 7.

735. Составим таблицу выбора тарифного плана.

	Повременный	Комбинированный	Безли- митный
Абонентская плата	100 руб.	250 руб.	330 руб.
600 минут	$600 \cdot 0,4 = 240$ (руб)	$(600 - 480) \cdot 0,3 = 36$ (руб)	0 руб.
Итого:	$100 + 240 = 340$ (руб)	$250 + 36 = 286$ (руб)	330 руб.

Из таблицы следует, что наиболее выгодным для запланированных 600 минут разговоров в месяц является тарифный план «Комбинированный». По этому тарифному плану за 500 минут разговоров будет выплачено $250 + 0,3 \cdot (500 - 480) = 256$ (руб).

Ответ: 256.

736. Всего $53 + 48 = 101$ (яйцо). $101 : 19 = 5\frac{6}{19}$. Необходимо 6 инкубаторов.

Ответ: 6.

737. Составим таблицу выбора тарифного плана.

Тарифный план	Абонентская плата (руб)	Плата за трафик (руб)	Итого (руб):
План «0»	0	$3 \cdot 700 = 2100$	2100
План «400»	500 руб. за 400 Мб трафика	$2 \cdot (700 - 400) = 600$	1100
План «800»	750 руб. за 800 Мб трафика	0	750

Из таблицы следует, что наиболее выгодным для запланированных 700 Мб трафика в месяц является тарифный план «План «800»». По этому тарифному плану за 600 Мб трафика пользователь заплатит 750 рублей.

Ответ: 750.

738. Поездка на поезде стоит: $830 \cdot 4 = 3\,320$ (руб).

Поездка на машине стоит: $9 \cdot \frac{1\,600}{100} \cdot 21,3 = 9 \cdot 16 \cdot 21,3 = 3\,067,2$ (руб).

Ответ: 3 067,2.

739. За 7 занятий без абонеента Саша заплатила бы $320 \cdot 7 = 2\,240$, значит, она сэкономила $2\,240 - 1\,870 = 370$ рублей.

Ответ: 370.

740. А: $6,5 \cdot 15 \cdot 16 + 3\,670 \cdot 2 = 8\,900$.

Б: $9,6 \cdot 20 \cdot 15 + 3\,200 \cdot 2 = 9\,280$.

В: $13,2 \cdot 15 \cdot 15 + 3\,250 \cdot 2 = 9\,470$.

Ответ: 8 900.

741. Стоимость одного билета равна 300 рублей. Билет студента художественного училища стоит $0,4 \cdot 300 = 120$ рублей; 52 таких билета стоят $52 \cdot 120 = 6\,240$ рублей. Тогда остальные билеты стоят $(73 - 52) \cdot 300 = 6\,300$ рублей. Значит, в кассе должно быть $6\,240 + 6\,300 = 12\,540$ рублей.

Ответ: 12 540.

742. Всего требуется заказать $50 \cdot 0,3 = 15$ (м²) стекла. Заполним таблицу:

Фирма	Цена 15 м ² стекла (руб.)	Резка и шлифовка 50 стёкол (руб.)	Итого (руб.)
А	$380 \cdot 15 = 5\,700$	$50 \cdot 81 = 4\,050$	9 750
Б	$410 \cdot 15 = 6\,150$	$50 \cdot 78 = 3\,900$	10 050
В	$415 \cdot 15 = 6\,225$	$50 \cdot 73 = 3\,650$	9 875

Самый дешёвый заказ будет стоить 9 750 рублей.

Ответ: 9 750.

743. Определим время (в часах), которое потребуется на дорогу с использованием разных видов транспорта.

Автобус: $\frac{1}{6} + 2\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{27}{12} + \frac{4}{12} = 2\frac{3}{4} = 2,75$ часа.

Электричка: $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2,25$ часа.

Маршрутное такси: $\frac{1}{4} + 1\frac{5}{6} + \frac{5}{12} = \frac{3}{12} + \frac{22}{12} + \frac{5}{12} = \frac{30}{12} = 2,5$ часа.

Наименьшее время равно 2,25 часа.

Ответ: 2,25.

744. Три лимона стоят $7 \cdot 3 = 21$ рубль. Но за эти деньги по акции можно купить 4 лимона. Так как $100 : 21 = 4\frac{16}{21}$, то за $21 \cdot 4 = 84$ рубля можно купить $4 \cdot 4 = 16$ лимонов и ещё останется $100 - 84 = 16$ рублей за которые можно купить ещё 2 лимона. Таким образом, всего можно купить 18 лимонов.

Ответ: 18.

745. На 8 недель понадобится $700 \cdot 8 = 5600$ листов бумаги. Учитывая, что в одной пачке 250 листов и $5600 : 250 = 22,4$, то надо купить 23 пачки.

Ответ: 23.

746. Определим стоимость указанного набора продуктов в каждом городе.

Ростов-на-Дону: $15 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 290 \cdot 2 = 730$ (руб.)

Краснодар: $14 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 270 \cdot 2 = 718$ (руб.)

Ставрополь: $17 \cdot 2 + 45 \cdot 3 + 280 \cdot 2 = 729$ (руб.)

Стоимость самого дешёвого набора составляет 718 рублей.

Ответ: 718.

747. На 15 дней понадобится $183 \cdot 15 = 2745$ пачек сахара. Учитывая, что в одной упаковке 16 пачек и $2745 : 16 = 171,5625$, то надо купить 172 упаковки.

Ответ: 172.

748. Покупатель может воспользоваться скидкой, поэтому стоимость покупки для него составит $100\% - 15\% = 85\%$ от базовой. Таким образом,

покупатель заплатит $40 \cdot 16 \cdot \frac{85}{100} = 544$ рубля.

Ответ: 544.

749. Разговор стоил $67 - 10 = 57$ (рублей), следовательно, длился

$\frac{57}{1,5} = 38$ (минут).

Ответ: 38.

750. Стоимость использования первого автомобиля $7 \cdot 8 \cdot 20 + 2800 = 3920$ (рублей);

второго — $7 \cdot 11 \cdot 25 + 2500 = 4425$ (рублей);

третьего — $7 \cdot 15 \cdot 17 + 2600 = 4385$ (рублей).

Самый дешёвый вариант составит 3920 рублей.

Ответ: 3920.

751. После наценки один чайник стал стоить

$420 \cdot 1,25 = 525$ (руб.), $3400 : 525 = 6\frac{10}{21}$. Значит, за эти деньги можно

купить 6 чайников.

Ответ: 6.

752. В связи с тем, что наценка на один набор составляет 50% и продаётся набор по цене 90 рублей, его закупочная цена составляет $\frac{90 \cdot 100}{150} = 60$ (рублей). $4300 : 60 = 71\frac{2}{3}$. Следовательно, хозяин магазина может закупить только 71 набор.

Ответ: 71.

753. Составим таблицу.

Авто-мобиль	Расход топлива на 1200 км (л)	Стоимость топлива (руб.)	Стоимость аренды (руб.)	Итого (руб.)
А	$12 \cdot 9 = 108$	$108 \cdot 21 = 2268$	$3300 \cdot 2 = 6600$	8868
Б	$12 \cdot 12 = 144$	$144 \cdot 22 = 3168$	$3100 \cdot 2 = 6200$	9368
В	$12 \cdot 15 = 180$	$180 \cdot 17 = 3060$	$3000 \cdot 2 = 6000$	9060

Ответ: 8868.

754. Так как $\frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$, то наименьшее достаточное число палаток — это 9.

Ответ: 9.

755. Перевозка А: нужно $\left\lceil \frac{49}{4,5} \right\rceil = 11$ автомобилей, стоимость

$11 \cdot 18 \cdot 3800 = 752\,400$ (руб.). (Через $\left\lceil \frac{49}{4,5} \right\rceil$ обозначено ближайшее целое число, большее $\frac{49}{4,5}$.)

Перевозка Б: нужно $\left\lceil \frac{49}{7} \right\rceil = 7$ автомобилей, стоимость

$7 \cdot 18 \cdot 6400 = 806\,400$ (руб.).

Перевозка В: нужно $\left\lceil \frac{49}{9} \right\rceil = 6$ автомобилей, стоимость

$6 \cdot 18 \cdot 7200 = 777\,600$ (руб.).

Самая дешёвая перевозка — 752 400 рублей.

Ответ: 752 400.

756. В одном километре $\frac{1}{1,6}$ мили, поэтому искомое значение скорости в

милях равно $\frac{40}{1,6} = 25$.

Ответ: 25.

757. На первом этаже находятся квартиры с 1-й по 5-ую, на втором — с 6-й по 10-ую и т. д. Квартиры с 36-й по 40-ую находятся на восьмом этаже.

Ответ: 8.

758. Поезд находится в пути вечером $24 \text{ ч} - 21 \text{ ч } 40 \text{ мин} = 2 \text{ ч } 20 \text{ мин}$, а утром ещё $5 \text{ ч } 10 \text{ мин}$. Всего будет потрачено времени $2 \text{ ч } 20 \text{ мин} + 5 \text{ ч } 10 \text{ мин} = 7 \text{ ч } 30 \text{ мин} = 7,5 \text{ ч}$.

Ответ: 7,5.

759. Так как $\frac{250}{20} = 12,5$, то наибольшее нечётное число — это 11.

Ответ: 11.

760. Так как $\frac{50}{6,3} = 7\frac{59}{63}$, то можно купить максимум 7 сырков.

Ответ: 7.

761. На три недели потребуется $800 \cdot 3 = 2400$ листов, то есть $\frac{2400}{500} = 4,8$ пачек бумаги. Поэтому необходимо купить 5 пачек.

Ответ: 5.

762. Поездом: $3 \cdot 1120 = 3360$ рублей,
автомобилем: $12 \cdot 9 \cdot 30 = 3240$ рублей.

Наиболее дешёвая поездка — 3240 рублей.

Ответ: 3240.

763. Всего в лагере $150 + 19 = 169$ человек. Так как $\frac{169}{35} = 4\frac{29}{35}$, то требуется 5 автобусов.

Ответ: 5.

764. Стоимость услуги фирмы А: $12 \cdot 80 = 960$ (руб.);

фирмы Б: $150 + (80 - 20) \cdot 14 = 990$ (руб.);

фирмы В: $50 + 50 + 65 \cdot 13 = 945$ (руб.).

Самая дешёвая поездка обойдётся в 945 рублей.

Ответ: 945.

765. На 19 кг вишни требуется $19 \cdot 1,5 = 28,5$ кг сахара. Поэтому нужно купить 29 килограммовых упаковок.

Ответ: 29.

766. Грузовик будет в пути $\frac{75}{28}$ ч, легковой автомобиль — $\frac{145}{58} = 2,5$ (ч) и

автобус — $\frac{96,8}{44} = 2,2$ часа. Т.к. $\frac{75}{28} > 2,2$, то автобус находился в пути наименьшее время $2,2 \text{ часа} = 132 \text{ мин.}$

Ответ: 132.

767. Всего на теплоходе $860 + 33 = 899$ человек. Так как $\frac{899}{60} = 14\frac{59}{60}$, то требуется 15 шлюпок.

Ответ: 15.

768. Стоимость фундамента из пеноблоков: $7 \cdot 2900 + 3 \cdot 280 = 21\,140$ (руб.).

Стоимость бетонного фундамента: $6 \cdot 750 + 50 \cdot 280 = 18\,500$ (руб.).

То есть наиболее дешёвый вариант составит 18 500 (руб.).

Ответ: 18 500.

769. В одном подъезде $12 \cdot 3 = 36$ квартир. В первом подъезде находятся квартиры с 1-й по 36-ую, во втором — с 37-й по 72-ую, в третьем — с 73-й по 108-ую, в четвёртом — с 109-й по 144-ую. Так как $128 - 109 = 19$ и первые 18 квартир четвёртого подъезда находятся на первых шести этажах, то Маша живёт на 7-м этаже.

Ответ: 7.

770. Оплата в месяц при повременном тарифном плане:

$150 + 0,4 \cdot 800 = 470$ (руб.),

при комбинированном: $250 + 300 \cdot 0,3 = 340$ (руб.),

при безлимитном: 400 (руб.).

Оплата при наиболее выгодном тарифе составит 340 (руб.).

Ответ: 340.

771. Вариант с покупкой цветной пряжи обойдётся в $\frac{300}{60} \cdot 70 = 350$ (руб.),

вариант с покупкой неокрашенной пряжи с последующей её окраской

обойдётся в $\frac{300}{50} \cdot 40 + \frac{300}{100} \cdot 30 = 330$ (руб.), наиболее дешёвый вариант

обойдётся в 330 рублей.

Ответ: 330.

772. Сумма вклада в банке А составит $(20\,000 - 150) \cdot 1,04 = 20\,644$ (руб.),

в банке Б: $20\,000 \cdot 1,02 = 20\,400$ (руб.),

а в банке В: $(20\,000 - 12 \cdot 10) \cdot 1,03 = 20\,476,4$ (руб.),

то есть в банке А вклад окажется наибольшим и составит 20 644 рубля.

Ответ: 20 644.

773. Скидка первого типа может составить $420 \cdot 0,3 = 126$ (рублей);

второго типа — $280 \cdot 0,15 = 42$ (рубля);

третьего типа — $460 \cdot 0,25 = 115$ (рублей).

То есть наиболее выгодной окажется первая скидка, при этом клиент заплатит $420 + 280 + 460 - 126 = 1034$ (рубля).

Ответ: 1034.

774. В случае выбора тарифного плана «Вера» клиент заплатит $2000 + 5 \cdot 100 = 2500$ (рублей);

в случае выбора «Надежды» — $600 + 3 \cdot 700 = 2700$ (рублей);

в случае выбора «Любви» — $50 + 2,5 \cdot 950 = 2425$ (рублей).

Разница между самым дорогим и наиболее выгодным тарифным планом составит $(2700 - 2425)$ рублей = 0,275 тыс. рублей.

Ответ: 0,275.

775. Найдём, какой тарифный план выбрал абонент. Стоимость 700 минут разговора при выборе тарифного плана Super составит $60 + 350 = 410$ (рублей), Extra — $320 + 80 = 400$ (рублей), Super Extra — 420 (рублей), то есть он выбрал Extra и заплатил 320 рублей. При тарифном плане Super 500 минут стоили бы $60 + 250 = 310$ (рублей), Super Extra — 420 (рублей). Переплата составила $(320 - 310) = 10$ (рублей).

Ответ: 10.

776. Всего требуется $0,5 \cdot 5 \cdot 9 = 22,5$ г лекарства. В одной упаковке $0,5 \cdot 10 = 5$ г лекарства. Так как $\frac{22,5}{5} = 4,5$, то требуется 5 упаковок.

Ответ: 5.

777. Время движения одного поезда через пункт C — $\frac{105}{70} = 1,5$ (ч) =

= 90 (мин), через B — $\frac{60}{60} = 1$ ч = 60 (мин), без промежуточных пунк-

тов — $\frac{150}{90} = \frac{5}{3}$ (ч) = 100 (мин). Минимальное время очевидно составит

90 минут, если два поезда поедут через B с интервалом 20 минут за 80 мин и один через C — за 90 мин. Если хотя бы один поезд поедет по дороге без остановок, то это займёт не менее 100 минут. Если хотя бы два поезда едут через C , то общее время будет не меньше, чем 110 минут.

Ответ: 1,5.

778. Найдём стоимость наиболее дешёвой поездки от Ростова-на-Дону до Москвы. На поезде эта поездка стоила бы $1400 \cdot 2 + 1400 \cdot 0,9 \cdot 2 = 5320$ (руб.), а на самолёте — $1320 \cdot 4 = 5280$ (руб.). То есть наиболее дешёвый вариант составит 5280 рублей. От Москвы до Санкт-Петербурга дешевле ехать поездом, что составит $820 \cdot 2 + 820 \cdot 0,9 \cdot 2 = 3116$ (руб.). При этом в метро надо заплатить $27 \cdot 4 = 108$ (руб.). То есть стоимость

дороги: сначала самолётом до Москвы, потом до Санкт-Петербурга поездом равно $5280 + 108 + 3116 = 8504$ (руб.), сначала поездом до Москвы, потом до Санкт-Петербурга поездом $5320 + 3116 = 8436$ (руб.). Поэтому дешевле весь маршрут преодолевать с помощью поезда, что обойдётся в 8436 рублей.

Ответ: 8436.

779. Услуга «Счастье» позволит сэкономить $0,15 \cdot 450 - 50 = 17,5$ (руб.), услуга «Вызов свободе» $(700 \cdot 0,08 - 120) = -64$, то есть подключать её невыгодно. Услуга «Паук» позволит сэкономить $500 \cdot 0,2 - 60 = 40$ (руб.), то есть выгодно подключать услуги «Счастье» и «Паук», что позволит сэкономить $40 + 17,5 = 57,5$ (руб.).

Ответ: 57,5.

780. Расход электроэнергии за май составил $8124 - 7381 = 743$ киловатт-час. Заплатить нужно $2,6 \cdot 743 = 1931,8$ рубля.

Ответ: 1931,8.

781. «Мечта»: $5 \cdot 33 + 4 \cdot 42 + 7 \cdot 128 = 1229$ (руб.).

«Правда»: $5 \cdot 29 + 4 \cdot 44 + 7 \cdot 130 = 1231$ (руб.).

«Здоровый дух»: $5 \cdot 36 + 4 \cdot 46 + 7 \cdot 124 = 1232$ (руб.).

Стоимость наиболее дешёвой покупки составит 1229 рублей.

Ответ: 1229.

782. Покупка стоит $3,3 \cdot 40 = 132$ рубля, сдача составляет $1000 - 132 = 868$ рублей.

Ответ: 868.

783. «Браво»: $5600 \cdot 0,07 = 392$ (руб.).

«Вау»: $5300 \cdot 0,12 = 636$ (руб.).

«Супер»: $4800 \cdot 0,11 = 528$ (руб.).

«Классик»: $5200 \cdot 0,09 = 468$ (руб.).

Наиболее выгодна для магазина продажа пиджака «Вау». Доход магазина от его продажи составит 636 рублей.

Ответ: 636.

784. Диагональ равна $\frac{63,5}{2,54} = 25$ (дюймов).

Ответ: 25.

785. Надо приобрести $\frac{3000}{4} = 750$ (кирпичей). Определим стоимость покупки с доставкой во всех трёх фирмах.

Строитель: $17,5 \cdot 750 = 13\,125$ (руб.).

Атлант: $16 \cdot 750 + 1500 \cdot 0,5 = 12\,750$ (руб.).

Титан: $15,5 \cdot 750 + 1200 = 12\,825$ (руб.).

Стоимость наиболее дешёвого заказа составит 12 750 рублей.

Ответ: 12 750.

786. При покупке билетов по отдельности было бы потрачено $400 \cdot 13 = 5200$ рублей. Экономия составила $5200 - 4500 = 700$ рублей.

Ответ: 700.

787. «Маятник»: $600 \cdot 0,38 = 228$ (руб.), «Подобие»: $150 + (600 - 350) \cdot 0,26 = 215$ (руб.), «Болтун»: 250 (руб.). Самый дешёвый вариант составит 215 рублей.

Ответ: 215.

788. Больному требуется $0,6 \cdot 42 = 25,2$ граммов лекарства. В одной упаковке $0,2 \cdot 12 = 2,4$ грамма лекарства. $\frac{25,2}{2,4} = 10,5$, поэтому необходимо 11 упаковок.

Ответ: 11.

789. Аренда «А»: $16 \cdot 5 \cdot 17,8 + 3400 = 4824$ (руб.),

аренда «Б»: $16 \cdot 9 \cdot 26,5 + 1100 = 4916$ (руб.),

аренда «В»: $16 \cdot 12 \cdot 14 + 2100 = 4788$ (руб.).

Самый дешёвый вариант составит 4788 рублей.

Ответ: 4788.

790. $2,98 \cdot 201 = 598,98 < 600$; $2,98 \cdot 202 = 601,96 > 600$. Таким образом, наибольшее количество тетрадей, которое можно купить на 600 рублей, равно 201.

Ответ: 201.

791. В первой фирме потребуется 17 автомобилей, и стоимость составит $4100 \cdot 17 \cdot 8 = 557\,600$ (руб.), во второй — 7 автомобилей, стоимость составит $9300 \cdot 7 \cdot 8 = 520\,800$ (руб.), в третьей — $8300 \cdot 8 \cdot 8 = 531\,200$ (руб.). Самый дешёвый вариант обойдётся в 520 800 рублей.

Ответ: 520 800.

792. Отдав $6 \cdot 80 = 480$ рублей, покупатель заплатит за три пары роз и по специальному предложению получит ещё три. Таким образом, всего можно получить $6 + 3 = 9$ роз.

Ответ: 9.

793. Билет для школьника стоит $800 \cdot \frac{60}{100} = 480$ рублей. Билеты для всей группы стоят $480 \cdot 16 + 800 \cdot 2 = 9280$ рублей.

Ответ: 9280.

794. Грузовик: $\frac{77 + 79}{48} = 3,25$ (часа). Автобус: $\frac{99 + 99}{55} = 3,6$ (часа). Легковой автомобиль: $\frac{270}{82} = 3\frac{12}{41}$ (часа). Быстрее всех доберётся грузовик — за 3,25 часа.

Ответ: 3,25.

795. В день нужно $0,4 \cdot 143 = 57,2$ кг риса, а на 8 дней требуется $57,2 \cdot 8 = 457,6$ кг риса. Понадобится 458 пачек.

Ответ: 458.

796. В первом банке: $4,23 \cdot 120 = 507,6$ (руб.).

Во втором банке: $\frac{164}{40} \cdot 120 = 492$ (руб.).

В третьем банке: $\frac{122,4}{30} \cdot 4 = 489,6$ (руб.).

Наименьшая сумма, которую придётся заплатить за 120 гривен, составит 489,6 рублей.

Ответ: 489,6.

797. Василий Петрович: $\frac{78}{63}$ (Мб/с), Василий Егорович: $\frac{79}{64}$ (Мб/с), Васи-

лий Васильевич: $\frac{77}{62}$ (Мб/с). Наибольшая скорость у Василия Василье-

вича. $462 : \frac{77}{62} = 372$ с.

Ответ: 372.

798. По старому тарифу: $4,5 \cdot 120 \cdot 12 = 6480$ (руб.). По новому тарифу: $(1,3 \cdot 180 + 3,2 \cdot 79) \cdot 12 = 5841,6$ (руб.). Переплата составила бы $6480 - 5841,6 = 638,4$ (руб.).

Ответ: 638,4.

799. Поездом: $3 \cdot 1360 = 4080$ (руб.),

на своей машине: $\frac{1700}{100} \cdot 9 \cdot 26,5 = 4054,5$ (руб.).

Самый дешёвый вариант составит 4054,5 рубля.

Ответ: 4054,5.

800. За 21 рабочий день расходуется $230 \cdot 21 = 4830$ листов. $\frac{4830}{500} = 9,66$,

поэтому нужно купить 10 пачек бумаги.

Ответ: 10.

801. Бетонный: $3 \cdot 750 + 30 \cdot 260 = 10\,050$ (руб.);

из пеноблоков: $4,5 \cdot 2200 + 2 \cdot 260 = 10\,420$ (руб.).

Самый дешёвый вариант составит 10 050 рублей.

Ответ: 10 050.

802. Определим стоимость заказа такси для данной поездки для каждой из трёх фирм.

«С ветерком»: $100 + 9 \cdot 50 = 550$ (руб.).

«В путь»: $150 + (50 - 15) \cdot 11 = 535$ (руб.).

«В дорогу»: $50 + 150 + (50 - 15) \cdot 10 = 550$ (руб.).

Таким образом заказ такси в фирме «В путь» обойдётся дешевле, чем в других фирмах, и будет стоить 535 рублей.

Ответ: 535.

803. В одном подъезде $7 \cdot 4 = 28$ квартир. В первом подъезде квартиры с номерами от 1 до 28, во втором — от 29 до 56, в третьем — от 57 до 84. Джек живёт в третьем подъезде.

Ответ: 3.

804. Определим стоимость фундамента каждого типа.

Каменный: $1220 \cdot 10 + 240 \cdot 12 = 15\,080$ (руб.).

Бетонный: $680 \cdot 6 + 240 \cdot 46 = 15\,120$ (руб.).

Наиболее дешёвый вариант составит 15 080 рублей.

Ответ: 15 080.

805. 1. $S_{ABC} = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot r$, с другой стороны $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin \angle C$,

$\frac{1}{2}P_{ABC} \cdot r = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin \angle C$, по условию $r = 1$, $AC = 5$, $\sin \angle C = 0,6$,

поэтому $P_{ABC} = 5 \cdot 0,6 \cdot BC$, $P_{ABC} = 3BC$ (см. рис. 34).

2. Так как $AB < AC$, то $\angle C < \angle B$. Это означает, что $\angle C$ острый. Следовательно, $\cos \angle C > 0$.

$$\cos \angle C = \sqrt{1 - \sin^2 \angle C} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

3. Выразим сторону AB через BC . По теореме косинусов $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C$, $AB = \sqrt{BC^2 + 25 - 8BC}$.

4. $P_{ABC} = AB + BC + AC$, $P_{ABC} = \sqrt{BC^2 + 25 - 8BC} + BC + 5$, по доказанному $P_{ABC} = 3BC$. Пусть a — длина стороны BC , $a > 0$, тогда найдем a из уравнения:

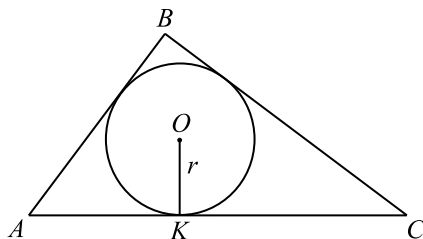


Рис. 34.

$$(1) \sqrt{a^2 + 25 - 8a} + a + 5 = 3a \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 25 - 8a} = 2a - 5 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + 25 - 8a = (2a - 5)^2, \\ 2a - 5 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 3a^2 - 12a = 0, \\ a \geq 2,5; \end{cases} \Rightarrow a = 4.$$

$a = 4$ — корень уравнения (1). $BC = 4$.

Ответ: 4.

806. Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный, $\angle B = 30^\circ$, точка O — центр описанной окружности около $\triangle ABC$, AD — диаметр, $r = AO = = 7\sqrt{2}$.

Найти: диаметр окружности, описанной около $\triangle AEC$.

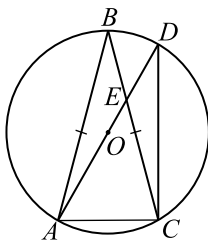


Рис. 35.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 35).

- $\triangle ABC$ — равнобедренный, $\angle B = 30^\circ$, $\angle A = \angle C = 75^\circ$.
- Вписанные углы $\angle ABC$ и $\angle ADC$ опираются на одну и ту же дугу AC , поэтому $\angle ADC = \angle ABC = 30^\circ$.
- $\angle ACD = 90^\circ$. $\triangle ACD$ — прямоугольный, $AC = \frac{1}{2}AD = 7\sqrt{2}$, так как $\angle ADC = 30^\circ$.

4. $\triangle AEC$: $\angle EAC = 60^\circ$, $\angle ECA = 75^\circ$, тогда $\angle AEC = 45^\circ$. Стороны AE и EC найдем по теореме синусов.

$$\frac{AE}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle E} = \frac{EC}{\sin \angle A}.$$

$$AE = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 7\sqrt{2} \cdot \sin 75^\circ \cdot \sqrt{2} = 14 \sin 75^\circ.$$

$$EC = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{3}.$$

$$S_{AEC} = \frac{1}{2} AE \cdot AC \cdot \sin \angle EAC, S_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot 14 \sin 75^\circ \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ = \frac{49\sqrt{6}}{2} \sin 75^\circ. d — диаметр окружности, описанной около $\triangle AEC$.$$

$$d = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot S_{AEC}}, \text{ где } a, b, c — \text{длины сторон } \triangle AEC.$$

$$d = \frac{7\sqrt{2} \cdot 14 \sin 75^\circ \cdot 7\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{49\sqrt{6}}{2} \sin 75^\circ} = 14.$$

Ответ: 14.

807. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с основанием AC , O — центр его вписанной окружности, T, K, H — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, AC соответственно (см. рис. 36), радиус вписанной окружности треугольника ABC равен r , а описанной — R . Так как отрезки касательных равны, то $HC = KC$, $HA = AT$, $BT = BK$. Пусть $KC = AT = AH = HC = 2x$, $BK = BT = 3x$, $AB = BC = 5x$. Тогда $BH = \sqrt{(5x)^2 - (2x)^2} = \sqrt{21}x$.

Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{21}x \cdot 4x = 2\sqrt{21}x^2$.

С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BC + CA) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4x = 105x$,

$$105x = 2\sqrt{21}x^2, x = \frac{15\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = 2,5\sqrt{21}.$$

$$\text{По теореме синусов } R = \frac{AB}{2 \sin \angle ACB} = \frac{AB}{2 \frac{BH}{BC}} =$$

$$= \frac{25x^2}{2\sqrt{21}x} = x \cdot \frac{25}{2\sqrt{21}} = \frac{5\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{25}{2\sqrt{21}} = \frac{125}{4}. \text{ Длина окружности, опи-}$$

санной около треугольника ABC , равна $2\pi R = \frac{125\pi}{2} = 62,5\pi$. Таким образом, длина окружности, описанной около данного треугольника, превосходит число π в 62,5 раза.

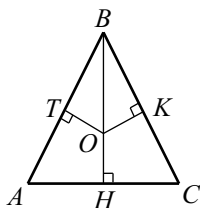


Рис. 36.

Ответ: 62,5.

808. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с основанием AC , O — центр его вписанной окружности, T , K , H — точки касания вписанной окружности со сторонами AB , BC , AC соответственно (см. рис. 37), а радиус вписанной окружности треугольника ABC равен r . Так как отрезки касательных равны, то $HC = KC$, $HA = AT$, $BT = BK$. Пусть $KC = AT = AH = HC = 2x$, $BK = BT = 5x$, $AB = BC = 7x$. Тогда $BH = \sqrt{(7x)^2 - (2x)^2} = 3\sqrt{5}x$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5}x \cdot 4x = 6\sqrt{5}x^2$. С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BC + CA) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 18x = 18\sqrt{5}x$, $18\sqrt{5}x = 6\sqrt{5}x^2$, $x = 3$, $AB = BC = 7x = 21$.

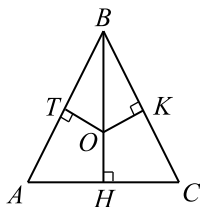


Рис. 37.

Ответ: 21.

809. Так как вершины треугольника (см. рис. 38), делят окружность в отношении $1 : 2 : 3$, то в $\triangle ABC$ $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Так как $OA = \sqrt{2}$, то $AC = 2\sqrt{2}$; $AB = \sqrt{2}$; $BC = \sqrt{6}$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Если сторона правильного треугольника равна a , то его площадь

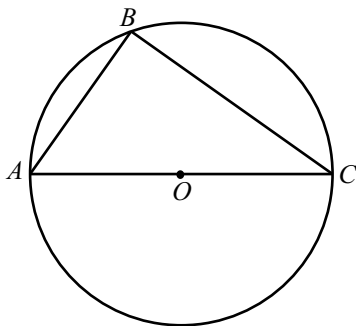


Рис. 38.

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Учитывая предыдущую запись $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, $a^2 = 4$, $a = 2$.

Отсюда $a^2 = 4$; $a = 2$.

Ответ: 2.

810. Пусть $DA = 9x$, $AB = 4x$, $CB = 5x$ (см. рис. 39), тогда $DC + AB = DA + CB = 14x$, откуда $DC = 10x$.

Периметр $P = DC + CB + AB + DA = 28x$, значит, $x = \frac{98}{28} = 3,5$.

Большая сторона $DC = 10x = 35$.

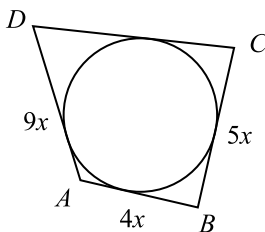


Рис. 39.

Ответ: 35.

811. Пусть $\angle D = 3x$, $\angle C = 2x$, $\angle B = 7x$ (см. рис. 40), $\angle D + \angle B = 180^\circ$, откуда $10x = 180^\circ$, $x = 18^\circ$. $\angle C + \angle A = \angle B + \angle D$, значит, $\angle A = 8x$, тогда $\angle A = 8 \cdot 18^\circ = 144^\circ$.

Ответ: 144.

812. В треугольнике ABC (см. рис. 41) $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$. Радиус вписанной окруж-

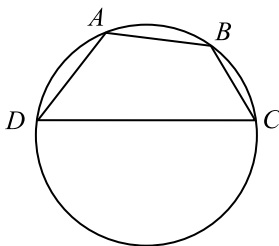


Рис. 40.

ности $r = \frac{AC + CB - AB}{2} = 2$.

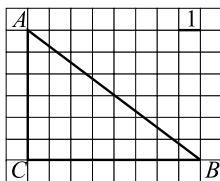


Рис. 41.

Ответ: 2.

813. Окружность вписана в четырёхугольник $ABCD$ (см. рис. 42), $AB + CD = BC + AD$, $17 + 22 = 14 + AD$, $AD = 25$.

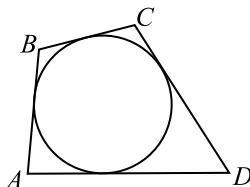


Рис. 42.

Ответ: 25.

814. $\angle CBD = \angle CAD$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу.
 $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = \angle ABC - \angle CAD = 125^\circ - 55^\circ = 70^\circ$.

Ответ: 70.

815. Пусть сторона равностороннего треугольника равна a , тогда $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 8$, откуда $a = 8\sqrt{3}$. Высота h равна $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 12$.

Ответ: 12.

816. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC$ (см. рис. 43). $AC \cdot BC = 48$. Пусть $BC = a$, тогда $AC = \frac{48}{a}$; $P = AB + BC + AC = 24$; $AB = 24 - a - \frac{48}{a}$. С другой стороны, по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$;

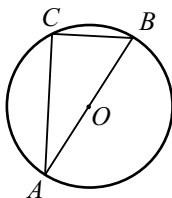


Рис. 43.

$$\left(24 - a - \frac{48}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{48^2}{a^2}; a^2 - 14a + 48 = 0; a_1 = 6; a_2 = 8.$$

Таким образом, либо $AC = 6$, тогда $BC = 8$, либо $AC = 8$, тогда $BC = 6$. В любом случае гипотенуза $AB = 10$. $AO = \frac{1}{2}AB = 5$.

Ответ: 5.

817. $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (по 2 углам) (см. рис. 44). $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$,
 $AB^2 = AD \cdot AC = 4 \cdot 9$, $AB = 6$.

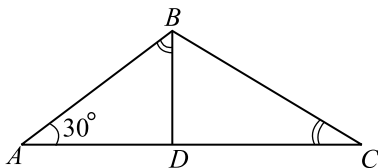


Рис. 44.

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Ответ: 6.

818. Так как расстояние $MN = MP$, то $M \in$ биссектрисе $\angle B$ (см. рис. 45). $\triangle ABC$ — равнобедренный, то биссектриса совпадает с высотой (B, M, K лежат на высоте BK). Из $\triangle BMP$ имеем:
 $BM = \frac{MP}{\sin 60^\circ} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, $BK = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. Из $\triangle BKC$:

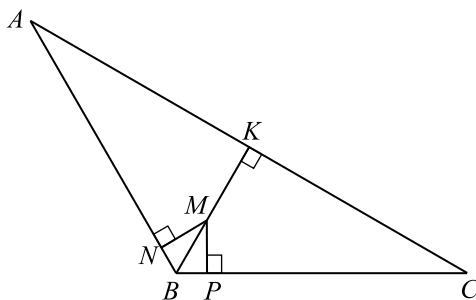


Рис. 45.

$$KC = BK \cdot \operatorname{tg} \angle 60^\circ,$$

$$KC = \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 7, AC = 2KC = 14.$$

Ответ: 14.

819. Используя условие задачи, сделаем рисунок (см. рис. 46). Из условия, что $S_{\triangle ABC} = 96$, следует $S_{BMC} = 48$,

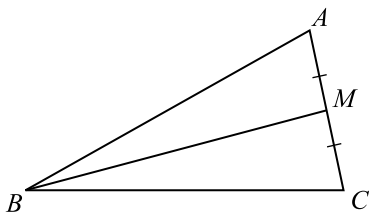


Рис. 46.

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot BC \cdot \sin \angle MBC, 48 = 6 \cdot 2\sqrt{97} \cdot \sin \angle MBC,$$

$$\sin \angle MBC = \frac{4}{6 \cdot 2\sqrt{97}} \cdot \frac{4}{\sqrt{97}};$$

$$\cos \angle MBC = \sqrt{\frac{81}{97}} = \frac{9}{\sqrt{97}}. \text{ По теореме косинусов из } \triangle BMC \text{ имеем:}$$

$$MC^2 = BM^2 + BC^2 - 2BM \cdot BC \cdot \cos \angle MBC,$$

$$MC^2 = 144 + 388 - 2 \cdot 12 \cdot 2\sqrt{97} \cdot \frac{9}{\sqrt{97}}, MC^2 = 100, MC = 10; AC = 20.$$

$$\text{Из } \triangle ABC \text{ имеем: } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin \angle C, \sin \angle C = \frac{24}{5\sqrt{97}};$$

$\cos \angle C = \pm \sqrt{1 - \frac{576}{25 \cdot 97}} = \pm \frac{43}{5\sqrt{97}}$. Из условия следует, что $BC > BM$. Значит $\angle BMC = \angle BCM$. Следовательно, $\angle BCM < 90^\circ$; $\cos \angle C = \frac{43}{5\sqrt{97}}$. Так как по условию $BC > MC$, то $\angle MBC < \angle BMC$.

Следовательно, $\angle MBC = 90^\circ$; $\cos \angle MBC = \frac{9}{27}$. По теореме косинусов из $\triangle ABC$ имеем: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle C$,
 $AB^2 = 4 \cdot 97 + 400 - 2 \cdot 2\sqrt{97} \cdot 20 \cdot \frac{43}{5\sqrt{97}} = 100$; $AB = 10$.

Ответ: 10.

820. 1. Пусть $\triangle ABC$ — данный по условию (см. рис. 47).

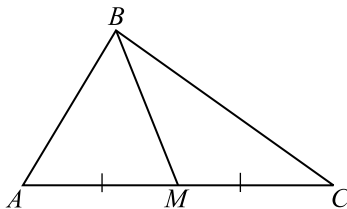


Рис. 47.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A; 96 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20 \cdot \sin \angle A,$$

$$\sin \angle A = \frac{96 \cdot 2}{10 \cdot 20} = 0,96;$$

$$\begin{aligned} \cos \angle A &= \pm \sqrt{1 - 0,96^2} = \pm \sqrt{(1 - 0,96)(1 + 0,96)} = \\ &= \pm \sqrt{0,04 \cdot 1,96} = \pm 0,2 \cdot 1,4 = \pm 0,28. \end{aligned}$$

Так как $\angle A$ — острый, то $\cos \angle A = 0,28$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ Из } \triangle ABM \text{ имеем: } BM^2 &= AB^2 + AM^2 - 2AB \cdot AM \cdot \cos \angle A, \\ BM^2 &= 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0,28; BM^2 = 144; BM = 12. \end{aligned}$$

Ответ: 12.

821. Обозначим $\frac{1}{7}AB = x$; $\frac{1}{8}BC = y$, тогда $AB = 7x$, $MB = 4x$, $BN = 3y$, $BC = 8y$ (см. рис. 48).

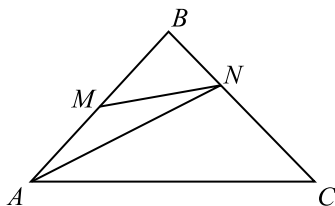


Рис. 48.

$$1. \frac{S_{ABN}}{S_{MBN}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BN \cdot \sin \angle B}{\frac{1}{2}MB \cdot BN \cdot \sin \angle B} = \frac{7}{4}.$$

Так как $S_{MBN} = S_{ABN} - S_{AMN} = S_{ABN} - 9$,

$$\text{то } \frac{S_{ABN}}{S_{ABN} - 9} = \frac{7}{4}; 4S_{ABN} = 7S_{ABN} - 63; S_{ABN} = 21, S_{BMN} = 12.$$

$$2. \frac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}BM \cdot BN \cdot \sin \angle B}{\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \angle B}; \frac{12}{S_{ABC}} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 8}; S_{ABC} = 56.$$

Ответ: 56.

822. Сделаем рисунок (рис. 49).

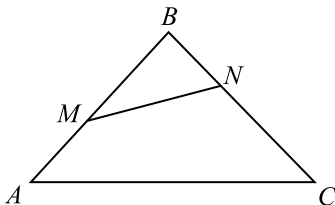


Рис. 49.

$$\begin{aligned} \text{Обозначим } \frac{1}{5}AB &= x, \frac{1}{13}BC = y, \text{ тогда } AB = 5x, BM = 3x, \\ BN &= 2y, BC = 13y. S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot 13y \cdot \sin \angle B = \\ &= \frac{65xy}{2} \sin \angle B, \end{aligned}$$

$$S_{BNM} = \frac{1}{2} BM \cdot BN \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4y \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot xy \sin \angle B,$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MBN}} = \frac{65xy \sin \angle B}{12xy \sin \angle B}, S_{MBN} = S_{ABC} \cdot \frac{12}{65} = \frac{130 \cdot 12}{65} = 24.$$

$$S_{AMNC} = 130 - 24 = 106.$$

Ответ: 106.

823. Сделаем рисунок (см. рис. 50).

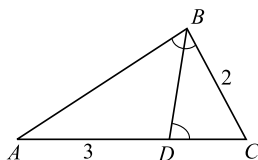


Рис. 50.

По условию $\angle ABC + \angle ADB = 180^\circ$, а углы ADB и BDC смежные, то $\angle BDC + \angle ADB = \pi$. Следовательно, $\angle ABC = \angle BDC$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ ($\angle ABC = \angle BDC$, $\angle C$ — общий). Значит, справедлива пропорция $\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$, откуда $BC^2 = AC \cdot DC$. Пусть $DC = x > 0$.

Тогда $4 = (3 + x)x$, $x^2 + 3x - 4 = 0$; $x_1 = -4$ (не удовлетворяет $y > 0$), $x_2 = 1$. Таким образом, $DC = 1$; $AC = AD + DC = 4$, применив к треугольнику ABC теорему косинусов, имеем:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC.$$

Так как $\angle ABC = \angle BDC$, то $\cos \angle ABC = \cos \angle BDC = \frac{13}{20}$. Обозначим,

$AB = y$, ($y > 0$). Получаем уравнение: $16 = y^2 + 4 - 4y \cdot \frac{13}{20}$,

$5y^2 - 13y - 60 = 0$, $y_1 = 5$, $y_2 = -2,4$ (не удовлетворяет условию $y > 0$). Значит, $AB = 5$, а периметр треугольника ABC равен $2 + 4 + 5 = 11$.

Ответ: 11.

824. $\triangle KOH \sim \triangle MOP$ (см. рис. 51) ($\angle KOH = \angle MOP$ — вертикальные;

$\angle KHO = \angle OMP$ — накрест лежащие). $\frac{HO}{OM} = \frac{KO}{OP}$, $\frac{4}{5} = \frac{KO}{OP}$, но

$$MH = KP = 9; \quad OK = \frac{4}{5}OP;$$

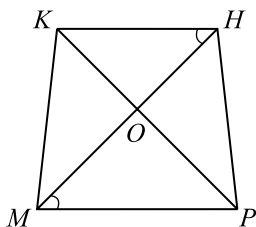


Рис. 51.

$$9 = PK = OK + OP = \frac{4}{5}OP + OP = \frac{9}{5}OP; OP = 5, KO = 4.$$

Следовательно, $MKHP$ — равнобедренная трапеция, $\frac{P_{OKM}}{P_{ONP}} = 1$.

Ответ: 1.

825. Пусть $\triangle ABC$ — данный по условию (см. рис. 52)

$OD = \frac{1}{2}AO$; $BD = \frac{1}{2}BC = 6\sqrt{5}$. Из $\triangle BOD$ имеем:

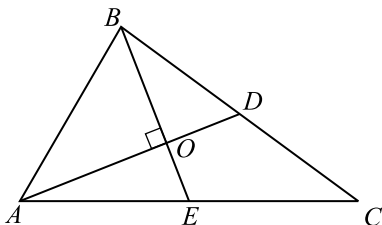


Рис. 52.

$$BD^2 = BO^2 + OD^2 = BO^2 + \frac{1}{4}AO^2. OE = \frac{1}{2}BO; AE = \frac{1}{2}AC = 15.$$

Из $\triangle AOE$ имеем: $AE^2 = AO^2 + OE^2 = AO^2 + \frac{1}{4}BO^2$.

$$\begin{cases} BD^2 = BO^2 + \frac{1}{4}AO^2, \\ AE^2 = AO^2 + \frac{1}{4}BO^2; \end{cases} \begin{cases} 180 = BO^2 + \frac{1}{4}AO^2, \\ 225 = AO^2 + \frac{1}{4}BO^2; \end{cases}$$

$$405 = (AO^2 + BO^2) + \frac{1}{4}(AO^2 + BO^2). \text{ Из } \triangle ABO \text{ имеем}$$

$AO^2 + BO^2 = AB^2$, следовательно $405 = \frac{5}{4}AB^2$, $AB^2 = 324$; $AB = 18$.

Ответ: 18.

826. Пусть $\angle CBA = \alpha$ (см. рис. 53), тогда $\angle CAB = 2\alpha$. Воспользуемся

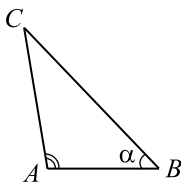


Рис. 53.

теоремой синусов для треугольника ABC : $\frac{AC}{\sin \angle CBA} = \frac{BC}{\sin \angle CAB} \Rightarrow \frac{10}{\sin \alpha} = \frac{12}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{12}{10}$; $\frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{6}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$. Далее применим теорему косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \alpha$. Обозначая $AB = x$, $x > 0$, и подставляя значения известных величин в равенство теоремы косинусов, приходим к уравнению: $100 = x^2 + 144 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{3}{5}x$; $x^2 - \frac{72}{5}x + 44 = 0$; $5x^2 - 72x + 220 = 0$; $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{22}{5}$.

Пусть $AB = 10$, тогда $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = AC$), а значит $\angle ACB = \angle CBA = \alpha$. Но, тогда из равенства

$$\angle CAB + \angle ACB + \angle CBA = 180^\circ \Rightarrow 4\alpha = 180^\circ; \alpha = 45^\circ; \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{3}{5}.$$

Получили противоречие.

Следовательно, $AB \neq 10$. Получаем $AB = \frac{22}{5} = 4,4$.

Ответ: 4,4.

827. Дано: $\triangle ABC$, $\angle B$ — тупой, BD — биссектриса, $S_{ABD} = \frac{60\sqrt{2}}{11}$,

$$S_{BDC} = \frac{50\sqrt{2}}{11}.$$

Найти: AC .

Решение. Сделаем чертеж (см. рис. 54).

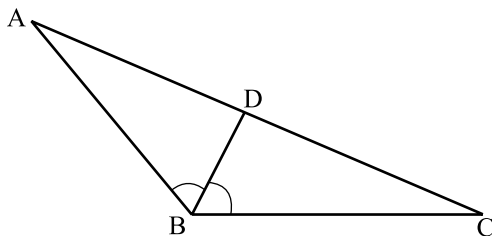


Рис. 54.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{AB \cdot BD}{BC \cdot BD} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{5}, BC = 5, \text{ значит, } AB = 6.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC, AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC =$$

$$= \frac{2 \cdot 110\sqrt{2}}{11}, \sin \angle ABC = \frac{2 \cdot 110\sqrt{2}}{11 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos \angle ABC = -\sqrt{1 - \frac{4 \cdot 2}{9}} = -\frac{1}{3}. \text{ По теореме косинусов имеем:}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC; AC^2 = 36 + 25 + 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3},$$

$$AC^2 = 81, AC = 9.$$

Ответ: 9.

828. Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$; $AC = 6$ (см. рис. 55). Обозначим через r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности.



Рис. 55.

Пусть $BC = x, x > 3$, тогда $BD = \sqrt{x^2 - 9}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$. С другой

стороны $S_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot r$. Следовательно $AC \cdot BD = P_{ABC} \cdot r$;

$$6\sqrt{x^2 - 9} = (2x + 6) \cdot 1; 36 \cdot (x^2 - 9) = 4x^2 + 24x + 36; 32x^2 - 24x - 360 = 0; 4x^2 - 3x - 45 = 0; x_1 = 3,75, x_2 = -3 \text{ — не удовлетворяет условию } x > 3.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (3,75 + 3,75 + 6) \cdot 1 = 6,75;$$

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{3,75 \cdot 3,75 \cdot 6}{4 \cdot 6,75} = 3,125.$$

Ответ: 3,125.

829. 1) В $\triangle ABB_1$ (см. рис. 56): $\angle B_1 = 90^\circ$; $AB = \sqrt{AB_1^2 + BB_1^2}$;
 $AB = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40$.

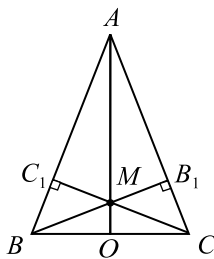


Рис. 56.

2) По условию $AB = AC$. Следовательно, $B_1C = AC - AB_1$;
 $B_1C = 40 - 24 = 16$.

3) В $\triangle BB_1C$: $\angle B_1 = 90^\circ$; $BC = \sqrt{BB_1^2 + B_1C^2}$;
 $BC = \sqrt{32^2 + 16^2} = 16\sqrt{5}$.

4) В $\triangle AOB$: $\angle O = 90^\circ$; $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2}$;
 $AO = \sqrt{40^2 - (8\sqrt{5})^2} = 16\sqrt{5}$.

5) $\triangle AOC \sim \triangle AB_1M$ ($\angle A$ — общий, $\angle O = \angle B_1 = 90^\circ$), отсюда
 $\frac{AO}{AB_1} = \frac{OC}{MB_1}$; $\frac{16\sqrt{5}}{24} = \frac{8\sqrt{5}}{MB_1}$; $MB_1 = 12$, тогда и $MC_1 = 12$.

6) $S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MC_1$; $S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 12 = 240$.

Ответ: 240.

830.1) $LP = LO + OP$ (см. рис. 57). Получаем, что $LP = 5 + 4 = 9$.

2) $\triangle MLP \sim \triangle OLB$ ($\angle L$ — общий, $\angle P = \angle B = 90^\circ$), поэтому

$$\frac{LP}{LB} = \frac{PM}{BO}, \text{ но } PM = KP; \frac{9}{LB} = \frac{KP}{BO}, \text{ отсюда } LB = \frac{9BO}{KP}.$$

3) $\triangle KOP \sim \triangle LOB$ ($\angle 1 = \angle 2$ — вертикальные, $\angle P = \angle B = 90^\circ$),

следовательно, $\frac{OP}{OB} = \frac{KP}{LB}$; $\frac{4}{OB} = \frac{KP}{LB}$, отсюда

$$LB = \frac{OB \cdot KP}{4}.$$

4) Из 2) и 3) следует, что $\frac{9BO}{KP} = \frac{OB \cdot KP}{4}$, отсюда $KP^2 = 36$; $KP = 6$.

$$\begin{aligned} 5) S_{KLO} &= S_{KLP} - S_{KOP} = \frac{1}{2} \cdot KP \cdot LP - \frac{1}{2} KP \cdot OP = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 15. \end{aligned}$$

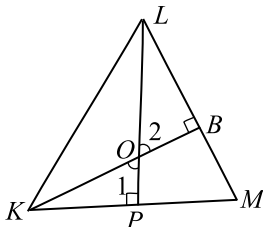


Рис. 57.

Ответ: 15.

831. Так как O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, (см. рис. 58) то прямые AM и BN являются биссектрисами углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника $\triangle ABC$.

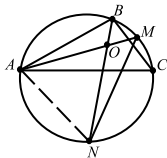


Рис. 58.

Пусть градусные меры углов $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ равны α , β и γ , соответственно. Тогда, $\angle CAN = \angle CBN = \beta/2$, как углы, опирающиеся на одну дугу. Аналогично, $\angle BNA = \angle BCA = \gamma$, $\angle MNB = \angle MAB = \alpha/2$. Из условия $AM = MN \Rightarrow \angle MAN = \angle MNA$. Выразим углы $\angle MAN$ и $\angle MNA$ через α , β , γ : $\angle MAN = \angle MAC + \angle CAN = \alpha/2 + \beta/2$, $\angle MNA = \angle MNB + \angle BNA = \alpha/2 + \gamma$. Отсюда мы имеем: $\alpha/2 + \beta/2 = \alpha/2 + \gamma$; $\beta = 2\gamma$. По условию, $\alpha = 30^\circ$, воспользовавшись соотношением $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ и равенством $\beta = 2\gamma$, получаем: $3\gamma = 150^\circ$,

$$\gamma = 50^\circ.$$

Ответ: 50.

832. $\triangle ABC$ — равнобедренный (см. рис. 59).

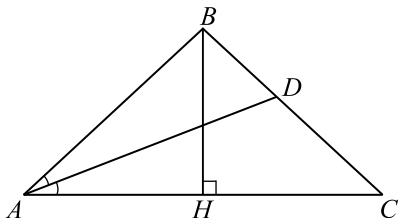


Рис. 59.

Свойство биссектрисы $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{5}{8} \Rightarrow AB = \frac{5}{8}AC$. Пусть

$AC = x, x > 0$, тогда $AB = BC = \frac{5}{8}x$. $r = \frac{S_{ABC}}{p}$, где p — полупериметр

$\triangle ABC$, то есть $p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{\frac{5}{8}x + \frac{5}{8}x + x}{2} = \frac{9}{8}x$. Пусть H

— середина стороны AC . Так как $AB = BC$, то $BH \perp AC$. Поэтому из

$\triangle ABH \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{25}{64}x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{3}{8}x$. Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{3}{16}x^2. \text{ Таким образом, } r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{3}{16}x^2}{\frac{9}{8}x} = \frac{x}{6}.$$

По условию $r = 2$, поэтому $\frac{x}{6} = 2; x = 12$.

Ответ: 12.

833. $S_{ANMB} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BN \cdot \sin \angle AON$ (см. рисунок 60).

В равнобедренном $\triangle ACB \angle C = 120^\circ$, тогда $\angle A = \angle B = 30^\circ$. AM и BN биссектрисы $\Rightarrow \angle MAB = \angle NBA = 15^\circ$, тогда $\angle AON = 30^\circ$.

$$S_{ANMB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 6,25.$$

Ответ: 6,25.

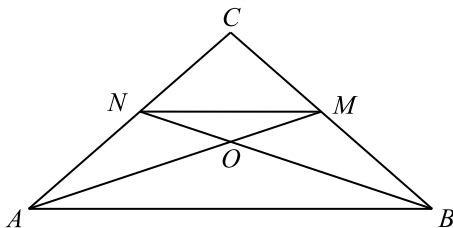


Рис. 60.

834. 1. По условию $\triangle ABC$ равнобедренный и $\angle C = 120^\circ$, следовательно $\angle BAC = \angle ABC = 30^\circ$.

2. AM и BN биссектрисы, следовательно, $\angle MAB = \angle NBA = 15^\circ$, тогда $\angle AON = 30^\circ$, как внешний угол $\triangle AOB$ (см. рис. 60).

$$3. S_{ANMB} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BN \cdot \sin \angle AON \Rightarrow AM \cdot BN = \frac{2S_{ANMB}}{\sin \angle AON} = \frac{2 \cdot 12,25}{0,5} = 49. \text{ Следовательно, } AM = BN = 7.$$

Ответ: 7.

835. Так как CD — биссектриса $\angle ACB$ (см. рис. 61), то $\frac{CB}{BD} = \frac{AC}{AD} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$. Значит, мы можем обозначить $AC = 2x$;

$AD = x, x > 0$. Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора:

$$6^2 + (3 + x)^2 = (2x)^2; \text{ или } x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Решениями этого уравнения будут: $x_1 = 5$; $x_2 = -3$. Учитывая, что $x > 0$, получаем $x = 5$. $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 6 = 15$.

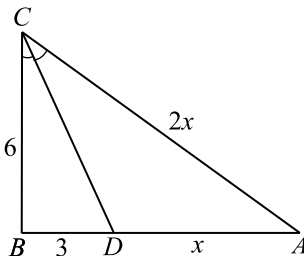


Рис. 61.

Ответ: 15.

836. Так как AD — биссектриса $\angle BAC$ (см. рис. 62), то

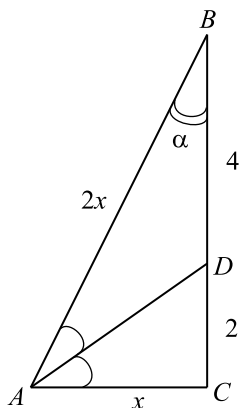


Рис. 62.

$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Поэтому можем обозначить $AB = 2x$, $AC = x$, $x > 0$. Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC$; $36 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \frac{1}{2}$.

Отсюда $x = 2\sqrt{3}$. Теперь все стороны треугольника ABC известны. По теореме, обратной теореме Пифагора, так как $(2\sqrt{3})^2 + 6^2 = (4\sqrt{3})^2$ — истинное равенство, то $\triangle ABC$ является прямоугольным и катет AC равен половине гипотенузы AB . Значит $\angle ABC = 30^\circ$.

Ответ: 30.

837. Так как треугольник ABC — остроугольный (см. рис. 63), то высота BH , опущенная на боковую сторону AC , попадает на саму сторону, а не на её продолжение. Найдём BH .

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = 300 = \frac{1}{2}25 \cdot BH$. Отсюда $BH = 24$. Из $\triangle BCH$ име-

ем теперь по теореме Пифагора: $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$. Следовательно, $AH = AC - CH = 25 - 7 = 18$. Из треугольника ABH получаем по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30.$$

Ответ: 30.

838. 1. По свойству биссектрисы угла, имеем:

$$\frac{CM}{AC} = \frac{MB}{AB}, \quad AC = \frac{CM \cdot AB}{MB} = \frac{10 \cdot 21\sqrt{2}}{14} = 15\sqrt{2} \text{ (см. рис. 64)}.$$

2. Площадь $\triangle ABC$ найдем по формуле Герона:

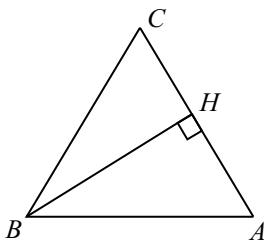


Рис. 63.

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{24 + 15\sqrt{2} + 21\sqrt{2}}{2}, S_{ABC} = \sqrt{(18\sqrt{2} + 12)(18\sqrt{2} + 12 - 24) \cdot}$$

$$\cdot \sqrt{(18\sqrt{2} + 12 - 15\sqrt{2})(18\sqrt{2} + 12 - 21\sqrt{2})} = 252.$$

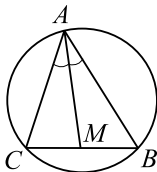


Рис. 64.

3. Из формулы площади треугольника $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ найдем радиус:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{ABC}} = \frac{24 \cdot 15\sqrt{2} \cdot 21\sqrt{2}}{4 \cdot 252} = 15.$$

Ответ: 15.

839. В координатной плоскости Oxy построим треугольник ABC (см. рис. 65).

Проведём $BH \perp AC$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH$.

Сторона AC параллельна оси ординат, $AC = 3 - (-4) = 7$.

Высота BH параллельна оси абсцисс, $BH = 2 - (-1) = 3$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = 10,5.$$

Ответ: 10,5.

840. В координатной плоскости Oxy построим треугольник ABC

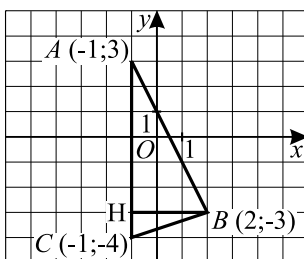


Рис. 65.

(см. рис. 66). Проведём $AH \perp BC$, тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC$.

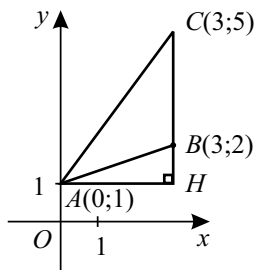


Рис. 66.

Сторона BC параллельна оси ординат, $BC = 5 - 2 = 3$.

Высота AH параллельна оси абсцисс, $AH = 3 - 0 = 3$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

841. Проведём KH — высоту к основанию.

$$KH = PK \sin \angle P = PK \sqrt{1 - \cos^2 \angle P} = 13 \sqrt{1 - \frac{105}{169}} = 13 \cdot \frac{8}{13} = 8.$$

Ответ: 8.

842. $\cos A = \frac{AC}{AB}$, $AB = 20$; $AC = AB \cdot \cos A = 20 \cdot \frac{3}{5} = 12$. BC найдём из $\triangle ABC$: $BC^2 = AB^2 - AC^2$, $BC^2 = 400 - 144 = 256$, $BC = 16$.

Ответ: 16.

$$843. \cos B = \frac{BC}{AB}, \quad \frac{4}{5} = \frac{BC}{15}, \quad BC = \frac{4 \cdot 15}{5}, \quad BC = 12. \quad AC^2 =$$

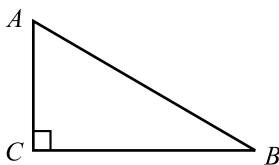


Рис. 67.

$$= AB^2 - BC^2, \quad AC^2 = 225 - 144 = 81, \quad AC = 9.$$

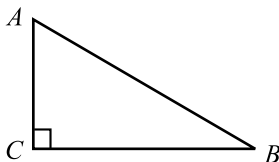


Рис. 68.

Ответ: 9.

844. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$. Тогда $\cos A = \frac{AC}{AB} = 0,6$ (см. рис. 69).

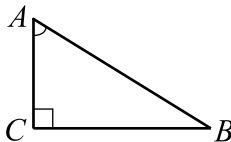


Рис. 69.

Ответ: 0,6.

845. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ (см. рис. 70). Тогда $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{21}{20} = 1,05$.

Ответ: 1,05.

846. Так как $\angle A = \angle B$, то $\triangle ABC$ равнобедренный с основанием AB ; биссектриса CH является медианой и высотой. Отсюда $AH = \frac{AB}{2} = 4$;

$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{4}$. Из прямоуголь-

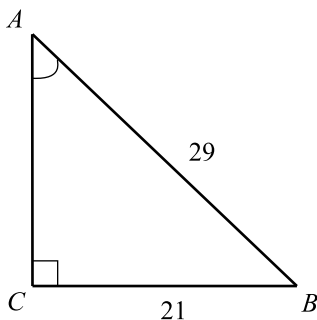


Рис. 70.

ного $\triangle AHC$: $CH = AH \operatorname{tg} A = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$.

Ответ: 3.

847. CH является медианой равнобедренного $\triangle ABC$, следовательно, и высотой. Поэтому $AB = 2AH = 2AC \cos A = 2 \cdot 10 \cdot 0,6 = 12$.

$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8$. Из $\triangle ACH$:

$$CH = AC \sin A = 10 \cdot 0,8 = 8. S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

Ответ: 48.

848. $BH = BC \sin \angle C$ (см. рис. 71).

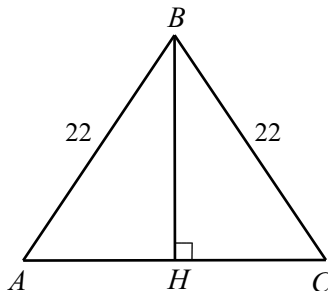


Рис. 71.

$$BH = BC \sqrt{1 - \cos^2 \angle C} = BC \sqrt{1 - \frac{96}{121}} = BC \sqrt{\frac{25}{121}} =$$

$$= BC \cdot \frac{5}{11} = 10.$$

Ответ: 10.

849. $\cos \angle A = \frac{AH}{AD}$ (см. рис. 72).

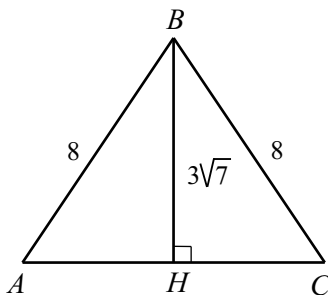


Рис. 72.

По теореме Пифагора $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{64 - 63} = 1$, откуда $\cos \angle A = \frac{1}{8} = 0,125$.

Ответ: 0,125.

850. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13 - 3^2} = 2$ (см. рис. 73). Тогда $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$.

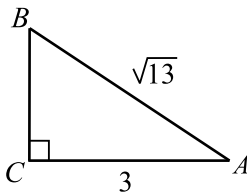


Рис. 73.

Ответ: 1,5.

851. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{27 + 3^2} = 6$ (см. рис. 74). Тогда $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

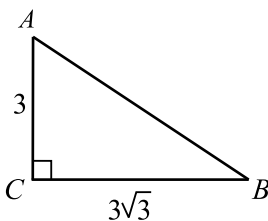


Рис. 74.

852. Пусть $AC = x$ (см. рис. 75), тогда $AB = \frac{AC}{\sin B} = 5x$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то есть $25x^2 = x^2 + 216$; $x^2 = 9$; $x = 3$.

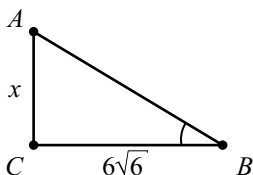


Рис. 75.

Ответ: 3.

853. $AC = AB \cos A = 25 \cdot 0,28 = 7$ (см. рис. 76), тогда по теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 25^2 - 7^2 = 576 = 24^2$, $BC = 24$.

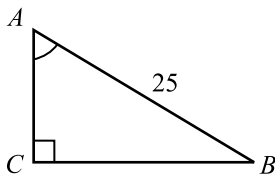


Рис. 76.

Ответ: 24.

854. $\sin A = \frac{12}{13}$, $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} A = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{5}$.

$CH = AH \cdot \operatorname{tg} A = 5 \cdot \frac{12}{5} = 12$ (см. рис. 77).

Ответ: 12.

855. $\cos \angle BAK = \cos(180^\circ - \angle BAC) = -\cos \angle BAC$ (см. рис. 78).

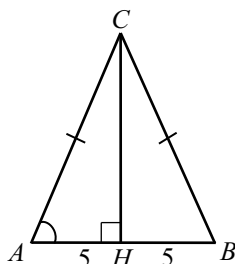


Рис. 77.

$$\sin \angle BAC = \frac{12}{12,5} = \frac{120}{125} = \frac{24}{25},$$

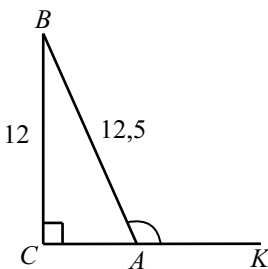


Рис. 78.

$$\cos \angle BAC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAC} = \sqrt{\frac{625 - 576}{625}} = \frac{7}{25} = 0,28.$$

Тогда $\cos \angle BAK = -0,28$.

Ответ: $-0,28$.

856. $\sin \angle ACD = \frac{AD}{AC}$ (см. рис. 79).

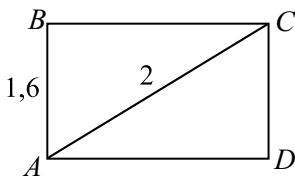


Рис. 79.

По теореме Пифагора $AD^2 = AC^2 - CD^2$,

откуда $AD = 1,2$ и $\sin \angle ACD = \frac{1,2}{2} = 0,6$.

Ответ: 0,6.

857. $\cos \angle ABC = \cos(180^\circ - \angle CBH) = -\cos \angle CBH$ (см. рис. 80).

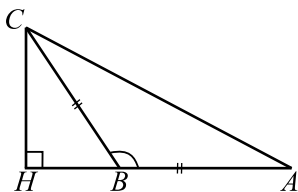


Рис. 80.

Так как $\cos \angle CBH = \frac{BH}{BC}$ и $AB = BC$, то $\cos \angle CBH = \frac{2}{2,5} = 0,8$.

Тогда $\cos \angle ABC = -0,8$.

Ответ: $-0,8$.

858. $\operatorname{ctg} \angle ABC = \operatorname{ctg}(180^\circ - \angle CBH) = -\operatorname{ctg} \angle CBH$ (см. рис. 81). Из $\triangle CBH$ найдём BH по теореме Пифагора: $BH = \sqrt{CB^2 - CH^2} =$

$= \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Тогда $\operatorname{ctg} \angle CBH = \frac{BH}{CH} = \frac{12}{5} = 2,4$;

$\operatorname{ctg} \angle ABC = -2,4$.

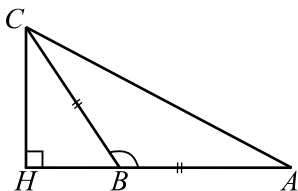


Рис. 81.

Ответ: $-2,4$.

859. $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24$ (см. рис. 82).

Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный, то $\angle ACB = \angle CAB$. Следовательно,

$\operatorname{tg} \angle ACB = \operatorname{tg} \angle CAB = \frac{CH}{AH} = \frac{24}{10} = 2,4$.

Ответ: 2,4.

860. $CH^2 = CB^2 - HB^2 = 64 - 28 = 36$, $CH = 6$ (см. рис. 83).

$\triangle ABC \sim \triangle CHB \Rightarrow \angle A = \angle HCB \Rightarrow$

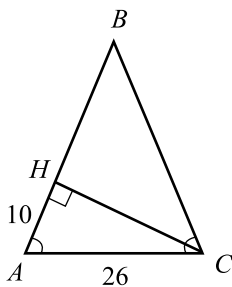


Рис. 82.

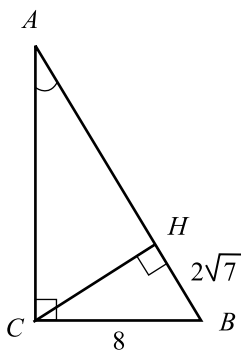


Рис. 83.

$$\cos \angle A = \cos \angle HCB = \frac{CH}{CB} = \frac{6}{8} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

$$861. AB = BC \cdot \operatorname{tg} C = 5 \cdot 2,4 = 12 \text{ (см. рис. 84);}$$

$$AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = \sqrt{169} = 13.$$

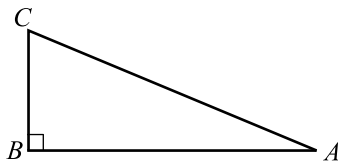


Рис. 84.

Ответ: 13.

$$862. \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ; \angle C = 180^\circ - \angle B - \angle A =$$

$$= 180^\circ - 2 \cdot \angle ABD - \angle A = 180^\circ - 2 \cdot 7^\circ - 94^\circ = 72^\circ.$$

Ответ: 72.

863. $\frac{CB}{AB} = \frac{1}{3}$ (см. рис. 85), откуда $CB = \frac{1}{3} \cdot AB = 6$.

$\triangle CHB \sim \triangle ACB$, $\angle HCB = \angle BAC$; $\frac{HB}{CB} = \frac{1}{3}$, значит, $HB = 2$.

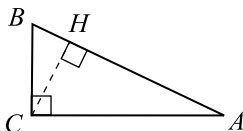


Рис. 85.

Ответ: 2.

864. $\operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg} A$ (см. рис. 86). По теореме Пифагора

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 153 - 144 = 9; \operatorname{ctg} A = \frac{CA}{CB} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = -0,25.$$

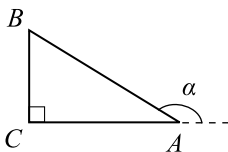


Рис. 86.

Ответ: -0,25.

865. $\sin \beta = \sin(\pi - \angle B) = \sin \angle B$ (см. рис. 87),

$$\sin \angle B = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

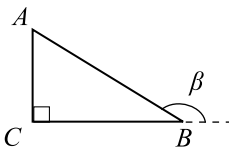


Рис. 87.

Ответ: 0,25.

866. $\sin \alpha = \sin(\pi - \angle ABC) = \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB}$ (см. рис. 88). По тео-

реме Пифагора $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 100 - 19 = 81$, $AC = 9$. Значит, $\sin \alpha = \frac{9}{10} = 0,9$.

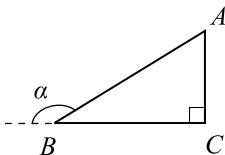


Рис. 88.

Ответ: 0,9.

867. По теореме Пифагора $CB^2 = AB^2 - CA^2 = 36$, $CB = 6$.

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{CB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

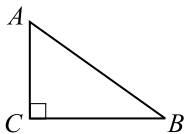


Рис. 89.

Ответ: 0,75.

868. $\frac{AH}{AB} = \cos \angle A$ (см. рис. 90), $AH = 5\sqrt{3}$. По теореме Пифагора $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 100 - 75 = 25$, откуда $BH = 5$.

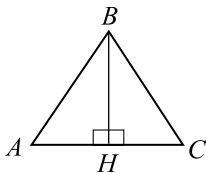


Рис. 90.

Ответ: 5.

869. $\frac{CH}{CB} = \sin \angle B$ (см. рис. 91), $CH = 16 \cdot \frac{3\sqrt{23}}{16} = 3\sqrt{23}$. По теореме Пифагора $HB^2 = CB^2 - CH^2 = 256 - 207 = 49$. $AB = 2HB = 2 \cdot 7 = 14$.

Ответ: 14.

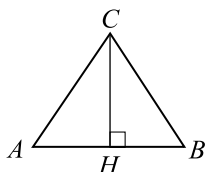


Рис. 91.

870. $\sin \angle A = \frac{BC}{AB}$ (см. рис. 92), $BC = AB \cdot \sin \angle A = 144 \cdot \frac{7}{36} = 28$.

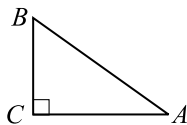


Рис. 92.

Ответ: 28.

871. По теореме Пифагора $CB^2 = AB^2 - AC^2 = 74 - 25 = 49$; $CB = 7$,
 $\operatorname{ctg} \angle B = \frac{CB}{AC} = \frac{7}{5} = 1,4$.

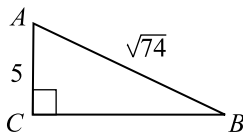


Рис. 93.

Ответ: 1,4.

872. $\frac{CB}{AB} = \cos \angle B$ (см. рис. 94), откуда

$AB = \frac{CB}{\cos \angle B} = 8 \cdot \frac{5}{2\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$. По теореме Пифагора

$AC^2 = 80 - 64 = 16$, откуда $AC = 4$.

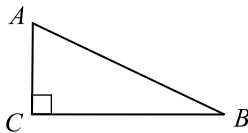


Рис. 94.

Ответ: 4.

873. $\angle ACB = \angle CAB$ (см. рис. 95). По теореме Пифагора

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = 64 - 28 = 36, AH = 6, \cos \angle CAB = \frac{AH}{AC} = \frac{6}{8} = 0,75.$$

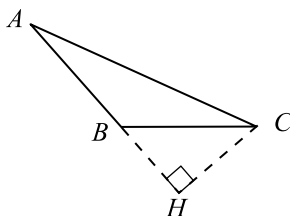


Рис. 95.

Ответ: 0,75.

874. $\frac{BC}{AB} = 0,2$ (см. рис. 96), $AB = x$, тогда $BC = 0,2x$. По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 - BC^2$, откуда $216 = x^2 - 0,04x^2 = 0,96x^2$, значит, $x^2 = \frac{216}{0,96} = 225$, откуда $x = 15$, $BC = 0,2x = 3$.

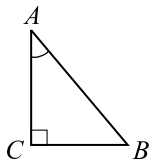


Рис. 96.

Ответ: 3.

875. $\sin \alpha = \sin \angle A$ (см. рис. 97). Пусть $\sin \angle A = x$, тогда

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{3}, \text{ откуда } 3x = 4\sqrt{1-x^2}, 9x^2 = 16(1-x^2), x^2 = \frac{16}{25}, \text{ то есть } x = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Ответ: 0,8.

876. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$; $AC^2 = 9 + 9 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 0,28 = 23,04$; $AC = 4,8$; $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{3^2 - 2,4^2} = 1,8$ (см. рис. 98).

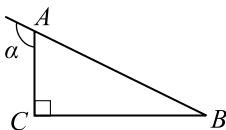


Рис. 97.

$$\frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}P \cdot r; r = \frac{4,8 \cdot 1,8}{3 + 3 + 4,8} = 0,8.$$

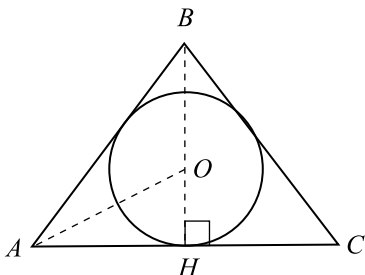


Рис. 98.

Ответ: 0,8.

$$877. \operatorname{tg} \angle A = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \angle B \right) = \frac{BH}{CH} = \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ (см. рис. 99). } BH = \frac{\sqrt{21}}{2} CH.$$

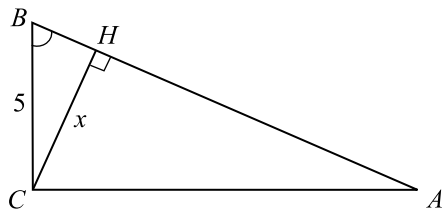


Рис. 99.

Из $\triangle CHB$ по теореме Пифагора находим $BC^2 = CH^2 + BH^2$;
 $25 = CH^2 + \frac{21}{4}CH^2$; $\frac{25}{4}CH^2 = 25$; $CH^2 = 4$; $CH = 2$.

Ответ: 2.

$$878. \text{ В } \triangle ABC \text{ (см. рис. 100) } \sin A = \frac{BC}{BA}; \frac{8}{BA} = \frac{1}{4} \Rightarrow AB = 32;$$

$$\sin A = \cos(90^\circ - A) = \cos B = \frac{BH}{BC}; \quad \frac{BH}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow BH = 2;$$

$$AH = AB - BH = 32 - 2 = 30.$$

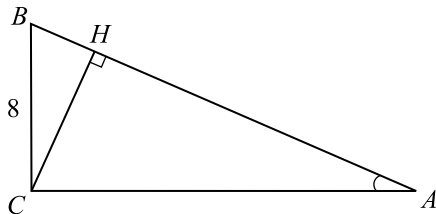


Рис. 100.

Ответ: 30.

879. $\triangle ADF \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle CAB$ — общий, $\angle FDA = \angle CBA$ как соответственные при параллельных прямых FD и CB и секущей AB), значит, $\triangle FAD$ — равнобедренный и $FD = AF$ (см. рис. 101). $CF + FD =$

$$= CF + AF = 9. \text{ Аналогично, } CE + ED = 9, CF + FD + CE + ED = 18.$$

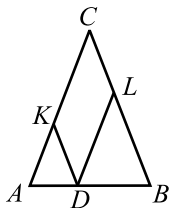


Рис. 101.

Ответ: 18.

880. Пусть AH — высота треугольника ABC (см. рис. 102).

$$\cos \angle BAH = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle BAH\right) = \sin \angle CBA = \sin \angle BAC = 0,2.$$

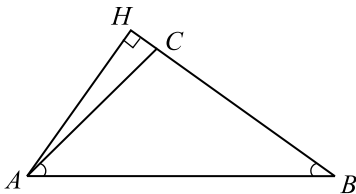


Рис. 102.

Ответ: 0,2.

881. Из треугольника ACH (см. рис. 103) находим $\frac{CH}{AC} = \sin \angle HAC =$
 $= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$; $CH = \frac{3}{5}AC = \frac{27}{5} = 5,4$.

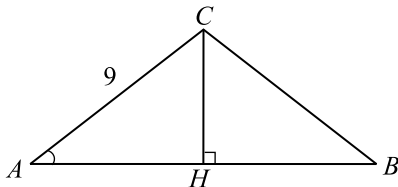


Рис. 103.

Ответ: 5,4

882. $\angle ACB = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA = 36^\circ$ (см. рис. 104), $\angle ACK =$
 $= \frac{1}{2}\angle ACB = 18^\circ$, $\angle CKA = 180^\circ - \angle ACK - \angle CAK = 98^\circ$. $\angle OAK =$
 $= \frac{1}{2}\angle CAB = 32^\circ$, $\angle AOK = 180^\circ - \angle OAK - \angle OKA = 50^\circ$.

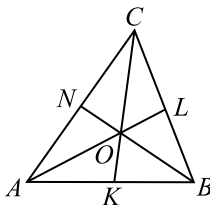


Рис. 104.

Ответ: 50.

883. Пусть $\angle BAC = 52^\circ$, $\angle CBA = 38^\circ$, $CK \perp AB$, значит, $\angle KCA =$
 $= 90^\circ - \angle CAK = 38^\circ$. CN — медиана, CK — высота (см. рис. 105). N —
 центр описанной окружности, значит, $CN = AN$, откуда $\angle NCA =$
 $= \angle CAN = 52^\circ$.
 $\angle NCK = \angle NCA - \angle KCA = 52^\circ - 38^\circ = 14^\circ$.

Ответ: 14.

884. Пусть $\angle CAB + \angle ABC + \angle KCB = 70^\circ$ (см. рис. 106).
 Но $\angle CAB + \angle ABC = 180^\circ - \angle BCA = \angle KCB$, $2\angle KCB = 70^\circ$,
 $\angle KCB = 35^\circ$, $\angle BCA = 180 - \angle KCB = 145^\circ$.

Ответ: 145.

885. По теореме Пифагора из треугольника BAC (см. рис. 107) находим

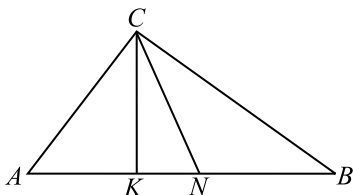


Рис. 105.

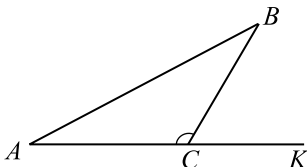


Рис. 106.

$$BC^2 = BA^2 - AC^2 = 30^2 - 18^2 = 576, \quad BC = 24. \quad \sin \angle BAD = \\ = \sin \angle BAC = \frac{24}{30} = 0,8.$$

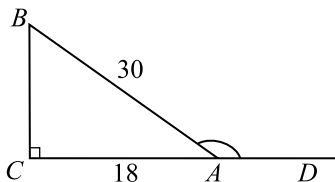


Рис. 107.

Ответ: 0,8.

886. 1) $\angle CLD = \angle BCL$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых, (см. рис. 108). Так как CL — биссектри-

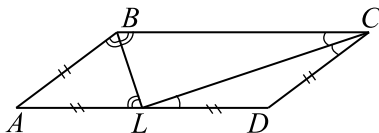


Рис. 108.

са $\angle C$, то $\angle DCL = \angle BCL$. Получаем $\angle CLD = \angle DCL$; $DL = CD$. Аналогично, $AL = AB$. Поскольку $AB = CD$, как противоположные стороны параллелограмма, то $AL = DL$,

и, значит, $AL = \frac{1}{2}AD$. Пусть h — высота параллелограмма $ABCD$, проведенная к стороне AD . Тогда $S_{ABCD} = h \cdot AD$, $S_{ABL} = \frac{1}{2}h \cdot AL = \frac{1}{4}h \cdot AD$. Следовательно, $S_{ABCD} = 4S_{ABL} = 60$. Отметим также, что для периметра p параллелограмма $ABCD$ имеем выражение: $p = 2(AB + AD) = 2 \cdot \frac{3}{2}AD = 3AD = 3BC$.

2) $\angle BCL = \frac{1}{2}\angle C$, $\angle CBL = \frac{1}{2}\angle B$, $\angle B + \angle C = 180^\circ$. Значит, $\angle BCL + \angle CBL = 90^\circ$, $\angle BLC = 180^\circ - \angle BCL - \angle CBL = 90^\circ$. Следовательно, $\triangle BCL$ — прямоугольный. Значит, $2S_{BCL} = BL \cdot CL = h \cdot BC = S_{ABCD} = 60$, $BL = \frac{60}{CL} = 5$.

Из $\triangle BCL$ по теореме Пифагора имеем: $BC = \sqrt{BL^2 + CL^2} = 13$. Итак, $p = 3BC = 39$.

Ответ: 39.

887. 1) Так как $\angle CLD = \angle BCL$ и $\angle DCL = \angle BCL$, то $\angle CLD = \angle DCL$, (см. рис. 109). Следовательно, $DL = CD$, и, аналогично, $AL = AB$. По-

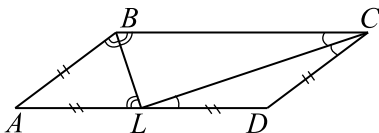


Рис. 109.

скольку $CD = AB$, то $DL = AL = \frac{1}{2}AD$.

2) Так как $\angle BCL = \frac{1}{2}\angle C$, $\angle CBL = \frac{1}{2}\angle B$, то $\angle BCL + \angle CBL = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B = 90^\circ \Rightarrow \angle BLC = 90^\circ$. Пусть $CL = x$, ($x > 0$), тогда из $\triangle BLC$ по теореме Пифагора имеем: $BC = \sqrt{36 + x^2}$. Таким образом, $DL = CD = \frac{1}{2}\sqrt{36 + x^2}$ и $CL + CD + DL = x + \sqrt{36 + x^2}$. Так как по условию периметр $\triangle BCL = 18$, то $x + \sqrt{36 + x^2} = 18$, $\sqrt{36 + x^2} = 18 - x$.

Отсюда $x = 8$. Итак, $S_{BCL} = \frac{1}{2}BL \cdot CL = 24$, $S_{ABCD} = 2S_{BCL} = 48$.

Ответ: 48.

888. 1) Так как $\angle ABL = \angle CBL = \angle BLA$, то $AB = AL$. Аналогично, $CD = DK$. Следовательно, учитывая условие, получаем:

$LK = AD - AL - DK = 3AB - 2AB = AB$, (см. рис. 110). Пусть P — точка пересечения прямых BL и CK . Так как

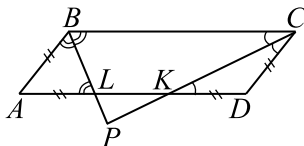


Рис. 110.

$AL + DK = 2AB = \frac{2}{3}AD < AD$, то точка P лежит вне параллелограмма. Так как $LK \parallel BC$, то

$\triangle LKP \sim \triangle BCP$ с коэффициентом подобия $k = \frac{LK}{BC} = \frac{1}{3}$. Имеем:

$PL = \frac{1}{3}BP$, $BL = \frac{2}{3}BP$, $BP = \frac{3}{2}BL = 9$. Аналогично находим, что

$CP = \frac{3}{2}CK = 12$.

2) Так как $\angle PBC = \frac{1}{2}\angle B$, $\angle PCB = \frac{1}{2}\angle C$, $\angle PBC + \angle PCB = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90^\circ$, то $\angle BPC = 90^\circ$.

3) $S_{BCP} = \frac{1}{2}BP \cdot CP = 54$, $S_{LKP} = k^2 \cdot S_{BPC} = \frac{1}{9} \cdot 54 = 6$. Итак,

$S_{BCKL} = S_{BCP} - S_{LKP} = 48$, $S_{BCKL} = \frac{h}{2} \cdot (BC + LK) = \frac{h}{2} \cdot \frac{4}{3}BC = \frac{2}{3}S_{ABCD}$ (здесь h обозначает высоту параллелограмма). Следовательно,

но, $S_{ABCD} = \frac{3}{2}S_{BCKL} = 72$. Ответ: 72.

889. Так как $\angle ABL = \angle CBL = \angle BLA$, то $AB = AL$. Аналогично,

$CD = DK$. Поскольку $AL + DK = 2AB = \frac{4}{3}AD > AD$, то точка пересечения отрезков BL и CK лежит внутри параллелограмма. Пусть $P = BL \cap CK$ (см. рис. 111). Тогда $KL = AL + DK - AD = 2AB - AD = 2 \cdot \frac{2}{3}AD - AD = \frac{1}{3}AD$. $KL = AL + DK - AD = \frac{1}{3}AD$. Пусть h —

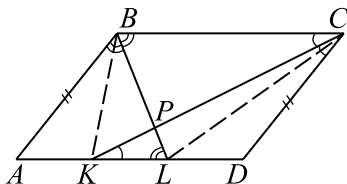


Рис. 111.

высота параллелограмма $ABCD$ к стороне AD . Тогда

$$S_{BCLK} = \frac{1}{2}h \cdot (BC + KL) = \frac{1}{2}h(BC + \frac{1}{3}AD) = \frac{1}{2}h \cdot \frac{4}{3}BC = \frac{2}{3}S_{ABCD},$$

$$S_{ABCD} = \frac{3}{2}S_{BCLK}.$$

2) Заметим, что $\angle BPC = 90^\circ$, так как $\angle PBC + \angle PCB =$

$$= \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90^\circ. \text{ Поэтому } S_{BCLK} = \frac{1}{2}BL \cdot CK \cdot \sin 90^\circ = 30.$$

$$\text{Получаем } S_{ABCD} = \frac{3}{2}S_{BCLK} = \frac{3}{2} \cdot 30 = 45.$$

Ответ: 45.

890. Пусть ML — высота треугольника MEC . Тогда KL — высота трапеции $FECD$ (см. рис. 112).

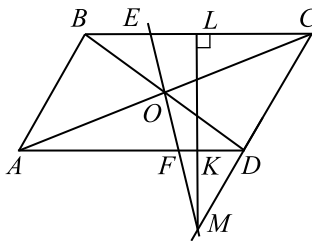


Рис. 112.

Рассмотрим треугольники MEC и MFD . $\angle ECM$ и $\angle FDM$ — со-

ответственные, $\angle CEM$ и $\angle DFM$ — соответственные, $\angle CME$ и $\angle DMF$ — совпадают. Следовательно, $\triangle CME \sim \triangle DMF$ — по трем равным углам. Так как, по условию, $EC : FD = 2$, то $ML : KM = 2$. Отсюда, $EC = 2FD$, $ML = 2KM$. С учетом того, что $LK = ML - KM = 2KM - KM = KM$, получаем $S_{FECD} = \frac{EC + FD}{2} \cdot KL = \frac{3FD \cdot KM}{2}$.

$$S_{ECM} = \frac{1}{2} EC \cdot ML = \frac{2FD \cdot 2KM}{2} = 2FD \cdot KM. \text{ Следовательно,}$$

$$\frac{S_{FECD}}{S_{ECM}} = \frac{3FD \cdot KM}{4FD \cdot KM} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

891. Искомый периметр $P_{ABD} = AB + AD + BD$. Найдём стороны AB , AD и BD (см. рис. 113).

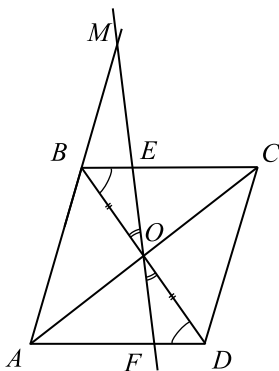


Рис. 113.

$AD = AF + FD$. Чтобы найти FD покажем, что треугольники BOE и FOD равны. $\angle EBO$ и $\angle ODF$ — накрест лежащие, $\angle BOE$ и $\angle FOD$ — вертикальные, $BO = OD$ — так как O — точка пересечения диагоналей. Следовательно, $\triangle BOE = \triangle FOD$ — по стороне и двум прилежащим углам. Поэтому $FD = BE = 1,6$. Следовательно, $AD = 6,4 + 1,6 = 8$.

Найдём сторону AB . Рассмотрим треугольники BME и AMF . $\angle MBE$ и $\angle MAF$ — соответственные, $\angle BME$ и $\angle AMF$ — совпадают. Следовательно, $\triangle BME \sim \triangle AMF$ — по двум равным углам. Из подобия треугольников имеем $\frac{MB}{AM} = \frac{BE}{AF}$, $AM = \frac{MB \cdot AF}{BE} = \frac{1 \cdot 6,4}{1,6} = 4$. Получаем, $AB = AM - BM = 4 - 1 = 3$.

Найдём сторону BD . По теореме косинусов
 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cos 60^\circ = 49$,
 $BD = 7$.

Получаем, $P_{ABD} = 3 + 8 + 7 = 18$.

Ответ: 18.

892. 1) $\triangle BKP \sim \triangle CDP$ (по двум углам).

Значит, $\frac{BK}{CD} = \frac{PK}{PD} = \frac{PK}{PK + DK} = \frac{6}{6 + 9} = \frac{2}{5}$. То есть

$$BK = \frac{2}{5}CD = 4.$$

2) Докажем, что $\triangle BKP$ — равнобедренный (см. рис. 114).
 $\angle BPK = \angle PDA$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD , PC и секущей PD), $\angle BKP = \angle CDP$ (как соответственные при параллельных прямых AB , CD и секущей PD), $\angle PDA = \angle CDP$ (DP — биссектриса $\angle D$). Значит, $\angle BPK = \angle BKP$ и $BP = BK = 4$.

3) $P_{BKP} = BP + BK + PK = 4 + 4 + 6 = 14$.

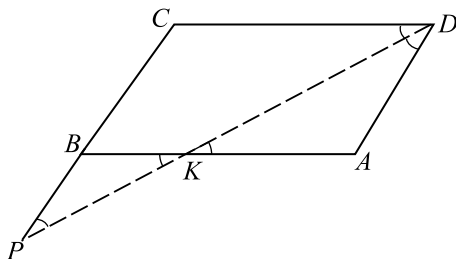


Рис. 114.

Ответ: 14.

893. 1) $\triangle ABN \sim \triangle DMN$ (по двум углам) (см. рис. 115). Значит,
 $\frac{AB}{MD} = \frac{BN}{MN} = \frac{BM + MN}{MN} = \frac{6 + 4}{4} = \frac{5}{2}$. То есть $AB = \frac{5}{2}MD = 12,5$.

2) $\angle ANB = \angle NBC$ (как накрест лежащие), $\angle ABN = \angle NBC$, BN — биссектриса $\angle B$. Значит, $\angle ANB = \angle ABN$, следовательно, $\triangle ABN$ — равнобедренный, $AN = AB = 12,5$.

3) $P_{ABN} = AN + AB + BN = 12,5 + 12,5 + 10 = 35$.

Ответ: 35.

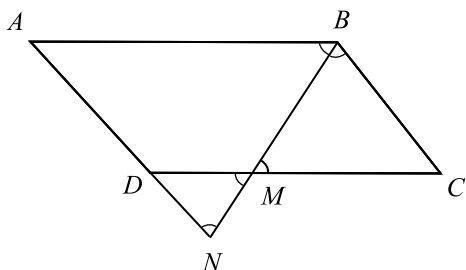


Рис. 115.

894. $\cos \angle B = \cos(180^\circ - \angle A) = -\cos \angle A = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (см. рис. 116).

Пусть AH_1 высота параллелограмма, проведенная к стороне CB .

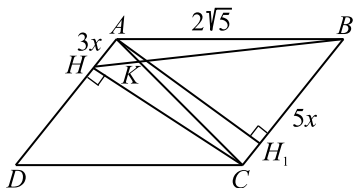


Рис. 116.

$BH_1 = 2\sqrt{5} \cdot \cos \angle B = 2$; $AH_1 = CH = 4$. Так как $\triangle AHK \sim \triangle KBC$, то $\frac{AK}{KC} = \frac{AH}{BC} = \frac{3}{5}$. Пусть $AH = 3x$, тогда $BC = 5x$. Так как четырехугольник $AHCH_1$ является прямоугольным, то $AH = CH_1 = 3x \Rightarrow BH_1 = BC - CH_1 = 2x = 2 \Rightarrow x = 1$, $BC = 5$. $S_{ABCD} = BC \cdot AH_1 = 5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: 20.

895. $\angle CDN = \angle DNA$ (как накрест лежащие), $\angle CDN = \angle NDA$ (DN — биссектриса $\angle D$). Следовательно $\angle ADN = \angle DNA$. Следовательно $\triangle ADN$ — равнобедренный (см. рис. 117). $AD = AN = AB - BN = DC - BN = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, $\angle ADN = \angle BMN$ (как накрест лежащие), $\angle BNM = \angle DNA$ (вертикальные). Так как $\angle NDA = \angle DNA$, то $\angle BNA = \angle BMN$. Значит, $\triangle NBM$ — равнобедренный. $BN = BM = \sqrt{3}$. $\triangle DCM \sim \triangle NBM$ (по двум углам: $\angle M$ — общий, $\angle CDM = \angle BNM$ — соответственные), $\frac{DC}{BN} = \frac{DM}{NM}$.

$NM = \frac{BN \cdot DM}{DC}$, $NM = 3$. Из $\triangle BNM$ по теореме косинусов

$$MN^2 = BN^2 + BM^2 - 2BN \cdot BM \cdot \cos \angle NBM,$$

$\cos \angle NBM = -\frac{1}{2}$, $\angle NBM = 120^\circ$. $\angle NBC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Из

$\triangle CBN$ по теореме косинусов

$$CN^2 = BC^2 + BN^2 - 2BC \cdot BN \cos \angle NBC, CN^2 = 9, CN = 3.$$

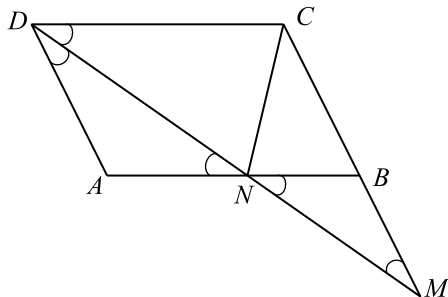


Рис. 117.

Ответ: 3.

896. Пусть $h_1 = 5$, $h_2 = 7$, $AB = b$, $AD = a$ (см. рис. 118).

$S_{ABCD} = ah_1 = bh_2 \Rightarrow 5a = 7b$, кроме того периметр параллелограмма равен $2(a + b) = 48$. Составим систему: $\begin{cases} 5a - 7b = 0, \\ a + b = 24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14, \\ b = 10. \end{cases}$

Тогда $\sin \alpha = \frac{h_1}{b} = \frac{1}{2}$.

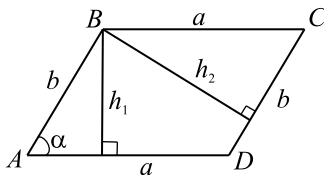


Рис. 118.

Ответ: 0,5.

897. Пусть $h_1 = 3\sqrt{2}$, $h_2 = 5\sqrt{2}$ (см. рис. 118). $S_{ABCD} = ah_1 = bh_2, \Rightarrow 3a\sqrt{2} = 5b\sqrt{2}$, так же $2(a + b) = 32$. $\begin{cases} 3a\sqrt{2} = 5b\sqrt{2}, \\ a + b = 16. \end{cases}$ Решив систему,

получим $a = 10$, $b = 6$. $\sin \alpha = \frac{h_1}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1$.

Ответ: 1.

898. 1. Найдём сторону ромба (см. рис. 119). $S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin \angle A$, $AB > 0$,

$$AB = \sqrt{\frac{S_{ABCD}}{\sin \angle A}} = \sqrt{\frac{135 \cdot 5}{3}} = 15.$$

2. Найдём высоту DK . $S_{ABCD} = BC \cdot DK$, $DK = \frac{S_{ABCD}}{BC} =$
 $= \frac{135}{15} = 9$.

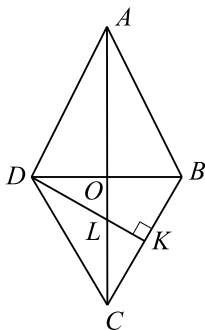


Рис. 119.

3. Найдём $\sin \angle \frac{A}{2}$. $\cos \angle A = \frac{4}{5}$, $2 \sin^2 \angle \frac{A}{2} = 1 - \cos \angle A =$
 $= 1 - 0,8 = 0,2$, $\angle A$ — острый, $\sin \angle \frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

4. Найдём OB и BD . $OB = AB \cdot \sin \angle \frac{A}{2} = 15 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 1,5\sqrt{10}$,
 $BD = 2 \cdot OB = 3\sqrt{10}$.

5. Найдём DL . $\triangle DKB \sim \triangle DOL$ ($\angle D$ — общий,
 $\angle DKB = \angle DOL = 90^\circ$), $\frac{BD}{DL} = \frac{DK}{DO}$, $DL = \frac{BD \cdot DO}{DK} =$
 $= \frac{3\sqrt{10} \cdot 1,5\sqrt{10}}{9} = 5$.

Ответ: 5.

899. $S_{\triangle ABC} = \frac{AH \cdot BH}{2}$ (см. рис. 120).

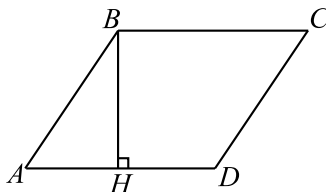


Рис. 120.

$$BH = AB \cdot \sin \angle A = AB \cdot \sin \angle C = 20 \cdot \frac{3}{5} = 12,$$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 16. \quad S_{\triangle ABH} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96.$$

Ответ: 96.

900. $\triangle CDH = \triangle ABE$ (см. рис. 121), $S_{\triangle CDH} = S_{\triangle ABE} = \frac{BE \cdot AE}{2}$.

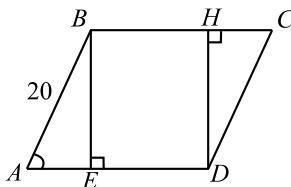


Рис. 121.

$$AE = AB \cdot \cos A = 20 \cdot \frac{4}{5} = 16; \quad BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12.$$

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96.$$

Ответ: 96.

901. На рисунке 122 изображен параллелограмм $ABCD$.

$$\cos \angle B = \cos(180^\circ - \angle A) = -\cos \angle A = -\sqrt{1 - 0,28^2} = -0,96.$$

Ответ: $-0,96$.

902. Рассмотрим ромб $ABCD$, в котором $BH = \sqrt{2}$ и $\angle ABC = 150^\circ$ (см. рис. 123). $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 30^\circ$, тогда из прямоугольного треугольника ABH имеем: $AB = 2BH = 2\sqrt{2}$, так как $ABCD$ — ромб,

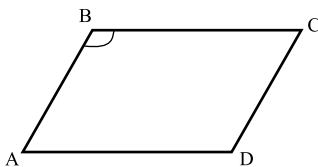


Рис. 122.

то $AD = AB = 2\sqrt{2}$ и $S_{ABCD} = BH \cdot AD = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$.

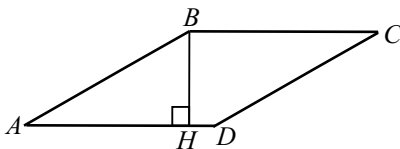


Рис. 123.

Ответ: 4.

903. Пусть $OM = \frac{BC}{2} = x$, $OH = \frac{AB}{2} = y$ (см. рис. 124), тогда

$$\begin{cases} 4x + 4y = 52, \\ x - y = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13, \\ x - y = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8,5, \\ y = 4,5. \end{cases} \quad AB = 2y = 9.$$

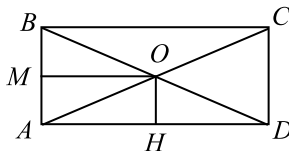


Рис. 124.

Ответ: 9.

904. Пусть точки K , L , M и N — середины сторон AD , DC , CB и BA соответственно (см. рис. 125). $KL = \frac{1}{2}AC$ (как средняя линия треугольника

ADC), $MN = \frac{1}{2}AC$ (как средняя линия треугольника BAC). Аналогич-

но, $ML = KN = \frac{1}{2}BD$. Тогда периметр $KLMN$ равен

$$KL + LM + MN + NK = AC + BD = 15.$$

Ответ: 15.

905. Пусть $BD = 3x$, $AC = 4x$. Из треугольника AOD находим

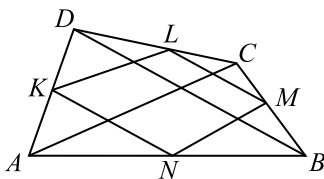


Рис. 125.

$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{4x^2 + \frac{9}{4}x^2} = \sqrt{\frac{25}{4}x^2} = \frac{5}{2}x \text{ (см. рис. 126).}$$

Периметр равен $4 \cdot \frac{5}{2}x = 10x = 300$, откуда $x = 30$. $AC = 4x = 120$.

$$\triangle AOD \sim \triangle ACH, \text{ значит, } \frac{CH}{AC} = \frac{OD}{AD} = \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{5}{2}x} = \frac{3}{5},$$

$$CH = \frac{3}{5}AC = \frac{3}{5} \cdot 120 = 72.$$

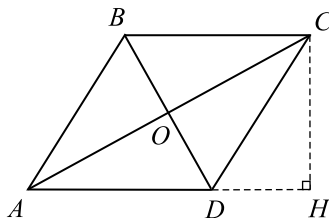


Рис. 126.

Ответ: 72.

906. Обозначим одну восьмую часть площади трапеции через x , тогда $S_{MBCN} = 3x$, $S_{AMND} = 5x$, $S_{ABCD} = 8x$. Пусть $AD = a$, $a > 10$. Так

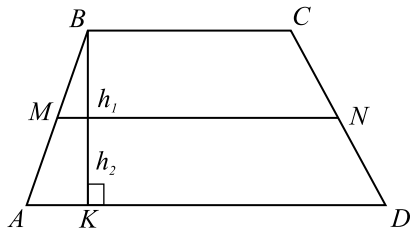


Рис. 127.

как $MN = \frac{BC + AD}{2}$ (по теореме о средней линии трапеции), $BC = 2MN - AD = 20 - a$. Проведем высоту $BK = h_1 + h_2$, где h_1 — высота трапеции $MBCN$, h_2 — высота трапеции $AMND$ (см. рис. 127).

$$S_{MBCN} = \frac{MN + BC}{2} \cdot h_1; 3x = \frac{10 + 20 - a}{2} \cdot h_1; h_1 = \frac{6x}{30 - a}.$$

$$S_{AMND} = \frac{MN + AD}{2} \cdot h_2; 5x = \frac{10 + a}{2} \cdot h_2; h_2 = \frac{10x}{10 + a}.$$

$$S_{ABCD} = 10 \cdot (h_1 + h_2); h_1 + h_2 = \frac{8x}{10} = \frac{4x}{5}, \frac{6x}{30 - a} + \frac{10x}{10 + a} = \frac{4x}{5},$$

$$\frac{3}{30 - a} + \frac{5}{10 + a} = \frac{2}{5}; a^2 - 25a + 150 = 0; a_1 = 15, a_2 = 10 \text{ не удовлетворяют условию } a > 10. AD = 15.$$

Ответ: 15.

907. Дано: $ABCD$ — равнобедренная трапеция, вписанная, $AD = 21$, $BC = 9$, BH — высота, $BH = 8$ (см. рис. 128).

Найти: диаметр описанной окружности.

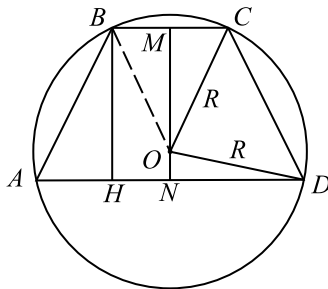


Рис. 128.

Обозначим через O — центр описанной около трапеции окружности (см. рис. 128). MN — высота трапеции, проходящая через точку O . Так как $OC = OB$ (радиус описанной окружности), то $\triangle OBC$ — равнобедренный. OM — высота $\triangle BOC$, а следовательно и медиана. Поэтому

$$BM = MC; MC = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2}. \text{ Аналогично, } ND = AN. ND = \frac{AD}{2} = \frac{21}{2}.$$

Пусть $MO = x$, $x > 0$, тогда $ON = 8 - x$. Так как MN — высота трапеции, то $\angle CMO = 90^\circ$, $\angle OND = 90^\circ$. Следовательно, $\triangle CMO$ и $\triangle OND$ — прямоугольные. Из $\triangle MOC$ имеем:

$OC^2 = MC^2 + MO^2$. Пусть R — радиус описанной окружности. Тогда $R^2 = OC^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + x^2$ (1). Из $\triangle NOD$ имеем:

$$OD^2 = ON^2 + ND^2, R^2 = OD^2 = (8 - x)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2 \quad (2). \text{ Из (1) и (2)}$$

$$\text{имеем: } \left(\frac{9}{2}\right)^2 + x^2 = (8 - x)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2; \frac{81}{4} + x^2 = \frac{441}{4} + 64 - 16x + x^2;$$

$$16x = 154; x = \frac{77}{8} = 9\frac{5}{8}. \text{ Из (1) имеем: } R^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{77}{8}\right)^2 = \frac{7225}{64};$$

$$R = \frac{85}{8}. \text{ Диаметр окружности } D = 2R = \frac{85}{4} = 21,25.$$

Ответ: 21,25.

908. Через вершину C проведем $CE \parallel BD$ (см. рис. 129). Продолжим отрезок AD до пересечения с CE . Четырехугольник $DBCE$ — паралле-

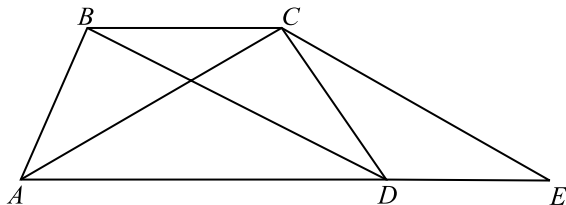


Рис. 129.

лограмм,

$CE = BD = 12$, $DE = BC = 5$. $S_{ABCD} = S_{ACE}$. Найдём S_{ACE} по формуле Герона. $AC = 9$, $CE = 12$, $AE = 15$. Полупериметр $\triangle ACE$

$$p = \frac{9 + 12 + 15}{2} = 18. S_{ACE} \sqrt{p(p - AC)(p - CE)(p - AE)} =$$

$$= \sqrt{18(18 - 9)(18 - 12)(18 - 15)} = 3 \cdot 18 = 54. S_{ABCD} = 54.$$

Ответ: 54.

909. Пусть O — центр вписанной в трапецию $ABCD$ окружности. Точка O лежит на средней линии (см. рис. 130) MN трапеции, так как равноудалена от прямых AD и BC . А поскольку $\angle BAD = 90^\circ$, то и $\angle OMA$ — тоже прямой. Значит, M — точка касания. Поэтому, $MO = 5$. Пусть H — точка касания окружности со стороной CD . Тогда $\angle NHO = 90^\circ$, $OH = 5$. Из прямоугольного треугольника OHN находим $ON = 2OH = 10$, то есть $MN = MO + ON = 15$.

Ответ: 15.

Проведем $MN \perp AD$ через центр вписанной окружности (см. рис. 133). Тогда точки M и N являются точками касания окружности со сторонами BC и AD соответственно.

$MC = CK = 2$ и $DK = DN = 8$ как отрезки касательных.

$BM = BP = PA = AN = x$ (аналогично). Опустим высоту CH .

$HD = DN - NH = 8 - 2 = 6$. Из $\triangle HCD$: $CH^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2$; $CH = 8$.

$BA \parallel CH$, так как по условию $\angle BAD = 90^\circ$. Следовательно, $BA = CH$ (как отрезки, заключенные между параллельными прямыми). Получаем, $2x = 8$; $x = 4$. Теперь найдем $P_{ABCD} = 4x + 2 + 10 + 8 = 20 + 16 = 36$.

Ответ: 36.

913. 1. Используя рисунок 134, имеем $S_{ABD} = S_{ABO} + S_{AOD}$;

$S_{ACD} = S_{COD} + S_{AOD}$.

Так как $S_{ABD} = S_{ACD} = \frac{H \cdot AD}{2}$, то $S_{ABO} + S_{AOD} = S_{COD} + S_{AOD}$;

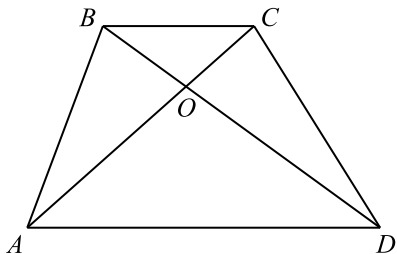


Рис. 134.

$S_{ABO} = S_{COD}$.

2. Из подобия треугольников BOC и AOD следует, $\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOD}} = k^2 = \frac{1}{9}$, где k — коэффициент подобия; $S_{\triangle AOD} = 9S_{\triangle BOC}$.

3. Так как $OC = \frac{1}{3}AO$, то $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}h \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{3}AO = \frac{1}{3}S_{\triangle AOB} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$. $S_{\triangle AOB} = 3S_{\triangle BOC}$. Получим:

$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} = 6 + 2 + 6 + 18 = 32$.

Ответ: 32.

914. Пусть $BC = x$, тогда $AD = 2x$ (см. рис. 135). $\triangle BOC \sim \triangle AOD$

(по двум углам), значит $\frac{OH_1}{OH_2} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$. Так как $BC = \frac{1}{2}AD$,

то BC — средняя линия $\triangle APD$. Следовательно высота $\triangle BCC$

$PH = H_1H_2 = 3OH_1$. По условию $\frac{x \cdot OH_1}{2} = 3$, значит

$$S_{BOC} = \frac{x \cdot 3OH_1}{2} = 9 = S_{\triangle BPC}.$$

$$S_{PCOB} = S_{\triangle BPC} + S_{\triangle BOC} = 9 + 3 = 12.$$

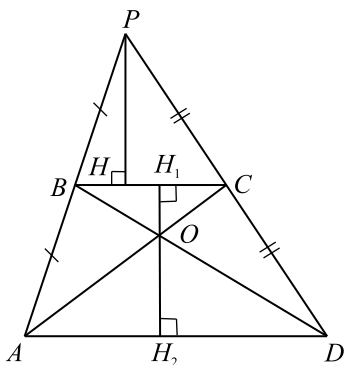


Рис. 135.

Ответ: 12.

915. В треугольниках ABC и ADC (см. рис. 136) ME и FN — средние

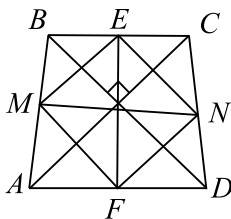


Рис. 136.

линии. Следовательно, $ME \parallel NF$, $ME = NF$, то есть $MENF$ — параллелограмм. По условию $AC \perp BD \Rightarrow ME \perp EN \Rightarrow MENF$ — прямоугольник. Значит, $EF = MN = 9$.

Ответ: 9.

916. $\operatorname{tg} \angle BAD = \frac{BE}{AE}$ (см. рис. 137). $AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{17 - 7}{2} = 5$.

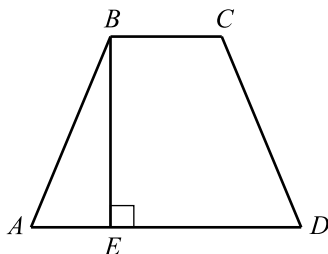


Рис. 137.

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{169 - 25} = 12. \operatorname{tg} \angle BAD = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Ответ: 2,4.

917. $AH = BH \cdot \operatorname{ctg} \angle BAH = 5 \cdot 1,4 = 7$ (см. рис. 138).

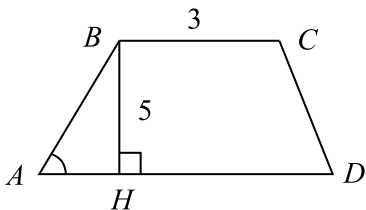


Рис. 138.

$$AD = 2AH + BC = 14 + 3 = 17.$$

Ответ: 17.

918. По условию $AD = 27$; $AB = 25$; $\sin \angle A = 0,96$ (см. рис. 139). Тогда $\cos \angle A = \sqrt{1 - \sin^2 \angle A} = \sqrt{1 - 0,9216} = 0,28$. $AH = AB \cdot \cos \angle A = 7$; $BC = AD - 2AH = 27 - 14 = 13$.

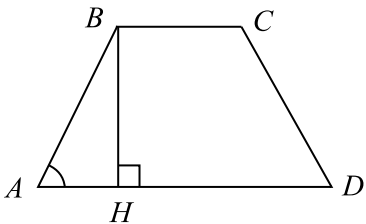


Рис. 139.

Ответ: 13.

919. Найдём длины оснований и высоту трапеции $ABCD$ (см. рис. 140).

$$AB = 3, CD = 7, BH = 9. S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot BH, S_{ABCD} = \\ = \frac{3 + 7}{2} \cdot 9 = 45.$$

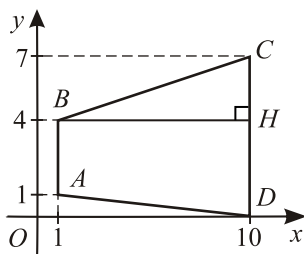


Рис. 140.

Ответ: 45.

920. По рисунку 141 найдём длины оснований и высоту трапеции $ABCD$.

$$AB = 3, DC = 5, AH = 9. S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AH,$$

$$S_{ABCD} = \frac{3 + 5}{2} \cdot 9 = 36.$$

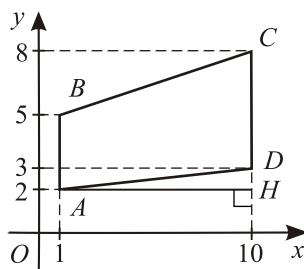


Рис. 141.

Ответ: 36.

921. По условию $ABCD$ — трапеция (см. рис. 142), значит, $\angle A + \angle B = 180^\circ$; $\angle B = 180^\circ - \angle A$. $\cos \angle B = \cos(180^\circ - \angle A) =$
 $= -\cos \angle A = -\sqrt{1 - \sin^2 \angle A} = -\sqrt{1 - \frac{21}{25}} = -\frac{2}{5} = -0,4.$

Ответ: $-0,4$.

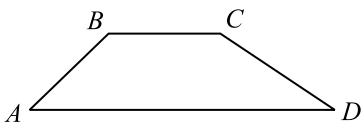


Рис. 142.

922. $AH = MD = \frac{AD - BC}{2} = 2$ (см. рис. 143), $\frac{AH}{AB} = \cos \angle A = \frac{1}{4}$, откуда $AB = 4AH = 8$.

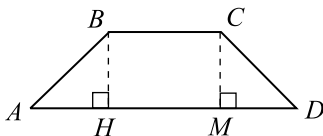


Рис. 143.

Ответ: 8.

923. Рассмотрим трапецию $ABCD$ (см. рис. 144), MN — её средняя линия.

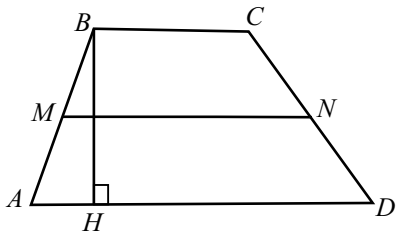


Рис. 144.

$MN = \frac{1}{2} \cdot (BC + AD)$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot (BC + AD)$, тогда

$$MN = \frac{S_{ABCD}}{BH} = \frac{225}{15} = 15.$$

Ответ: 15.

924. $AH_1 = H_2D = \frac{AD - BC}{2} = 2\sqrt{7}$ (см. рис. 145). По теореме Пифагора $BH_1^2 = AB^2 - AH_1^2 = 64 - 28 = 36$, $BH_1 = 6$, откуда $\sin A = \frac{BH_1}{AB} = \frac{6}{8} = 0,75$.

Ответ: 0,75.

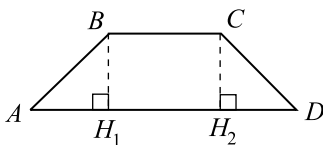


Рис. 145.

925. По условию трапеция $ABCD$ — равнобедренная и $\angle AKD = 60^\circ$, поэтому $\triangle AKD$ — равносторонний. $\frac{RC}{KR} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (см. рис. 146),

$$RC = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2, BC = 2RC = 4.$$

$$\frac{KL}{LD} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad LD = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 6, \quad AD = 2LD = 12, \\ AD + BC = 16.$$

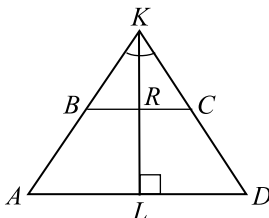


Рис. 146.

Ответ: 16.

926. Пусть $DC = 5$, $AB = 7$ (см. рис. 147). Пусть M — пересечение прямой KN со стороной CB . Тогда KM — средняя линия треугольника ACB , $KM = \frac{1}{2}AB = \frac{7}{2}$, NM — средняя линия треугольника DCB , $NM = \frac{1}{2}DC = \frac{5}{2}$. Следовательно, $KN = MK - MN = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = 1$.

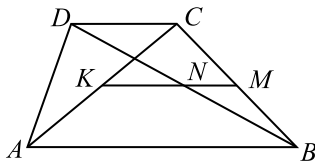


Рис. 147.

Ответ: 1.

927. $AK = LD$, $AK = \frac{AD - BC}{2} = \frac{27 - 11}{2} = 8$ (см. рис. 148).

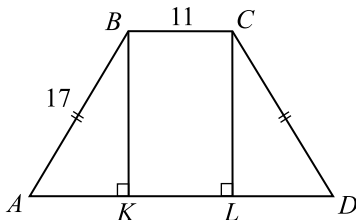


Рис. 148.

Из треугольника BKA находим $BK = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. $\operatorname{tg} \angle BAD = \frac{BK}{AK} = \frac{15}{8} = 1,875$.

Ответ: 1,875.

928. $\alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ (см. рис. 149) $\angle HOB = 15^\circ$;

$\frac{r}{R} = \cos 15^\circ$; $\cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$, откуда

$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \cos 15^\circ. R = \frac{r}{\cos 15^\circ} = \frac{3 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = 6 \cdot \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 6,$$

так как $\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{6}{4} + \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{12}}{4} = 2 + \sqrt{3}$.

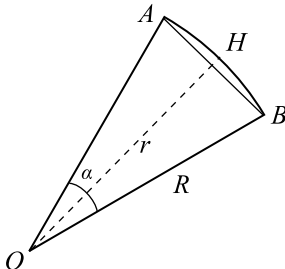


Рис. 149.

Ответ: 6.

929. Углы APH и ADP равны, так как каждый из них в сумме с углом PAH даёт 90° (см. рис. 150).

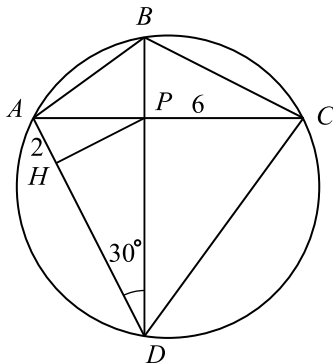


Рис. 150.

Следовательно $\angle APH = 30^\circ$. $AP = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = 4$.

$PD = AP \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3}$ (см. рисунок). Углы DAC и DBC равны, как опирающиеся на одну дугу. $\angle BPC = \angle APD$ (как вертикальные). Следовательно, треугольники ADP и BCP подобны.

$$AP : PD = BP : PC. BP = \frac{AP \cdot PC}{DP} = 2\sqrt{3}.$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} DP \cdot AC}{\frac{1}{2} PB \cdot AC} = \frac{DP}{BP} = 2.$$

Ответ: 2.

930. Так как $O_1A = 3$, $O_2A = 4$, $O_1O_2 = 5$, то $\triangle O_1O_2A$ является прямоугольным по теореме, обратной теореме Пифагора (см. рис. 151).

$$S_{O_1O_2A} = \frac{1}{2} \cdot O_1O_2 \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot S_{O_1O_2A}}{O_1O_2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot O_1A \cdot O_2A}{O_1O_2} = \frac{12}{5}.$$

$$AB = 2 \cdot AH = \frac{24}{5}.$$

Ответ: 4,8.

931. Пусть r — радиус данного круга, тогда площадь круга равна $\pi r^2 = \frac{9}{\pi}$,

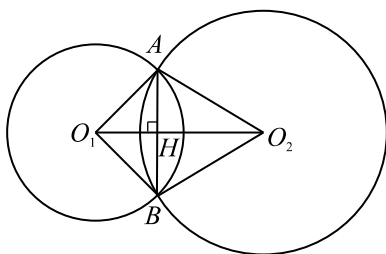


Рис. 151.

$r = \frac{3}{\pi}$. Длина окружности равна $2\pi r = 2\pi \cdot \frac{3}{\pi} = 6$.

Ответ: 6.

932. $\angle PQF$ — вписанный, $\angle PQF = \frac{1}{2} \smile PF$, значит,

$$\smile PF = 2\angle PQF = 2 \cdot 42^\circ = 84^\circ.$$

$\angle POF$ — центральный, $\angle POF = \smile PF = 84^\circ$.

$\angle KOP + \angle POF = 180^\circ$ как смежные, $\angle KOP = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$.

Ответ: 96.

933. $\angle MKF = \frac{1}{2}\angle MOF$ как вписанный и центральный, опирающиеся на одну дугу. $\angle MOF = 2\angle MKF = 76^\circ$. $\angle FON$ и $\angle MOF$ — смежные, поэтому $\angle FON = 180^\circ - \angle MOF = 104^\circ$.

Ответ: 104.

934. $\angle AOC = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$ (см. рис. 152).

$\smile DA = \angle AOD = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$.

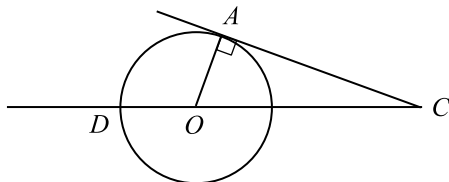


Рис. 152.

Ответ: 124.

935. $a = R\sqrt{2}$ (см. рис. 153), так как

$$(MQ)^2 = (2R)^2 = MP^2 + QP^2 = 2a^2, \text{ то есть } 4R^2 = 2a^2; a^2 = 2R^2,$$

$r = \frac{a}{2}$. $AB = 2r = a = 11\sqrt{2}$; $\frac{AC}{CB} = 7$. По теореме Пифагора

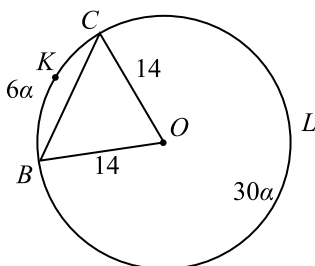


Рис. 155.

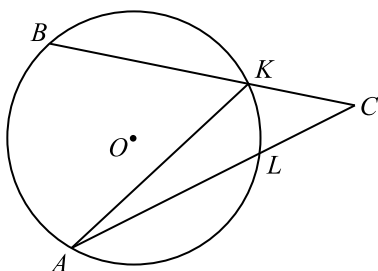


Рис. 156.

Ответ: 14.

939. Рассмотрим рисунок 157, где AB — данный отрезок.

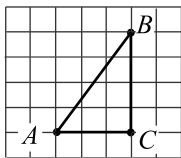


Рис. 157.

$\triangle ABC$ — прямоугольный, поэтому по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $AB^2 = 3^2 + 4^2$, $AB^2 = 25$, $AB = 5$.

Ответ: 5.

940. По рисунку можно найти координаты точек: $A(1; 1)$, $B(3; 5)$, $C(3; 2)$. Тогда $\overrightarrow{AB}(3-1; 5-1)$, $\overrightarrow{AB}(2; 4)$; $\overrightarrow{AC}(3-1; 2-1)$, $\overrightarrow{AC}(2; 1)$. Тогда $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Таким образом, $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{100} = 10$.

Ответ: 10.

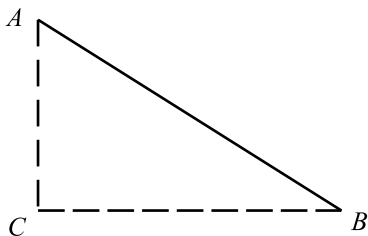


Рис. 158.

941. Так как точка M — середина отрезка BC , то её координаты:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2}; y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

Координаты точки A : $x_A = 0$; $y_A = -3$. Тогда

$$AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{\left(0 - \frac{5}{2}\right)^2 + (-3 - 3)^2} = 6,5.$$

Ответ: 6,5.

942. Высота трапеции составляет 4 клетки, меньшее основание — 1 клетка, большее основание — 7 клеток. Так как длина стороны одной клетки равна 1 см, то площадь трапеции равна $4 \cdot (1 + 7) \cdot \frac{1}{2} = 16$ (см²).

Ответ: 16.

943. Введём декартову систему координат, тогда вершины данного треугольника имеют координаты $A(0; 0)$, $B(3; 6)$ и $C(7; 2)$ (см. рис. 159).

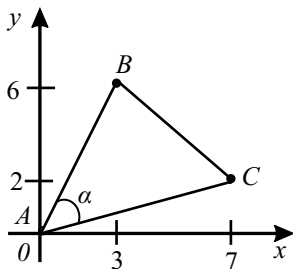


Рис. 159.

$$AB^2 = (3 - 0)^2 + (6 - 0)^2 = 45, AB = 3\sqrt{5};$$

$$BC^2 = (7 - 3)^2 + (2 - 6)^2 = 32, BC = 4\sqrt{2};$$

$$AC^2 = (7 - 0)^2 + (2 - 0)^2 = 53, AC = \sqrt{53}.$$

По теореме косинусов $\cos \alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{33}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{53}}$.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1089}{2385}} = \sqrt{\frac{1296}{2385}} = \frac{36}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{53}}, \text{ тогда}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{53} \cdot \frac{36}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{53}} = 18.$$

Ответ: 18.

944. Разделим четырёхугольник на части, как показано на рисунке.

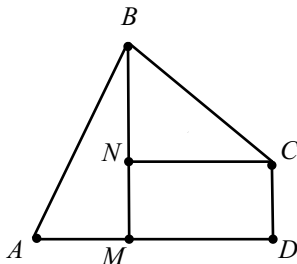


Рис. 160.

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BNC} + S_{MNCD}; S_{MNCD} = MD \cdot CD = 4 \cdot 2 = 8;$$

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} BM \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9; S_{\triangle BNC} = \frac{1}{2} BN \cdot NC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8;$$

$$S_{ABCD} = 8 + 9 + 8 = 25.$$

Ответ: 25.

945. Первый способ: площадь данного треугольника ABC можно вычислить по формуле $S = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2} = 17,5 \text{ см}^2$. Второй способ: площадь прямоугольника $BEFC$: $S_{BEFC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ACF}$. Таким образом, $S_{\triangle ABC} = S_{BEFC} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ACF} = 7 \cdot 5 - \frac{5 \cdot 1}{2} - \frac{6 \cdot 5}{2} = 17,5 \text{ см}^2$.

Ответ: 17,5.

946. Площадь данного треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$S = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ см}^2.$$

Ответ: 10.

947. Из рисунка видно, что основание треугольника (на рисунке это горизонтальный отрезок) равно 6, а высота также равна 6. Следовательно, его

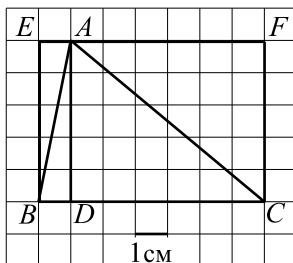


Рис. 161.

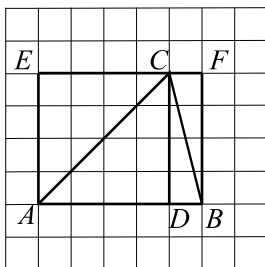


Рис. 162.

площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$.

Ответ: 18.

948. Примем за основание сторону треугольника, расположенную горизонтально. Тогда длина основания — 2 см, длина высоты — 4 см, площадь — $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$ (см²).

Ответ: 4.

949. $S_{ABCD} = S_{AMCN} - S_{\triangle AMB} - S_{\triangle CDN} = AN \cdot AM - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 6 \cdot 4 - 6 - 4 = 24 - 6 - 4 = 14$ (см. рис. 163).

Ответ: 14.

950. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$ (см. рис. 164).

Ответ: 3.

951. $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC (см. рис. 165).

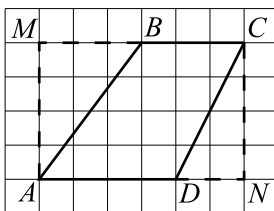


Рис. 163.

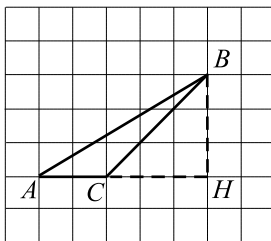


Рис. 164.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot h = \frac{1}{2}(7 + 10) \cdot 5 = 42,5.$$

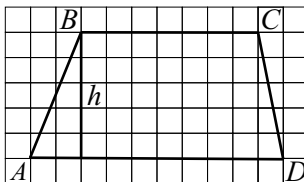


Рис. 165.

Ответ: 42,5.

952. Обозначим точки $O(0;0)$, $A(5;6)$, $B(9;4)$, $C(0;6)$, $D(9;6)$, $E(9;0)$. Тогда $S_{OAB} = S_{OCDE} - S_{OCA} - S_{ADB} - S_{OBE}$ (см. рис. 166).

Так как $OCDE$ — прямоугольник, OCA , ADB , OBE — прямоугольные треугольники, то

$$S_{OAB} = 9 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 54 - 15 - 4 - 18 = 17.$$

Ответ: 17.

953. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту: $S = AB \cdot DH = 3 \cdot 8 = 24$ (см. рис. 167).

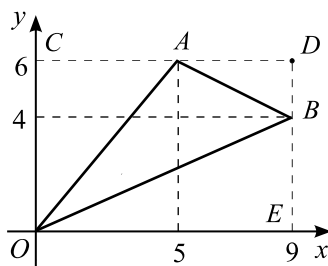


Рис. 166.

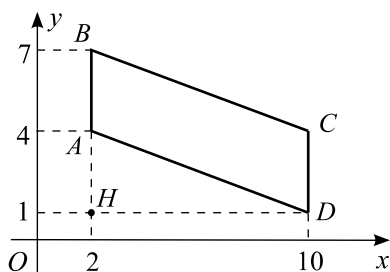


Рис. 167.

Ответ: 24.

$$954. S_{ABCD} = S_{MFEN} - 2S_{AMB} - 2S_{AFD} = 8 \cdot 6 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 = 48 - 5 - 7 = 36 \text{ (см. рис. 168).}$$

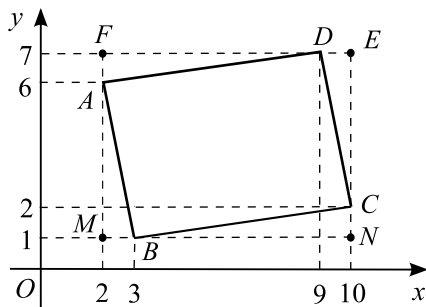


Рис. 168.

Ответ: 36.

$$955. S_{\text{трапеции}} = S_{\text{прямоуг.}} - 2S_{\Delta}; S_{\text{прямоуг.}} = 8 \cdot 6 = 48; S_{\Delta} = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8;$$

$$S_{\text{трапеции}} = 48 - 16 = 32.$$

Ответ: 32.

$$956. S_{\text{трапеции}} = \frac{(11 - 2) + (8 - 3)}{2} \cdot (6 - 1) = 35.$$

Ответ: 35.

$$957. S_{EKL T} = 11 \cdot 6 = 66 \text{ (см. рис. 169); } S_{CDL} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6;$$

$$S_{CKB} = \frac{3 \cdot 7}{2} = 10,5; S_{EBA} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10; S_{ATD} = \frac{1 \cdot 7}{2} = 3,5.$$

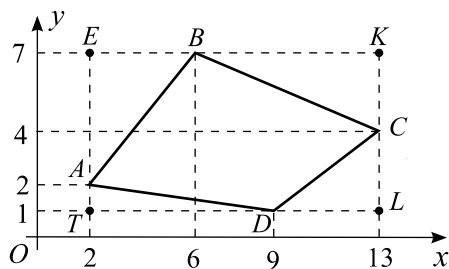


Рис. 169.

$$S_{ABCD} = S_{EKL T} - S_{CDL} - S_{CKB} - S_{EBA} - S_{ATD} =$$

$$= 66 - 6 - 10,5 - 10 - 3,5 = 36.$$

Ответ: 36.

$$958. S_{BTC} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6; S_{AKB} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9; S_{AED} = \frac{2 \cdot 10}{2} = 10;$$

$$S_{EKTD} = 10 \cdot 5 = 50 \text{ (см. рис. 170).}$$

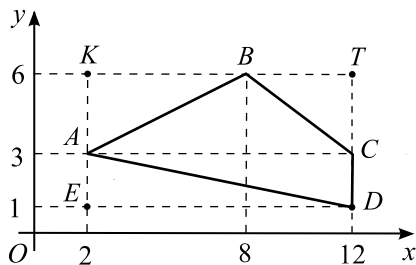


Рис. 170.

$$S_{ABCD} = S_{EKT D} - S_{BTC} - S_{AKB} - S_{AED} = \\ = 50 - 6 - 9 - 10 = 25.$$

Ответ: 25.

959. Сторона квадрата равна $AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = 2\sqrt{5}$ (см. рис. 171), тогда его площадь равна $(2\sqrt{5})^2 = 20$.

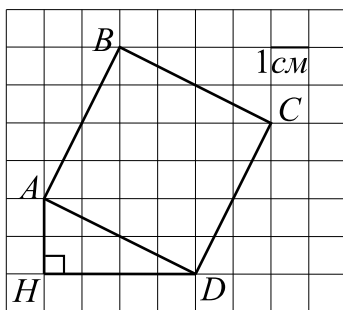


Рис. 171.

Ответ: 20.

960. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей. Диагонали ромба, изображённого на рисунке, равны 6 и 10.

$$\text{Следовательно, } S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 = 30.$$

Ответ: 30.

961. $S_{ABCD} = S_{MNEF} - S_{AMB} - S_{BNC} - S_{DCE} - S_{ADF}$ (см. рис. 6).

$$S_{MNEF} = 10 \cdot 7 = 70; \quad S_{AMB} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5; \quad S_{BNC} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6;$$

$$S_{DCE} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2; \quad S_{ADF} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24.$$

$$\text{Итак, } S_{ABCD} = 70 - 5 - 6 - 2 - 24 = 33.$$

Ответ: 33.

962. $S_{ABCD} = BH \cdot AD = 4 \cdot 8 = 32$ (см. рис. 172).

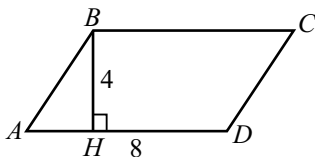


Рис. 172.

Ответ: 32.

963. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $S_{ABCD} = AH \cdot BC = 8 \cdot 4 = 32$ (см. рис. 173).

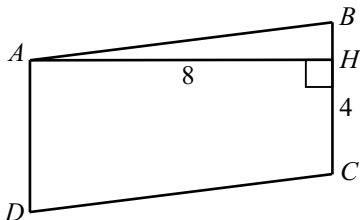


Рис. 173.

Ответ: 32.

964. $BC = 3$, $AD = 7$, $BH = 5$ (см. рис. 174).

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = \frac{3 + 7}{2} \cdot 5 = 25.$$

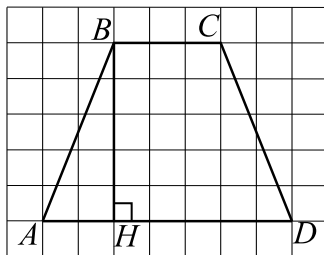


Рис. 174.

Ответ: 25.

965. $AC = BD = 4$ см (см. рис. 175). Так как это ромб, то его площадь равна половине произведения диагоналей: $S = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$.

Ответ: 8.

966. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 7,5$ (см. рис. 176).

Ответ: 7,5.

967. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC$ (см. рис. 177).

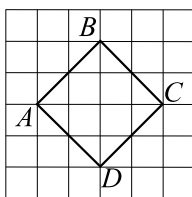


Рис. 175.

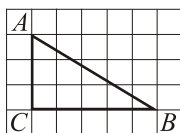


Рис. 176.

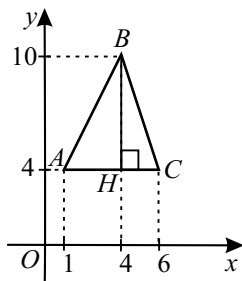


Рис. 177.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15.$$

Ответ: 15.

968. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC$ (см. рис. 178).

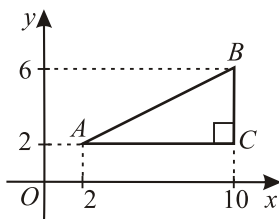


Рис. 178.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16.$$

Ответ: 16.

969. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot (BC + AD)$ (см. рис. 179).

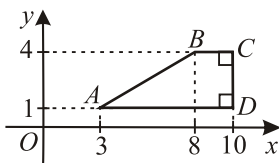


Рис. 179.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2 + 7) = 13,5.$$

Ответ: 13,5.

970. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot (BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (3 + 8) = 22$ (см. рис. 180).

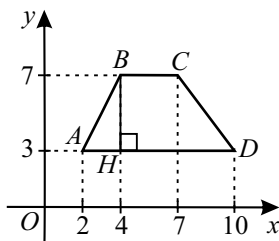


Рис. 180.

Ответ: 22.

971. Пусть B — точка, симметричная точке A относительно оси Ox (см. рис. 181).

Точка B имеет координаты $(-3; -5)$, ордината равна -5 .

Ответ: -5 .

972. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot (AB + CD) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (3 + 7) = 30$ (см. рис. 182).

Ответ: 30.

973. $ABCD$ — параллелограмм, так как $AB \parallel CD$ и $AB = CD = 3$ (см. рис. 183).

Тогда $S_{ABCD} = DH \cdot AB = 6 \cdot 3 = 18$.

Ответ: 18.

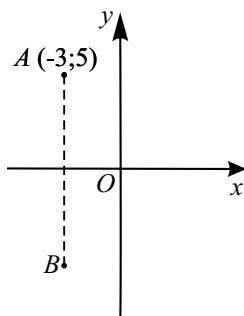


Рис. 181.

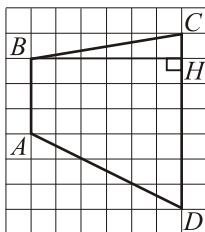


Рис. 182.

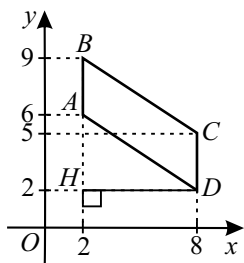


Рис. 183.

974. По теореме Пифагора сторона квадрата AB равна $\sqrt{AK^2 + KB^2}$ (см. рис. 184), то есть $AB = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$, откуда $S_{ABCD} = AB^2 = 29$.

Ответ: 29.

975. $S_{ABC} = S_{AKLM} - S_{AKB} - S_{BLC} - S_{CMA}$ (см. рис. 185).

$$S_{ABC} = 5 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 40 - 10 - 4 - 12 = 14.$$

Ответ: 14.

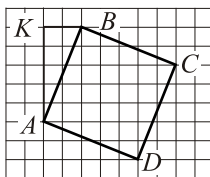


Рис. 184.

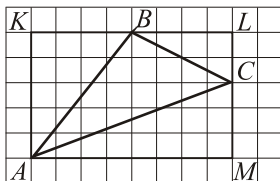


Рис. 185.

976. $S_{ABCD} = S_{OKLM} - S_{OAD} - S_{AKB} - S_{BLC} - S_{CMD}$ (см. рис. 186).

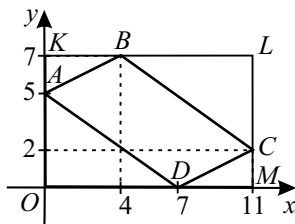


Рис. 186.

$$S_{ABCD} = 11 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 77 - 8 - 35 = 34.$$

Ответ: 34.

977. Нетрудно заметить, что указанный четырёхугольник является квадратом со стороной $AB = \sqrt{AK^2 + KB^2} = \sqrt{37}$ (см. рис. 187), откуда его площадь равна $S_{ABCD} = AB^2 = 37$.

Ответ: 37.

978. $S_{ABCD} = S_{AKLM} - S_{AKB} - S_{KBC} - S_{CLD} - S_{ADM}$ (см. рис. 188).

$$S_{ABCD} = 5 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 = 26,5.$$

Ответ: 26,5.

979. $S = S_{ABCD} - S_{KLMN}$ (см. рис. 189).

$ABCD$ и $KLMN$ — квадраты, тогда $S_{ABCD} = AB^2 = OA^2 + OB^2 =$

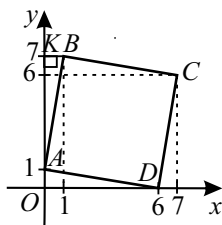


Рис. 187.

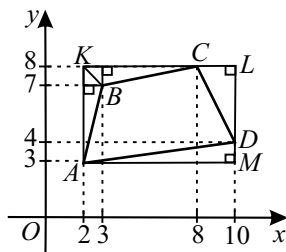


Рис. 188.

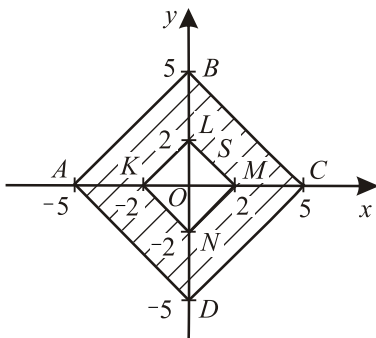


Рис. 189.

$$= 50, S_{KLMN} = KL^2 = OK^2 + OL^2 = 8, S = 50 - 8 = 42.$$

Ответ: 42.

980. $\vec{a}(4; 6)$, $\vec{b}(7; 3)$, тогда вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $(11; 9)$ и сумма его координат равна $11 + 9 = 20$.

Ответ: 20.

981. Рассмотрим треугольники OBC и OKL (см. рис. 190). Так как по условию $BC \parallel KL$, то эти треугольники подобны, откуда $\frac{OK}{OB} = \frac{OL}{OC}$ и

$OK = \frac{OB \cdot OL}{OC} = \frac{3 \cdot 2}{1} = 6$, тогда координата точки $K(0; 6)$, ординаты равна 6.

Ответ: 6.

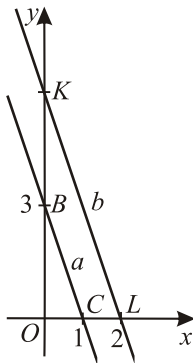


Рис. 190.

982. Так как $\overrightarrow{OA}(2; 5)$ и $\overrightarrow{CB}(8 - 6; 7 - 2)$; $CB = (2; 5)$, то векторы \overrightarrow{OA} и \overrightarrow{CB} равны, откуда в четырёхугольнике $OABC$ две стороны параллельны и равны. Значит, $OABC$ — параллелограмм, тогда P — середина AC и, значит, $P\left(\frac{2+6}{2}; \frac{5+2}{2}\right)$, $P(4; 3,5)$.

Ответ: 3,5.

983. Нетрудно заметить, что данный треугольник прямоугольный ($\angle ABC = 90^\circ$), значит, центр описанной окружности P лежит на середине гипотенузы AC . Так как $A(1; 5)$ и $C(5; -1)$, то $P\left(\frac{1+5}{2}; \frac{5-1}{2}\right)$, $P(3; 2)$.

Ответ: 3.

984. $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$, $|\overline{AC}| = AC = 15$, так как AC — большая диагональ ромба.

Ответ: 15.

985. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 = 14 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 14.

986. Основания трапеции равны 7 и 1, высота равна 5. Площадь трапеции

равна $\frac{7+1}{2} \cdot 5 = 20$ (см²).

Ответ: 20.

987. По рисунку $\vec{a}(6; 2)$, $\vec{b}(7; 5)$. Вектор $\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $(6 - 7; 2 - 5)$, то есть $(-1; -3)$. Сумма его координат равна $-1 - 3 = -4$.

Ответ: -4 .

988. Так как $ABCD$ — ромб, то $\vec{DO} = \vec{OB}$ и $\vec{AO} \perp \vec{OB}$.

$\vec{AO} + \vec{DO} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$. По теореме Пифагора для треугольника AOB $|\vec{AB}| = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{1,5}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} =$
 $= \sqrt{\frac{9+16}{16}} = \frac{5}{4} = 1,25$.

Ответ: 1,25.

989. Левое основание трапеции равно 8, правое — $7 - 3 = 4$, высота — $8 - 1 = 7$, площадь равна $\frac{8+4}{2} \cdot 7 = 42$.

Ответ: 42.

990. Построим прямоугольник (см. рис. 191), его площадь равна $7 \cdot 7 = 49$ (см²). Найдём площади S_1 и S_2 прямоугольных треугольников.

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3$ (см²); $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ (см²). Искомая площадь равна $49 - 4S_1 - S_2 = 49 - 12 - 6 = 31$ (см²).

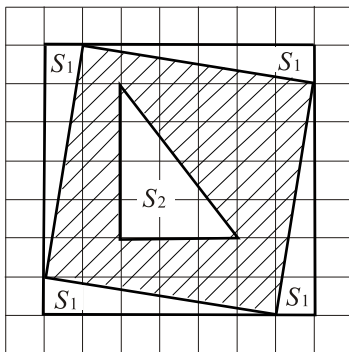


Рис. 191.

Ответ: 31.

991. Примем сторону треугольника, параллельную оси Oy , за основание,

её длина равна $6 - 2 = 4$. Тогда высота равна $10 - 2 = 8$. Площадь треугольника равна $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$.

Ответ: 16.

992. $\sin \angle BOK = \frac{BK}{OB}$ (см. рис. 192). $OB = \sqrt{BK^2 + OK^2} = \sqrt{13}$,

$\sin \angle AOB = \sin(180^\circ - \angle BOK) = \sin \angle BOK = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Значение синуса,

умноженное на $\sqrt{13}$, равно $\frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{13} = 3$.

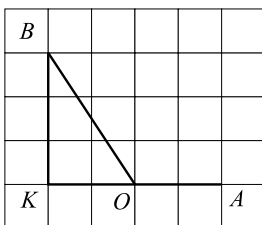


Рис. 192.

Ответ: 3.

993. Построим прямоугольник (см. рис. 193), его площадь равна $6 \cdot 7 = 42$.

Найдём площади S_1 и S_2 прямоугольных треугольников. $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3$;

$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 2,5$. Искомая площадь равна $42 - 2S_1 - 2S_2 = 42 - 6 - 5 = 31$.

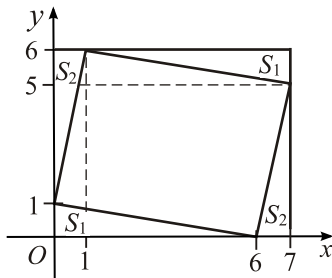


Рис. 193.

Ответ: 31.

994. Построим прямоугольник, его площадь равна $6 \cdot 9 = 54$ (см²) (см. рис. 194). Найдём площади S_1 , S_2 , S_3 прямоугольных треугольников.

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9 \text{ (см}^2\text{)}; S_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9 \text{ (см}^2\text{)}; S_3 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 = 13,5 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Искомая площадь равна $54 - 9 - 9 - 13,5 = 22,5 \text{ (см}^2\text{)}$.

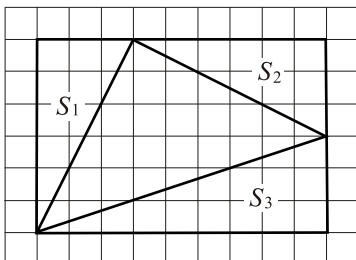


Рис. 194.

Ответ: 22,5.

995. Построим прямоугольник (см. рис. 195), его площадь равна $5 \cdot 7 = 35 \text{ (см}^2\text{)}$. Найдём площади S_1 и S_2 прямоугольных треугольников.

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 1,5 \text{ (см}^2\text{)}; S_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6 \text{ (см}^2\text{)}$. Искомая площадь равна $35 - 2S_1 - 2S_2 = 35 - 3 - 12 = 20 \text{ (см}^2\text{)}$.

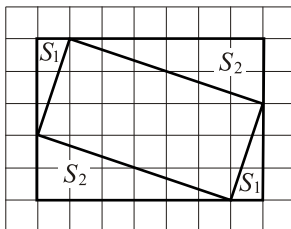


Рис. 195.

Ответ: 20.

996. Нижнее основание трапеции имеет длину $7 - 3 = 4$, верхнее — длину $9 - 7 = 2$. Высота трапеции равна $7 - 1 = 6$. Площадь трапеции равна $\frac{4+2}{2} \cdot 6 = 18$.

Ответ: 18.

997. Построим прямоугольник (см. рис. 196), его площадь равна $(9 - 1) \cdot 10 = 80$. Найдём площади прямоугольных треугольников S_1, S_2, S_3, S_4 и пря-

моугольника S_5 . $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (9 - 5) = 20$; $S_2 = \frac{1}{2} \cdot (10 - 6) \cdot (5 - 1) = 8$;

$S_3 = \frac{1}{2} \cdot (6 - 3) \cdot (3 - 1) = 3$; $S_4 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (9 - 3) = 9$; $S_5 = (3 - 1) \cdot 3 = 6$.

Искомая площадь равна $80 - 20 - 8 - 3 - 6 - 9 = 34$ (см²).

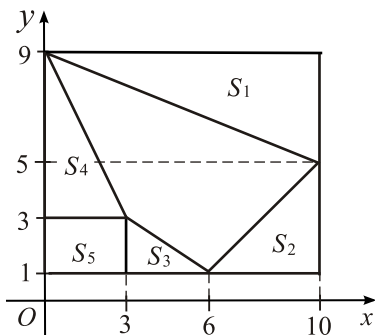


Рис. 196.

Ответ: 34.

998. Диагонали большего ромба равны $4 + 4 = 8$ и $6 + 6 = 12$, площадь — $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48$. Диагонали меньшего ромба равны $2 + 2 = 4$ и

$2 + 2 = 4$, площадь — $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$. Площадь закрашенной фигуры равна $48 - 8 = 40$ (см²).

Ответ: 40.

999. Абсцисса середины отрезка равна среднему арифметическому абсцисс его концов: $\frac{-5+2}{2} = -1,5$.

Ответ: $-1,5$.

1000. Радиус большого круга равен 4, площадь — 16π . Радиус малого круга равен 2, площадь — 4π . $S = 16\pi - 4\pi = 12\pi$; $\frac{S}{\pi} = 12$.

Ответ: 12.

1001. Построим прямоугольник (см. рис. 197), его площадь равна $(5 + 4) \cdot 8 = 72$. Найдём площади прямоугольных треугольников S_1, S_2, S_3, S_4 и пря-

моугольника S_5 . $S_1 = \frac{1}{2} \cdot (-2 + 4) \cdot 8 = 8$; $S_2 = \frac{1}{2} \cdot (5 + 2) \cdot (8 - 5) = 10,5$;

$S_3 = \frac{1}{2} \cdot (5 - 2) \cdot (5 - 3) = 3$; $S_4 = \frac{1}{2} \cdot (2 + 4) \cdot 3 = 9$; $S_5 = (5 - 2) \cdot 3 = 9$.

Искомая площадь равна $72 - 8 - 10,5 - 3 - 9 - 9 = 32,5$.

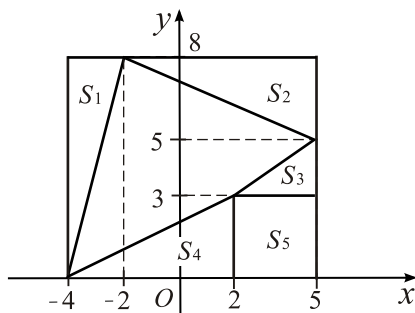


Рис. 197.

Ответ: 32,5.

1002. Построим прямоугольник (см. рис. 198), его площадь равна $8 \cdot 6 = 48$ (см²). Найдём площади S_1 , S_2 , S_3 прямоугольных треугольников.

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$ (см²); $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$ (см²); $S_3 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$ (см²).

Искомая площадь равна $48 - 3 - 9 - 12 = 24$ (см²).

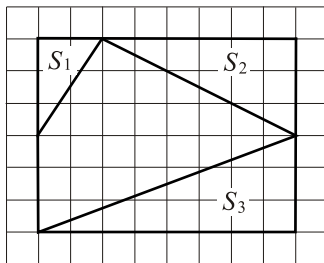


Рис. 198.

Ответ: 24.

1003. Построим прямоугольник (см. рис. 199), его площадь равна $8 \cdot 5 = 40$ (см²). Найдём площади прямоугольных треугольников S_1 , S_2 ,

S_3 и трапеции S_4 . $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ (см²); $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 = 4$ (см²);

$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5 \text{ (см}^2\text{)}; S_4 = \frac{3+2}{2} \cdot 2 = 5 \text{ (см}^2\text{)}$. Искомая площадь равна $40 - 12 - 4 - 4,5 - 5 = 14,5 \text{ (см}^2\text{)}$.

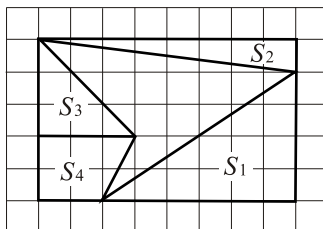


Рис. 199.

Ответ: 14,5.

1004. Площадь сектора вычисляется по формуле $S = \frac{lr}{2}$, где l — длина дуги, r — радиус. Отсюда $l = \frac{2S}{r}, l = \frac{2 \cdot 9}{4} = 4,5$.

Ответ: 4,5.

1005. Данный треугольник — прямоугольный. Его гипотенуза может быть найдена по теореме Пифагора: $\sqrt{(4+2)^2 + (4+4)^2} = \sqrt{100} = 10$. Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности находится на середине гипотенузы, радиус равен половине гипотенузы, то есть $\frac{10}{2} = 5$.

Ответ: 5.

1006. $S_{\text{пов.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$ (см. рис. 200).

$$S_{\text{осн.}} = S_{ABCD} = 8^2 = 64, S_{\text{бок.}} = 4S_{SDC} = 4 \cdot \frac{DC \cdot SK}{2}.$$

$$SK = \sqrt{SD^2 - \left(\frac{DC}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3. S_{\text{бок.}} = 4 \cdot \frac{8 \cdot 3}{2} = 48.$$

$$S_{\text{пов.}} = 48 + 64 = 112.$$

Ответ: 112.

1007. Апофема пирамиды равна $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см. рис. 201). Площадь боковой грани равна $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$. Тогда площадь всей боковой поверхности равна $6 \cdot 60 = 360$.

Ответ: 360.

1008. Пусть S — площадь основания первой пирамиды, а h — её высота,

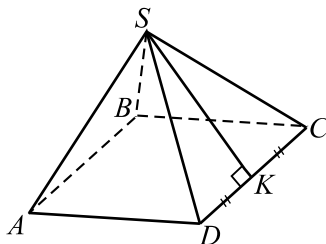


Рис. 200.

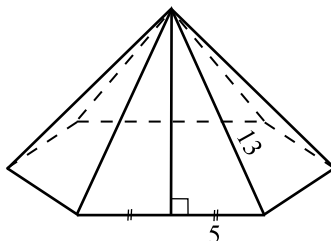


Рис. 201.

тогда $\frac{1}{3}Sh = V_1$, следовательно, $V_2 = \frac{1}{3}(6S)\left(\frac{1}{3}h\right) = 2V_1 = 2 \cdot 24 = 48 \text{ м}^3$.

Ответ: 48.

1009. Из прямоугольного треугольника ASO по теореме Пифагора получаем: $OA^2 = SA^2 - SO^2 = 13^2 - 5^2 = 144$; $OA = 12$. Так как $CO = OA$, то $CA = 2 \cdot OA = 24$. Так как сторона квадрата в $\sqrt{2}$ раз меньше его диагонали, то $DA = \frac{CA}{\sqrt{2}} = \frac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$. Объём пирамиды

равен $V = \frac{1}{3} \cdot DA^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 2 \cdot 5 = 480$.

Ответ: 480.

1010. Из условия следует, что отрезок SH является высотой пирамиды и равен 3. Так как SH — высота, то угол SHC прямой. Так как

$\text{ctg} \angle SDH = \frac{DH}{SH}$, то $DH = SH \cdot \text{ctg} \angle SDH = 3 \text{ctg} 30^\circ = 3\sqrt{3}$. Площадь квадрата в основании пирамиды равна $S = DC^2 = (2DH)^2 = (2 \cdot 3\sqrt{3})^2 = 108$. Объём пирамиды равен $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot 3 = 108$.

Ответ: 108.

1011. Примем за основание пирамиды треугольник ABS (см. рис. 202), тогда высота пирамиды $h = CS$. Площадь прямоугольного треугольника ABS равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot BS = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18. \text{ Объём пирамиды равен}$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36.$$

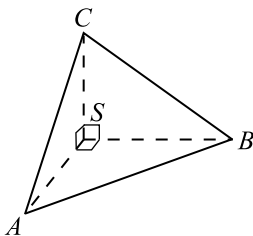


Рис. 202.

Ответ: 36.

1012. Каждая боковая грань пирамиды является равнобедренным треугольником с основанием 14 и боковыми сторонами, равными 25. Проводя в этом треугольнике высоту (являющуюся одновременно медианой), мы можем найти её длину по теореме Пифагора: $h^2 = 25^2 - \left(\frac{14}{2}\right)^2 = 576$;

$h = 24$. Тогда площадь одной боковой грани равна $\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 14 = 168$. Искомая площадь равна $168 \cdot 5 = 840$.

Ответ: 840.

1013. Так как высота у обеих пирамид общая, то их объёмы относятся так же, как площади их оснований. Обозначим сторону правильного шестиугольника $ABCDEF$ через a . Тогда $S_{ABCDEF} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} a^2 \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Отсюда видно, что площадь шестиугольника в 6 раз больше площади треугольника ABC , поэтому объём шестиугольной пирамиды в 6 раз больше объёма треугольной пирамиды и равен $2 \cdot 6 = 12$.

Ответ: 12.

1014. Так как все рёбра тетраэдра равны между собой, то тетраэдр правильный. Стороны четырёхугольника, являющегося сечением, — это

средние линии граней (треугольников), на которых они лежат. Поэтому каждая из сторон четырёхугольника равна половине ребра тетраэдра, то есть 1,5. Диагонали этого четырёхугольника равны, так как являются расстояниями между серединами противоположных граней тетраэдра, а все эти расстояния равны между собой в силу симметрии этого тетраэдра. Следовательно, четырёхугольник в сечении — квадрат, так как является ромбом с равными диагоналями. Его площадь равна $1,5^2 = 2,25$.

Ответ: 2,25.

1015. Пусть $DABC$ — данная пирамида, DO — её высота (см. рис. 203). Так как пирамида правильная, то O — центр правильного $\triangle ABC$, OB — радиус описанной около него окружности и $OB = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$; $AB = OB\sqrt{3}$.

Из $\triangle DOB$ по теореме Пифагора $OB^2 = DB^2 - DO^2 = 16^2 - 8^2 = 3 \cdot 8^2$; $OB = 8\sqrt{3}$, $AB = 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 24$.

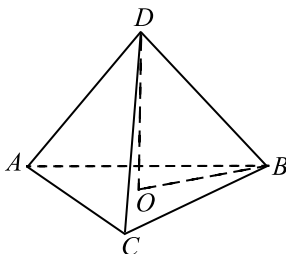


Рис. 203.

Ответ: 24.

1016. Пусть $EABCD$ — данная пирамида (см. рис. 204), тогда $ABCD$ — квадрат и $AC = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$; $AO = \frac{AC}{2} = 3\sqrt{2}$. По теореме Пифагора из $\triangle AOE$ $AE^2 = AO^2 + OE^2 = 18 + 126 = 144$; $AE = 12$.

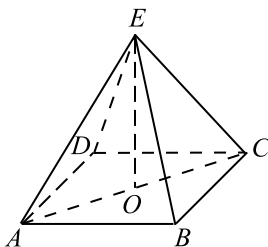


Рис. 204.

Ответ: 12.

1017. Пусть $EABCD$ — данная пирамида и $ECD \perp ABC$, EH — высота (см. рис. 205). Так как $EH \perp ABC$ и $HD \perp AD$, то по теореме о трёх перпендикулярах $ED \perp AD$ и $\angle EDH = 30^\circ$, так как является линейным углом двугранного угла между плоскостью EDA и плоскостью основания пирамиды. Из прямоугольного $\triangle EDH$ имеем $HD = EH \operatorname{ctg} 30^\circ = 5\sqrt{3}$. Аналогично $HC = 5\sqrt{3}$, поэтому $CD = HC + HD = 10\sqrt{3}$.

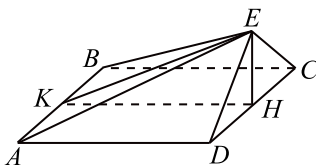


Рис. 205.

Опустив из точки H перпендикуляр HK на отрезок AB , получаем $\angle EKH = 30^\circ$ как линейный угол двугранного угла между плоскостью EBA и плоскостью основания пирамиды. Из прямоугольного $\triangle EKH$ имеем $KH = EH \operatorname{ctg} 30^\circ = 5\sqrt{3}$. Площадь прямоугольника в основании пирамиды равна $S_{\text{осн.}} = AD \cdot CD = KH \cdot CD = 5\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} = 150$. Объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h = \frac{1}{3} \cdot 150 \cdot 5 = 250$.

Ответ: 250.

1018. Так как пирамида $SABCD$ правильная, то точка O — центр квадрата $ABCD$ и $AO = \frac{AC}{2} = 12$. SO — высота пирамиды, поэтому $SO \perp AO$ и из $\triangle AOS$ по теореме Пифагора имеем $SO^2 = AS^2 - AO^2 = 13^2 - 12^2 = 25$; $SO = 5$.

Ответ: 5.

1019. При увеличении всех линейных размеров фигуры в 1,7 раза площадь поверхности этой фигуры увеличится в $1,7^2 = 2,89$ раза.

Ответ: 2,89.

1020. Пусть $DABC$ — данная пирамида, DO — её высота, DH — апофема. Так как пирамида правильная, то O — центр правильного $\triangle ABC$ (см. рис. 206), OH — радиус вписанной в него окружности и $OH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} =$

$= 3\sqrt{3}$. Из $\triangle DOH$ по теореме Пифагора имеем
 $DO^2 = DH^2 - OH^2 = 14^2 - (3\sqrt{3})^2 = 169, DO = 13$.

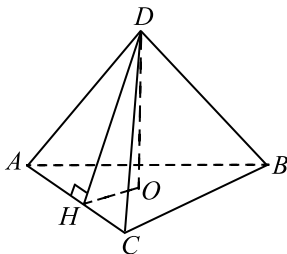


Рис. 206.

Ответ: 13.

1021. Так как сторона основания больше в 2 раза, то площадь основания больше в 4 раза. Так как объём воды не изменяется, то её уровень уменьшится в 4 раза: $20 : 4 = 5$.

Ответ: 5.

1022. $V = S_{\text{осн}} \cdot h = 3\sqrt{3}, h = \frac{3\sqrt{3}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 4}{6 \cdot 2^2\sqrt{3}} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

1023. Так как диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, то сторона ромба равна $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ (см. рис. 207). Тогда $S_{\text{бок. п.}} = 13 \cdot 4 \cdot 20 = 1040$.

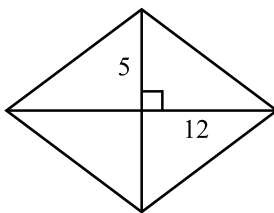


Рис. 207.

Ответ: 1040.

1024. Пусть a — сторона основания призмы, h — ее высота.

$$S_{\text{пов}} = 2S_{\text{осн}} + 4S_{\text{бок гр}} = 2a^2 + 4 \cdot a \cdot h = 2a^2 + 4ah = 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 \cdot 6 = 200 + 240 = 440.$$

Ответ: 440.

1025. Так как $S_{AA_1C_1C} = 2S_{AA_1N_1N}$, $S_{AA_1B_1B} = 2S_{AA_1M_1M}$ и

$$\begin{aligned}
 S_{BB_1C_1C} &= 2S_{MM_1N_1N} \text{ (см. рис. 208), то} \\
 S_{\text{бок.}ABCA_1B_1C_1} &= S_{AA_1C_1C} + S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} = \\
 &= 2S_{AA_1N_1N} + 2S_{AA_1M_1M} + 2S_{MM_1N_1N} = \\
 &= 2S_{\text{бок.}AMNA_1M_1N_1} = 2 \cdot 18 = 36.
 \end{aligned}$$

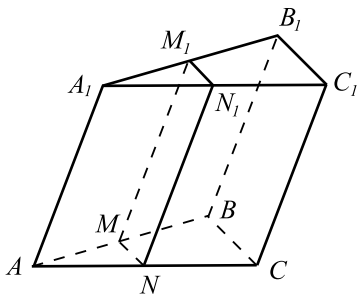


Рис. 208.

Ответ: 36.

1026. Данный многогранник составлен из двух прямоугольных параллелепипедов (см. рис. 209). Их суммарный объём равен $5 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 54$.

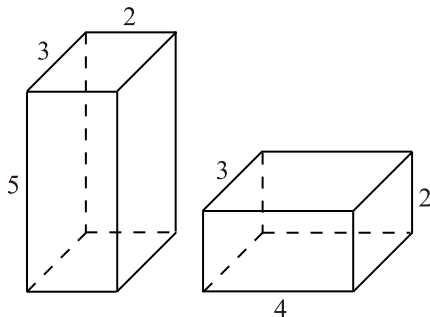


Рис. 209.

Ответ: 54.

1027. Площади передней и задней граней равны $7 \cdot 8 - (7 - 3) \cdot (8 - 4) = 40$ каждая; суммарная площадь верхних граней равна площади нижней грани и равна $3 \cdot 8 = 24$; суммарная площадь правых граней равна площади левой грани и равна $7 \cdot 3 = 21$. Таким образом, площадь всей поверхности многогранника равна $40 \cdot 2 + 24 \cdot 2 + 21 \cdot 2 = 170$.

Ответ: 170.

1028. По теореме Пифагора гипотенуза треугольника в основании призмы

равна $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$. Периметр этого треугольника равен $9 + 12 + 15 = 36$, поэтому площадь боковой поверхности призмы (равная произведению периметра основания на высоту) равна $36 \cdot 10 = 360$. Площадь основания равна $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$ (половина произведения катетов).

Площадь всей поверхности равна $360 + 54 \cdot 2 = 468$.

Ответ: 468.

1029. Так как треугольники, лежащие в основаниях обеих призм подобны с коэффициентом подобия 2, то площадь основания исходной призмы в $2^2 = 4$ раза больше площади основания отсечённой призмы. У обеих призм общая высота, поэтому $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 h}{S_2 h} = \frac{S_1}{S_2} = 4$, где V_1 и S_1 — объём и площадь основания исходной призмы, V_2 и S_2 — отсечённой. Из последнего равенства получаем $V_1 = 4V_2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12.

1030. Проведя из центра правильного шестиугольника в основании призмы отрезки ко всем его вершинам, мы разобьём этот шестиугольник на шесть правильных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$. Площадь всего шестиугольника равна

$6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$. Объём правильной призмы получим, умножив площадь основания на длину бокового ребра: $V = 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 144$.

Ответ: 144.

1031. Обозначим через h общую высоту параллелепипеда и пирамиды, V_1 — объём пирамиды, V_2 — объём параллелепипеда. Тогда искомый

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{ACD} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} h = \frac{1}{6} V_2 = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5.$$

Ответ: 5.

1032. Пусть $\angle CAC_1 = 30^\circ$, $\angle D_1AC_1 = 45^\circ$, $\angle B_1AC_1 = 45^\circ$. Тогда из прямоугольных треугольников CAC_1 , D_1AC_1 , B_1AC_1 соответственно получаем: $CC_1 = AC_1 \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$; $D_1C_1 = AC_1 \sin 45^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= 6\sqrt{2}$; $B_1C_1 = AC_1 \sin 45^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$. Искомый объём $V = CC_1 \cdot D_1C_1 \cdot B_1C_1 = 6 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 432$.

Ответ: 432.

1033. Обозначим через V объём параллелепипеда. Тогда

$$\begin{aligned}
 V_{A_1ABD} &= \frac{1}{3} \cdot AA_1 \cdot S_{ABD} = \frac{1}{3} \cdot AA_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{6} \cdot AA_1 \cdot AB \cdot AD = \\
 &= \frac{1}{6} \cdot V = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2. \text{ Аналогично } V_{A_1DD_1C_1} = 2, \quad V_{A_1BB_1C_1} = 2 \text{ и } \\
 &V_{C_1BCD} = 2. \text{ Найдём искомый объём:} \\
 V_{A_1DBC_1} &= V - V_{A_1ABD} - V_{A_1DD_1C_1} - V_{A_1BB_1C_1} - V_{C_1BCD} = \\
 &= 12 - 2 - 2 - 2 - 2 = 4.
 \end{aligned}$$

Ответ: 4.

1034. Из прямоугольного треугольника DC_1C (см. рис. 210) по теореме Пифагора имеем $DC_1^2 = DC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AA_1^2 = 6^2 + 9^2 = 117$.

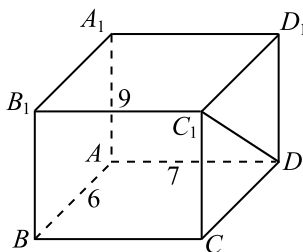


Рис. 210.

Ответ: 117.

1035. Так как уровень жидкости равен 18 см при объёме 720 см^3 , то площадь основания призмы равна $\frac{720}{18} = 40 \text{ (см}^2\text{)}$. Если уровень жидкости равен 21 см, суммарный объём жидкости и детали равен $21 \cdot 40 = 840 \text{ (см}^3\text{)}$. Таким образом, объём детали равен $840 - 720 = 120 \text{ (см}^3\text{)}$.

Ответ: 120.

1036. По условию $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник со стороной 9,3 (см. рис. 211). Пусть O — центр этого правильного шестиугольника. Тогда C_1F_1 проходит через O , причём $C_1O = OF_1 = A_1B_1$ (так как радиус описанной около правильного шестиугольника окружности равен его стороне). Отсюда $C_1F_1 = 2A_1B_1 = 18,6$.

Ответ: 18,6.

1037. $CA_1B_1C_1D_1$ — пирамида с основанием $A_1B_1C_1D_1$ и вершиной C . Объём этой пирамиды равен

$$\frac{1}{3} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1} \cdot CC_1 = \frac{1}{3} \cdot B_1C_1 \cdot D_1C_1 \cdot CC_1 = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 8 \cdot 4 = 128.$$

Ответ: 128.

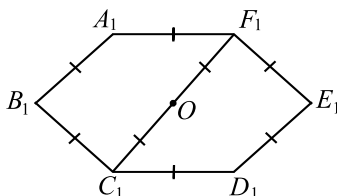


Рис. 211.

1038. Так как боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 60° , то высота призмы $h = 8\sqrt{3} \sin 60^\circ = 12$. Объём призмы равен $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 2,5^2 \cdot 12 = 75$.

Ответ: 75.

1039. Из прямоугольного треугольника B_1CB (см. рис. 212) имеем $\operatorname{tg} \angle B_1CB = \frac{BB_1}{BC} = \frac{AA_1}{AD} = \frac{17}{17\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Отсюда $\angle B_1CB = 30^\circ$.

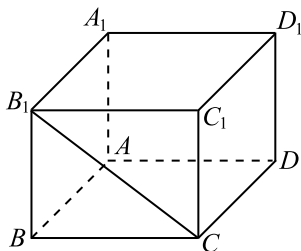


Рис. 212.

Ответ: 30.

1040. По теореме Пифагора $AD_2^2 = AA_1^2 + A_1D_2^2 = AA_1^2 + (AD - D_1D_2)^2 = 28 + (11 - 5)^2 = 64$; $AD_2 = 8$. Так как $AB \perp AD_2$, то $\operatorname{ctg} \angle ABD_2 = \frac{AB}{AD_2} = \frac{A_1B_1}{AD_2} = \frac{4}{8} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

1041. Площадь трапеции $CDEF$ равна половине площади шестиугольника $ABCDEF$ (см. рис. 213), поэтому объём призмы $CDEFC_1D_1E_1F_1$ равен половине объёма данной шестиугольной призмы, то есть равен $\frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 8 = 68$.

Ответ: 68.

1042. По теореме Пифагора $BA_2^2 = BB_1^2 + A_2B_1^2 = AD_1^2 +$

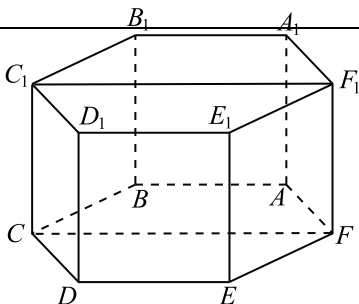


Рис. 213.

$+(AB - D_1A_2)^2 = 6^2 + 8^2 = 100$; $BA_2 = 10$. $BA_3^2 = (AB - D_1A_2)^2 + (AD_1 + B_2B_3)^2 = 8^2 + 9^2 = 145$; $A_2A_3 = B_2B_3 = 3$. По теореме косинусов для $\triangle BA_2A_3$ $BA_3^2 = A_2A_3^2 + BA_2^2 - 2 \cdot A_2A_3 \cdot BA_2 \cdot \cos \angle BA_2A_3$; $145 = 3^2 + 10^2 - 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot \cos \angle BA_2A_3$; $60 \cos \angle BA_2A_3 = -36$; $\cos \angle BA_2A_3 = -0,6$.

Ответ: $-0,6$.

1043. Искомый объём многогранника равен половине объёма параллелепипеда и равен $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 22 \cdot 6 = 264$.

Ответ: 264.

1044. По теореме Пифагора имеем $AB_2^2 = AA_2^2 + A_2B_2^2 = (AD - A_2D_2)^2 + (AA_1 - C_2D_1)^2 + A_2B_2^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2 + 4^2 = 12 + 36 + 16 = 64$; $AB_2 = 8$. $BB_2^2 = (AD - A_2D_2)^2 + (AA_1 - C_2D_1)^2 + (AB - A_2B_2)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2 + 4^2 = 64$; $BB_2 = 8$. Следовательно, $\triangle ABB_2$ — равносторонний и $\angle AB_2B = 60^\circ$.

Ответ: 60.

1045. Все рёбра прямоугольного параллелепипеда равны диаметру сферы, то есть $23,5 \cdot 2 = 47$. Объём параллелепипеда равен $47^3 = 103\,823$.

Ответ: 103 823.

1046. По теореме Пифагора $A_1E^2 = A_1F^2 + FE^2 = A_1A^2 + AF^2 + FE^2 = A_1A^2 + (BC + DE)^2 + (AB + CD)^2 = 2^2 + 11^2 + 10^2 = 225$; $AE = 15$.

Ответ: 15.

1047. По теореме Пифагора $AA_2^2 = (AD - E_1D_1)^2 + (AA_1 - B_2E_1)^2 = (7 - 2)^2 + (6 - 1)^2 = 50$; $AB_2^2 = AA_2^2 + A_2B_2^2 = 50 + 4 = 54$.

Ответ: 54.

1048. Так как все углы правильного шестиугольника равны 120° , то $\angle AFE = 120^\circ$ и из $\triangle AFE$ (см. рис. 214) имеем

$$\begin{aligned}
 AE^2 &= AF^2 + FE^2 - 2 \cdot AF \cdot FE \cos \angle AFE = \\
 &= 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-0,5) = 12.
 \end{aligned}$$

Из прямоугольного треугольника $AE E_1$ по теореме Пифагора имеем $AE_1^2 = AE^2 + EE_1^2 = 12 + 19^2 = 373$.

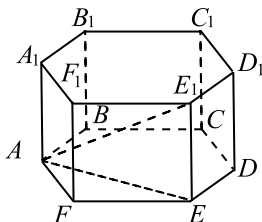


Рис. 214.

Ответ: 373.

1049. Площадь прямоугольного треугольника в основании призмы равна $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 14 = 336$, его гипотенуза равна $\sqrt{48^2 + 14^2} = \sqrt{2500} = 50$, а периметр равен $P_{\text{осн.}} = 48 + 14 + 50 = 112$. Так как $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$, то $S_{\text{бок.}} = 728 - 2 \cdot 336 = 56$. Из формулы $S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h$ получаем $112h = 56$; $h = 0,5$.

Ответ: 0,5.

1050. Так как все углы правильного шестиугольника равны 120° , то $\angle ABC = 120^\circ$ и из $\triangle ABC$ (см. рис. 215) имеем $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot (-0,5) = 192$; $AC = 8\sqrt{3}$.

Из прямоугольного $\triangle AC_1C$ $\operatorname{tg} \angle AC_1C = \frac{AC}{CC_1} = \frac{8\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3}$, поэтому $\angle AC_1C = 60^\circ$.

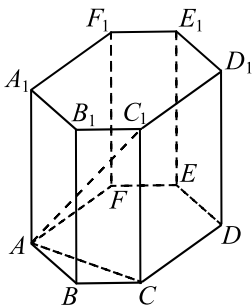


Рис. 215.

Ответ: 60.

1051. Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора (см. рис. 216) $AC^2 = AB^2 + BC^2 =$

$$= 4^2 + 4^2 = 32; \quad AC = 4\sqrt{2}. \quad \text{Пусть } K \text{ — середина ребра } AA_1.$$

Тогда $AK = \frac{AA_1}{2} = 4\sqrt{2}$. Из $\triangle CAK$ по теореме Пифагора

$$CK^2 = AC^2 + AK^2 = 32 + 32 = 64; \quad CK = 8.$$

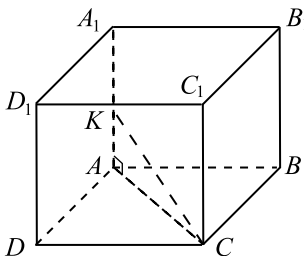


Рис. 216.

Ответ: 8.

1052. DB_1 — диагональ прямоугольного параллелепипеда, поэтому $DB_1^2 = AB^2 + AA_1^2 + AD^2 = 17,5^2 + 17,5^2 + 2 \cdot 17,5^2 = 4 \cdot 17,5^2 = 35^2$; $DB_1 = 35$.

Ответ: 35.

1053. Пусть a — сторона куба. Тогда по теореме Пифагора $a^2 + a^2 = (3\sqrt{2})^2$. Следовательно, $a = 3$. Тогда $V = a^3 = 27$.

Ответ: 27.

1054. Пусть a — ребро куба, тогда площадь поверхности куба равна $6a^2$. Если ее увеличить на 144, она станет равной $6a^2 + 144$. Пусть x — разность между новым значением длины ребра куба и a . Тогда $6(a+x)^2 = 6a^2 + 144$; $6(5+x)^2 = 6 \cdot 25 + 144$; $6(5+x)^2 = 294$; $(5+x)^2 = 49$; $5+x = 7$; $x = 2$.

Ответ: 2.

1055. $V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = 3V_{A_1 B C_1 D} = 3 \cdot 3 = 9$.

Ответ: 9.

1056. $V_{AEFA_1 E_1 F_1} = S_{AEF} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF \cdot AA_1 =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AD\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AB\right) \cdot AA_1 = \frac{1}{8} V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = \frac{1}{8} \cdot 20 = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

1057. Обозначим длину ребра куба через a . Так как квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений, то $(\sqrt{48})^2 = a^2 + a^2 + a^2$; $3a^2 = 48$; $a = 4$. Отсюда находим объём куба: $V = a^3 = 4^3 = 64$.

Ответ: 64.

1058. Объём конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус его основания, h — высота, а образующая l вычисляется по формуле $l = \sqrt{h^2 + r^2}$.

По условию $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$, $h_2 = 2h_1$, $l_2 = 2l_1$. Так как в любом конусе выполняется

$$l^2 = h^2 + r^2, \text{ то } r_2^2 = l_2^2 - h_2^2 = (2l_1)^2 - (2h_1)^2 = 4(l_1^2 - h_1^2) = 4r_1^2, r_2 = 2r_1.$$

Тогда имеем:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi (2r_1)^2 2h_1 = 8\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = 8V_1 = 8 \cdot 6 = 48.$$

Ответ: 48.

1059. Объём части конуса составляет $\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12}$ от объёма конуса.

$$V_{\text{конуса}} = \frac{10 \cdot \pi \cdot 36}{3} = 120\pi. V = \frac{1}{12} V_{\text{конуса}} = 10\pi. \text{ Тогда } \frac{V}{\pi} = 10.$$

Ответ: 10.

1060. Пусть R — радиус основания первого конуса, а h — его высота, тогда $\frac{1}{3}\pi R^2 h = V_1$, значит, $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h}{4} \cdot (2R)^2 = \frac{1}{3}\pi R^2 h = V_1 = 18 \text{ м}^3$.

Ответ: 18.

1061. Объём конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}Sh$ (S — площадь основания, h — высота), высота конуса не меняется, а площадь основания пропорциональна квадрату диаметра $\left(S = \frac{\pi d^2}{4}\right)$. Поэтому объём уменьшится в $2,5^2 = 6,25$ раза.

Ответ: 6,25.

1062. Обозначив через h_1 и r_1 соответственно высоту и радиус основания большего конуса, получаем, что высота меньшего конуса $h_2 = \frac{h_1}{2}$. Из подобия треугольников, являющихся осевыми сечениями конусов, следует, что радиус основания меньшего конуса $r_2 = \frac{r_1}{2}$. Тогда искомый

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 h_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{8} \cdot V_1 = \frac{1}{8} \cdot 20 = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

1063. Введём обозначения: S — вершина конуса, SO — высота конуса, OK — радиус основания конуса (см. рис. 217). Тогда

$SO = \frac{1}{2}SK = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ как катет, лежащий против угла 30° в прямоугольном треугольнике SOK . По теореме Пифагора для этого же треугольника: $OK^2 = SK^2 - SO^2 = 10^2 - 5^2 = 75$. Искомый объём $V = \frac{1}{3}\pi \cdot OK^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \cdot 75 \cdot 5 = 125\pi$. Искомое значение $\frac{V}{\pi}$ равно 125.

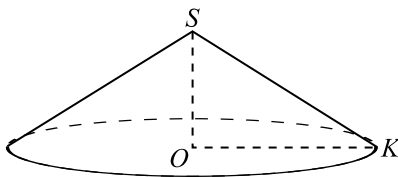


Рис. 217.

Ответ: 125.

1064. Так как треугольник MSK — равнобедренный с основанием MK , то его высота SO является одновременно биссектрисой, $\angle KSO =$

$= \frac{1}{2}\angle KSM = 45^\circ$. Радиус $KO = \frac{1}{2}KM = 6$. В $\triangle SOK$ находим $\angle SKO = 180^\circ - \angle SOK - \angle OSK = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Видно, что $\triangle SOK$ — равнобедренный (углы при основании SK равны) и $SO = KO = 6$. Отсюда находим искомое значение:

$$V \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3}\pi \cdot OK^2 \cdot OS \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 6 = 72.$$

Ответ: 72.

1065. Из формулы площади полной поверхности конуса $S = \pi r(r + l)$ получаем $90\pi = 5\pi(l + 5)$; $l + 5 = 18$; $l = 13$ (см. рис. 218). По теореме Пифагора имеем $h^2 = l^2 - r^2$; $h^2 = 13^2 - 5^2 = 144$; $h = 12$.

Ответ: 12.

$$\mathbf{1066.} \quad V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 93 \cdot \frac{360^\circ - 45^\circ}{360^\circ} = 434\pi; \quad \frac{V}{\pi} = 434.$$

Ответ: 434.

1067. Пусть S — вершина обоих конусов, SO_1 и SO_2 — их высоты, O_1A_1

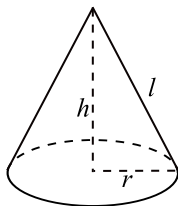


Рис. 218.

и O_2A_2 — радиусы оснований (см. рис. 219). $\triangle SO_1A_1 \sim \triangle SO_2A_2$ как прямоугольные с общим острым углом, поэтому $\frac{O_1A_1}{O_2A_2} = \frac{SO_1}{SO_2} = \frac{1}{2}$.

По условию $\frac{1}{3}\pi \cdot O_1A_1^2 \cdot SO_1 = 13,5$. Находим объём большого конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot O_2A_2^2 \cdot SO_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot (2O_1A_1)^2 \cdot (2SO_1) = 8 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot O_1A_1^2 \cdot SO_1 = 8 \cdot 13,5 = 108.$$

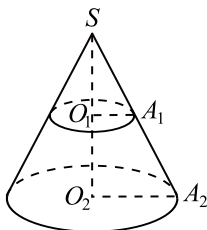


Рис. 219.

Ответ: 108.

1068. Диаметр основания конуса равен диагонали квадрата в основании пирамиды, то есть равен $24\sqrt{2}$. Так как конус и пирамида имеют общую высоту, то объём конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi d^2 h = \frac{1}{12}\pi \cdot 24^2 \cdot 2 \cdot 2,5 = 240\pi$; $\frac{V}{\pi} = 240$.

Ответ: 240.

1069. $S_{\text{бок.}} = 2\pi r h$. Тогда $8\pi = 2\pi \cdot r \cdot 2$; $r = 2$. Значит, диаметр основания цилиндра $d = 2r = 4$.

Ответ: 4.

1070. Так как объём воды в цилиндрическом сосуде прямо пропорциона-

лен высоте уровня воды ($V = Sh$), то, обозначив искомый объём через x , получим $\frac{5000}{24} = \frac{x}{18}$; $x = \frac{5000 \cdot 18}{24} = 3750 \text{ см}^3$.

Ответ: 3750.

$$1071. V = \pi \cdot 14^2 \cdot 9 \cdot \frac{360^\circ - 72^\circ}{360^\circ} = 1411,2\pi; \frac{V}{\pi} = 1411,2.$$

Ответ: 1411,2.

1072. Данная фигура составлена из цилиндра с радиусом основания 5 и высотой 7 и половины цилиндра с радиусом основания 5 и высотой 3. Отсюда $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 3 = 212,5\pi$; $\frac{V}{\pi} = 212,5$.

Ответ: 212,5.

1073. Так как объём шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара, то

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = 64; \frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{64} = 4. \text{ Отсюда отношение площадей поверхностей } \frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 4^2 = 16.$$

Ответ: 16.

1074. Из условия следует, что радиусы оснований цилиндра и конуса совпадают. Обозначим r — радиус основания конуса, l — его образующая.

$$S_{\text{п.п.ц}} = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot 10 = 2\pi(r^2 + 10r), S_{\text{п.п.к}} = \pi r^2 + \pi r l.$$

$$S_{\text{п.п.ц}} = 2 \cdot S_{\text{п.п.к}}, 2\pi r(r + 10) = 2\pi r(r + l), r + 10 = r + l, l = 10.$$

Ответ: 10.

1075. Так как объём конуса равен объёму цилиндра, то $\frac{1}{3}S_{\text{осн.кон.}} \cdot h_{\text{кон.}} = S_{\text{осн.цил.}} \cdot h_{\text{цил.}}$, где $S_{\text{осн.кон.}}$, $S_{\text{осн.цил.}}$, $h_{\text{кон.}}$ и $h_{\text{цил.}}$ — площади оснований и высоты конуса и цилиндра соответственно. Тогда $S_{\text{осн.кон.}} =$

$$= 3S_{\text{осн.цил.}} \cdot \frac{h_{\text{цил.}}}{h_{\text{кон.}}} = 3 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 22,5.$$

Ответ: 22,5.

1076. Так как радиус вписанной сферы равен радиусу основания цилиндра, то $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2 = 4S_{\text{осн}} = 4 \cdot 24 = 96$, где R , $S_{\text{сф}}$ и $S_{\text{осн}}$ — радиус вписанной сферы, площадь её поверхности и площадь основания цилиндра соответственно.

Ответ: 96.

1077. Пусть $ABCD$ — осевое сечение цилиндра, тогда $\frac{\pi \cdot AD^2}{4} = 4\pi$, $AD = 4$. $\angle ACD = \alpha$ — угол между образующей цилиндра и диагональю его осевого сечения. $AC = \frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{4}{0,2} = 20 = 2r$, где r — радиус шара, $r = 10$. $S_{\text{пов.}} = 4\pi r^2 = 400\pi$; $\frac{S_{\text{пов.}}}{S_{\text{осн.}}} = \frac{400\pi}{4\pi} = 100$.

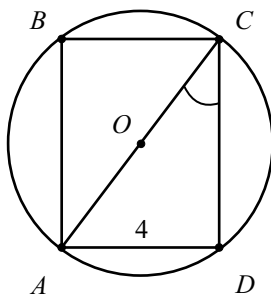


Рис. 220.

Ответ: 100.

1078. Рассмотрим правильный тетраэдр $DABC$ (см. рис. 221).

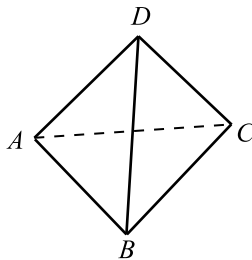


Рис. 221.

Пусть $AB = a$, тогда $BC = AC = DA = DB = DC = a$. $\triangle ABC$ — правильный, его площадь равна $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, тогда площадь поверхности тетраэдра равна

$S_{\text{п.п.}} = S_{ABC} + S_{ADB} + S_{ADC} + S_{BDC} = 4S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$. По условию $S_{\text{п.п.}} = 18 \text{ см}^2$, $a^2\sqrt{3} = 18$.

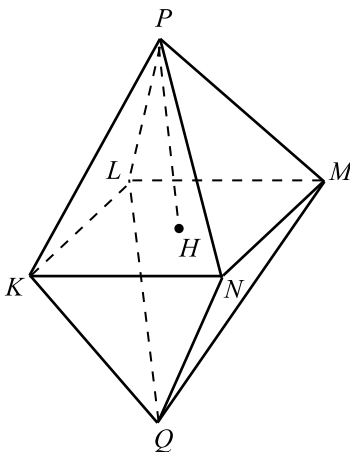


Рис. 222.

Из условия следует, что каждое ребро октаэдра является средней линией грани тетраэдра, значит все рёбра октаэдра равны между собой и равны $\frac{a}{2}$.

Рассмотрим правильный октаэдр (см. рис. 222).

Каждая грань октаэдра — правильный треугольник со стороной $\frac{a}{2}$, его площадь равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. У октаэдра 8 граней, поэтому площадь его поверхности равна $S = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

Ответ: 9.

1079. В качестве основания параллелепипеда выберем грань, содержащую одно из оснований цилиндра. Так как в эту грань вписано основание цилиндра — окружность радиуса $\sqrt[3]{2}$, то эта грань является квадратом со стороной $2\sqrt[3]{2}$. Площадь основания параллелепипеда равна $(2\sqrt[3]{2})^2$. Высота параллелепипеда равна высоте цилиндра, то есть равна $\sqrt[3]{2}$. Таким образом, объём параллелепипеда равен $(2\sqrt[3]{2})^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 8$.

Ответ: 8.

1080. $V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = S_{\text{осн.}} \cdot AA_1 = AB \cdot AD \cdot AA_1$, $AD = 2R = 6$, $V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = 72$, $AA_1 = \frac{72}{6 \cdot 6} = \frac{72}{36} = 2$.

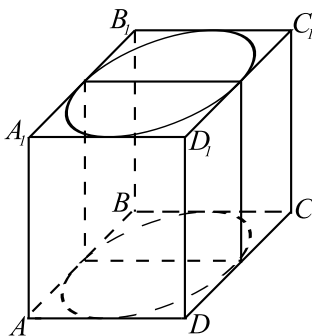


Рис. 223.

Ответ: 2.

1081. $V_{\text{пар.}} = S_{\text{осн.}} \cdot h$. Так как сторона основания равна $2R$, то $S_{\text{осн.}} = (2R)^2 = 4R^2 = 4 \cdot 25 = 100$, где R — радиус основания цилиндра. Тогда $V_{\text{пар.}} = 100 \cdot 7 = 700$.

Ответ: 700.

1082. По теореме Пифагора найдем гипотенузу основания призмы, которая также является диаметром цилиндра: $d = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Тогда $V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 13^2 \cdot \frac{4}{\pi} = 169$, где r — радиус основания цилиндра, h — его высота, также являющаяся боковым ребром призмы.

Ответ: 169.

1083. Прямоугольный параллелепипед, описанный около сферы, является кубом, ребро которого $a = 2R$, где R — радиус вписанной сферы. Его объем $V = a^3 = (2R)^3 = (2 \cdot 2,5)^3 = 5^3 = 125$.

Ответ: 125.

1084. Так как $V_{\text{цилиндра}} = S_{\text{осн.}} \cdot h$, а $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot h$, то $V_{\text{цилиндра}} = 3V_{\text{конуса}} = 3 \cdot 15 = 45$.

Ответ: 45.

1085. Пусть высота цилиндра равна h . Тогда из формулы объема цилиндра $V_{\text{цил.}} = \pi R^2 h$ можно выразить квадрат радиуса окружности в основании цилиндра: $R^2 = \frac{V}{\pi h} = \frac{\pi \sqrt{3}}{\pi h} = \frac{\sqrt{3}}{h}$. Тогда квадрат стороны треугольника в основании пирамиды равен: $a^2 = 3R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{h}$. Площадь этого тре-

угольника равна: $S_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4h} = \frac{9}{4h}$. Объём пирамиды равен:

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\Delta}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4h} \cdot h = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

1086. $V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 \cdot h$, $V_{DABC} = \frac{1}{3}DO \cdot S_{\Delta ABC}$ (см. рис. 224).

$S_{\Delta ABC} = 3R^2\sqrt{3}$, тогда $V_{DABC} = \frac{1}{3}h \cdot 3R^2\sqrt{3} = R^2h\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$, откуда

$R^2h = \frac{1}{\pi}$. $V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2h = \pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1$.

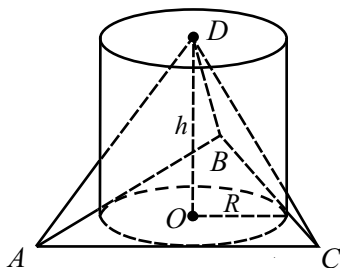


Рис. 224.

Ответ: 1.

1087. $V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 \cdot h = \pi\sqrt{3}$, $R^2h = \sqrt{3}$.

$V_{DABC} = \frac{1}{3}DO \cdot S_{\Delta ABC}$ (см. рис. 225).

$S_{\Delta ABC} = 3R^2\sqrt{3}$, тогда $V_{DABC} = \frac{1}{3}h \cdot 3R^2\sqrt{3} = R^2h\sqrt{3} = 3$.

Ответ: 3.

1088. $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2h$, $V_{\text{цил.}} = \pi R^2h$, тогда $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}V_{\text{цил.}} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$.

Ответ: 4.

1089. Пусть a — сторона основания призмы, h — высота призмы (и цилиндра), R — радиус основания цилиндра.

$S_{\text{бок. пр.}} = 4ah$, $4ah = 12$, $8a = 12$, $a = 1,5$.

$2R = a$, $R = \frac{a}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75$.

Ответ: 0,75.

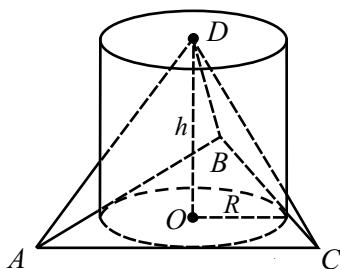


Рис. 225.

1090. По условию прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, значит, в основании параллелепипеда — квадрат со стороной $a = 2R$, где R — радиус основания цилиндра; $a = 2 \cdot 1 = 2$. Высота параллелепипеда h равна высоте цилиндра; $h = 1$. Объём параллелепипеда найдём по формуле $V = a^2 \cdot h$; $V = 2^2 \cdot 1 = 4$.

Ответ: 4.

1091. По условию шар вписан в цилиндр. Значит, высота цилиндра h равна диаметру шара, то есть $h = 2r$, где r — радиус шара.

$$\frac{v_{\text{ц}}}{v_{\text{ш}}} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\pi r^2 \cdot 2r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{2}, \quad v_{\text{ц}} = \frac{3}{2}v_{\text{ш}} = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12.$$

Ответ: 12.

1092. Так как цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед, то нижняя грань параллелепипеда является квадратом со стороной, равной диаметру основания цилиндра, то есть равной $5 \cdot 2 = 10$. Площадь нижней грани параллелепипеда равна $10 \cdot 10 = 100$. Находим высоту параллелепипеда как отношение его объёма к площади основания: $\frac{400}{100} = 4$. Так как высота параллелепипеда является одновременно и высотой цилиндра, то искомое значение также равно 4.

Ответ: 4.

1093. Объём конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}Sh$, а объём цилиндра по формуле $V = Sh$ (S — площадь основания, h — высота). Так как основание и высота у цилиндра и у конуса общие, то объём конуса составляет $\frac{1}{3}$ от объёма цилиндра и равен $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$.

Ответ: 20.

1094. Из формулы $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ для радиуса окружности, описанной около правильного треугольника, выражаем сторону основания призмы: $a = R\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$. Периметр основания призмы равен $P = 3a = 3 \cdot 9 = 27$. Площадь боковой поверхности равна $P \cdot h = 27 \cdot 7 = 189$.

Ответ: 189.

1095. По условию $V_{\text{ц}} = \pi r_{\text{ц}}^2 h_{\text{ц}} = 9$. По формуле объёма конуса

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi r_{\text{к}}^2 h_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi \cdot (3r_{\text{ц}})^2 \cdot \frac{1}{2} h_{\text{ц}} = 1,5 \pi r_{\text{ц}}^2 h_{\text{ц}} = 1,5 V_{\text{ц}} = 1,5 \cdot 9 = 13,5.$$

Ответ: 13,5.

1096. ОДЗ: $y > -1, y \neq 0$.

$$\begin{cases} -\log_2 \frac{y}{x} + \log_2(y+1) = \log_2 3, \\ 2^{2x+2y} \cdot 2^{2y} - 2^{y^2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 \frac{(y+1) \cdot x}{y} = \log_2 3, \\ 2^{2x+4y} = 2^{y^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(y+1) \cdot x}{y} = 3, \\ 2x + 4y = y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3y}{y+1}, \\ x = \frac{y^2 - 4y}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3y}{y+1}, \\ \frac{3y}{y+1} = \frac{y^2 - 4y}{2}. \end{cases} \quad \text{Решим вто-}$$

рое уравнение системы. $\frac{3y}{y+1} = \frac{y^2 - 4y}{2}, 6y = y^3 - 4y^2 + y^2 - 4y,$

$y^3 - 3y^2 - 10y = 0$. Так как $y \neq 0$, разделим обе части уравнения на y . $y^2 - 3y - 10 = 0; y_1 = 5, y_2 = -2$ — не удовлетворяет условию $y > -1$.

Если $y = 5$, то $x = \frac{5}{2}$.

Проверка:

Первое уравнение. $\log_{0,5} 2 + \log_2(5+1) = -\log_2 2 + \log_2 6 = \log_2 3, \log_2 3 = \log_2 3$.

Второе уравнение. $4^{7,5} \cdot 4^5 - 2^{25} = 2^{25} - 2^{25} = 0, 0 = 0$.

Ответ: $\left(\frac{5}{2}; 5\right)$.

1097. $x > 0$. Прологарифмируем первое уравнение по основанию 2.

$$\begin{cases} y \log_2 x = 6, \\ \log_2 x = y - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y(y-1) = 6, \\ \log_2 x + 1 = y. \end{cases}$$

Решим первое уравнение. $y^2 - y - 6 = 0; y_1 = 3, y_2 = -2$.

1) Если $y = 3$, то $\log_2 x = 3 - 1, x = 4$. $(4; 3)$ — решение системы.

2) Если $y = -2$, то $\log_2 x = -3$, $x = \frac{1}{8}$. $(\frac{1}{8}; -2)$ — решение системы.

Ответ: $(4; 3); (\frac{1}{8}; -2)$.

1098. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} y \cdot y^{\log_y x^2} - 4y^2 - 3y = 0, & \begin{cases} yx^2 - 4y^2 - 3y = 0, \\ 1 + \log_x y = 2 \log_y x; \end{cases} \\ \log_x(xy) = \log_y x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(x^2 - 4y - 3) = 0, & \begin{cases} x^2 - 4y - 3 = 0 \quad (*), \\ \log_y x + 1 = 2 \log_y^2 x. \end{cases} \\ 1 + \frac{1}{\log_y x} = 2 \log_y x; \end{cases}$$

Решим второе уравнение. $\log_y x + 1 = 2 \log_y^2 x$, $2 \log_y^2 x - \log_y x - 1 = 0$.

Пусть $\log_y x = t$, $2t^2 - t - 1 = 0$; $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

1) $\log_y x = 1$, $x = y$. Подставим $x = y$ в уравнение (*). $y^2 - 4y - 3 = 0$, $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+3}$; $y_1 = 2 + \sqrt{7}$, $y_2 = 2 - \sqrt{7}$ — не удовлетворяет условию $y > 0$. $x = 2 + \sqrt{7}$, $y = 2 + \sqrt{7}$.

2) $\log_y x = -\frac{1}{2}$. $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$, подставим в уравнение (*). $\frac{1}{y} - 4y - 3 = 0$,

$$1 - 4y^2 - 3y = 0, \quad 4y^2 + 3y - 1 = 0; \quad y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{1}{4}. \quad y = -1$$

не удовлетворяет условию $y > 0$. Если $y = \frac{1}{4}$, то $x = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$, $x = 2$. В

области допустимых значений проведены равносильные преобразования.

$(2 + \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7}); (2; \frac{1}{4})$ — решения системы.

Ответ: $(2 + \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7}); (2; \frac{1}{4})$.

1099. ОДЗ: $x > 0$. Рассмотрим второе уравнение системы.

$$x^{y+1} - 3^{12} \cdot x = 0, \quad x(x^y - 3^{12}) = 0. \quad \text{Так как } x \neq 0, \text{ то } x^y - 3^{12} = 0, \quad x^y = 3^{12}.$$

Подставим $x^y = 3^{12}$ в первое уравнение. $y^2 - \log_3 3^{12} = y$, $y^2 - y - 12 = 0$, $y_1 = 4$; $y_2 = -3$.

1) Если $y = 4$, то $x^4 = 3^{12}$; $x^4 = 27^4$; $x = \pm 27$. Так как $x > 0$, то $(27; 4)$ — решение системы.

2) Если $y = -3$, то $x^{-3} = 3^{12}$, $\left(\frac{1}{x}\right)^3 = 81^3$, $\frac{1}{x} = 81$, $x = \frac{1}{81}$. $\left(\frac{1}{81}; -3\right)$ — решение системы. Проверка показывает, что обе пары являются решениями системы.

Ответ: $(27; 4); \left(\frac{1}{81}; -3\right)$.

$$1100. \begin{cases} 4^{(x-y)^2+x} = 4^{x+1}, \\ 5^{x+y-1} = 5^2. \end{cases}$$

Если $a > 0$, $a \neq 1$, то показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$, поэтому $\begin{cases} (x-y)^2 + x = x+1, \\ x+y-1 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 1, \\ x+y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y = 1, \\ x-y = -1; \end{cases} \\ x+y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x-y = 1, \\ x+y = 3; \\ x-y = -1, \\ x+y = 3; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1; \\ x = 1, \\ y = 2. \end{cases} \end{cases}$$

$(2; 1); (1; 2)$ — искомые решения системы.

Ответ: $(2; 1), (1; 2)$.

$$1101. \text{ Обозначим } 3^x = a, a > 0; 2^{\frac{y}{2}} = b, b > 0, \text{ тогда} \\ \begin{cases} 3a^2 - 3b^2 = 231, \\ 2a - 2b = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 77, \\ a - b = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} (a-b)(a+b) = 77, \\ a - b = 7; \end{cases} \\ \begin{cases} 7(a+b) = 77, \\ a - b = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 11, \\ a - b = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 9, \\ b = 7. \end{cases}$$

Итак, $3^x = 9$, $3^x = 3^2$, $x = 2$, $2^{\frac{y}{2}} = 2$, $\frac{y}{2} = 1$, $y = 2$.

Преобразования равносильны. $(2; 2)$ — решение системы.

Ответ: $(2; 2)$.

1102. Выпишем ОДЗ: $x > 6$.

Обозначим $\log_2(x-5)$ через t , тогда $t^2 + t - 20 = 0$, откуда $t_1 = 4$, $t_2 = -5$.

1) $\log_2(x-5) = 4 \Rightarrow x = 21$, является корнем;

2) $\log_2(x-5) = -5 \Rightarrow x = 5 + \frac{1}{32}$ — не принадлежит ОДЗ.

Ответ: 21.

1103. ОДЗ: $-2 < x < 6$. На ОДЗ преобразуем исходное уравнение:

$$\log_2(6-x) \cdot \log_3(2x+4) + 3 = \log_2(6-x) + 3\log_3(2x+4);$$

$$\log_2(6-x)(\log_3(2x+4) - 1) - 3(\log_3(2x+4) - 1) = 0;$$

$$(\log_2(6-x) - 3)(\log_3(2x+4) - 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \log_2(6-x) - 3 = 0, & \begin{cases} 6-x = 2^3, \\ 2x+4 = 3^1; \end{cases} & \begin{cases} x = -2, \\ x = -0,5. \end{cases} \end{cases}$$

Из двух найденных корней входит в ОДЗ только корень $x = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

1104. ОДЗ: $-2\frac{1}{3} < x < 2$. Преобразуем исходное уравнение на ОДЗ:

$$\log_3(2-x) \cdot \log_2(3x+7) + 4 = 4\log_3(2-x) + \log_2(3x+7);$$

$$\log_3(2-x)(\log_2(3x+7) - 4) - (\log_2(3x+7) - 4) = 0;$$

$$(\log_3(2-x) - 1)(\log_2(3x+7) - 4) = 0;$$

$$\begin{cases} \log_3(2-x) - 1 = 0, & \begin{cases} 2-x = 3^1, \\ 3x+7 = 2^4; \end{cases} & \begin{cases} x = -1, \\ x = -3. \end{cases} \end{cases}$$

Из двух найденных корней входит в ОДЗ только корень $x = -1$.

Ответ: -1 .

$$\mathbf{1105.} \quad 5 \sin 6x - 5 \cos 6x - 2 \sin 12x + 4 = 0;$$

$$(5 \sin 6x - 5 \cos 6x) + 2(1 - \sin 12x) + 2 = 0;$$

$$5(\sin 6x - \cos 6x) + 2(\sin^2 6x + \cos^2 6x - 2 \sin 6x \cos 6x) + 2 = 0;$$

$2(\sin 6x - \cos 6x)^2 + 5(\sin 6x - \cos 6x) + 2 = 0$. Замена $\sin 6x - \cos 6x = t$, где $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$, приводит уравнение к виду $2t^2 + 5t + 2 = 0$; $t_1 = -2$,

$t_2 = -\frac{1}{2}$. Преобразуем разность $\sin 6x - \cos 6x$ в произведение:

$$t = \sin 6x - \cos 6x = 2 \sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$-2 \notin [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]. \text{ Имеем: } \sqrt{2} \sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}, \sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$6x - \frac{\pi}{4} =$$

$$= (-1)^{k+1} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k, k \in Z; x = \frac{(-1)^{k+1}}{6} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6},$$

$$k \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \frac{(-1)^{k+1}}{6} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z.$$

1106. ОДЗ: $x \neq \pi k$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. $\frac{\cos x - 1}{\cos x} + 2 \cos x = 0$;
 $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; $\cos x = t$; $-1 \leq t \leq 1$; $2t^2 + t - 1 = 0$; $t_1 = -1$, решения $\cos x = -1$ — не принадлежат ОДЗ. $t_2 = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

1107. ОДЗ: $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases} x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$3 \sin x - \frac{2 \sin x + 1}{\sin x} = 0$; $3 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$; $\sin x = t$; $3t^2 - 2t - 1 = 0$;

$t_1 = 1$ — не принадлежит ОДЗ, $t_2 = -\frac{1}{3}$.

$\sin x = -\frac{1}{3}$, $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

1108. ОДЗ: $x \neq \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Учитывая, что $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, получаем уравнение

$4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = 1 - 2 \cos x$, которое сводится к уравнению $\cos^2 x - 2 \cos x - 3 = 0$. Производим замену $\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$. Уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = -1$, $t_2 = 3$, из которых только первый удовлетворяет условию $-1 \leq t_1 \leq 1$. Из равенства $\cos x = -1$ следует $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, однако эти значения x не являются допустимыми для данного исходного уравнения, поэтому исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет корней.

1109. ОДЗ: $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$4 \cos^2 x + 4 = 2 \cos^2 x - 9 \cos x$. Пусть $\cos x = t$, $t \in [-1; 1]$, тогда $2t^2 + 9t + 4 = 0$. $t_1 = -4$ — не удовлетворяет условию $t \in [-1; 1]$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

$$\cos x = -\frac{1}{2}; x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$1110. \frac{2\sin^2 x + 11\sin x - 6}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x} = 0.$$

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2\sin^2 x + 11\sin x - 6 = 0, \\ 1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x \neq 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы. Обозначим $\sin x = t, |t| \leq 1$.

$$2t^2 + 11t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = -6; \end{cases} \quad t = -6 \text{ — не удовлетворяет условию } |t| \leq 1.$$

$$\text{Вернёмся к исходной переменной, } \sin x = \frac{1}{2}, \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} x \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (см. рис. 226), получаем $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

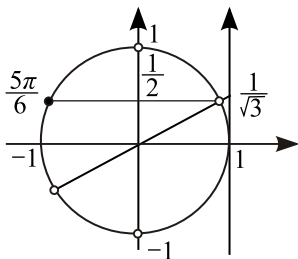


Рис. 226.

$$\text{Ответ: } \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$1111. \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 - \operatorname{tg} x} = 0.$$

$$\text{Уравнение равносильно системе } \begin{cases} \sin^2 x - \cos^2 x = 0, \\ 1 - \operatorname{tg} x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 x = \cos^2 x, \\ \operatorname{tg} x \neq 1; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}^2 x = 1, \\ \operatorname{tg} x \neq 1; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x \neq 1; \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$1112. \frac{\operatorname{tg}^3 x - 1}{\cos^2 x - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.$$

$$\text{ОДЗ: } \cos^2 x - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0, \text{ откуда } \cos x \neq 1, \cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } x \neq 2\pi k \text{ и } x \neq \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, решение исходного уравнения сводится к решению уравнения $\operatorname{tg}^3 x - 1 = 0$ на ОДЗ: $\operatorname{tg}^3 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Учитывая ОДЗ, получим, что } x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$1113. \frac{\operatorname{ctg}^5 x + 1}{\sin^2 x - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.$$

$$\text{ОДЗ: } \sin^2 x - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0, \text{ откуда } \sin x \neq 1, \sin x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, x \neq \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, x \neq \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, решение исходного уравнения сводится к решению уравнения $\operatorname{ctg}^5 x + 1 = 0$ на ОДЗ: $\operatorname{ctg}^5 x = -1 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Учитывая ОДЗ, получим, что } x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$1114. \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{-\cos x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{-\cos x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x < 0; \end{cases} \text{ — решений нет.}$$

$$2) \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x < 0; \end{cases} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ (см. рис. 227).}$$

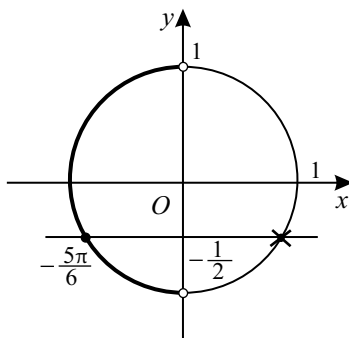


Рис. 227.

$$\text{Ответ: } x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$1115. \frac{12 \cos^4 x - \cos 2x - 3}{\sqrt{\sin x}} = 0, \frac{12 \cos^4 x - 2 \cos^2 x - 2}{\sqrt{\sin x}} = 0.$$

ОДЗ: $\sin x > 0$, то есть $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решим уравнение $12 \cos^4 x - 2 \cos^2 x - 2 = 0$.

Пусть $\cos^2 x = t$, $t \in [0; 1)$, тогда уравнение примет вид $12t^2 - 2t - 2 = 0$,

$t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{1}{2}$ — корни уравнения. $t_1 = -\frac{1}{3}$ не удовлетворяет условию $t \in [0; 1)$.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}, |\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая ОДЗ, имеем $x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

1116. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2 \cos^2 x - 2 \cos x + \sqrt{2} - 1 = 0, \\ \cos^2 x - \sin^2 x \neq 0. \end{cases}$$
 Производя замену $\cos x = t$ и учитывая тождественное равенство $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получаем

$$\begin{cases} 2t^2 - 2t + \sqrt{2} - 1 = 0, \\ t^2 - 1 + t^2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} t = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ t \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем уравнение $\cos x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1; 1]$, то решением последнего уравнения является

$$x = \pm \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

1117. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 2\sqrt{3} - 3 = 0, \\ \sin^2 x - 3 \cos^2 x \neq 0. \end{cases}$$
 Производя замену $\sin x = t$ и учитывая тождественное равенство $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получаем

$$\begin{cases} 4t^2 - 4t + 2\sqrt{3} - 3 = 0, \\ t^2 - 3 + 3t^2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \\ t \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем уравнение $\sin x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$, то решением последнего уравнения является

$$x = (-1)^n \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

1118. а) $2 \cos^2 x - 2 \sin 2x + 1 = 0$;
 $2 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$; $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$.
 Так как значения x , при которых $\cos x = 0$, не удовлетворяют уравнению, то, разделив на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$. Пусть $z = \operatorname{tg} x$. Тогда уравнение $z^2 - 4z + 3 = 0$ имеет корни $z_1 = 1$ и $z_2 = 3$. Значит, $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ и $\operatorname{tg} x = 3$, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$ — две серии решений.

б) Для первой серии решений из условия $0 \leq \frac{\pi}{4} + \pi n \leq \frac{\pi}{2}$ следует $-\frac{1}{4} \leq n \leq \frac{1}{4}$, отсюда $n = 0$ и $x = \frac{\pi}{4}$.

Для второй серии решений из рисунка 228 видно, что условию $0 \leq \operatorname{arctg} 3 + \pi k \leq \frac{\pi}{2}$ удовлетворяет только число $\operatorname{arctg} 3$, то есть $k = 0$.

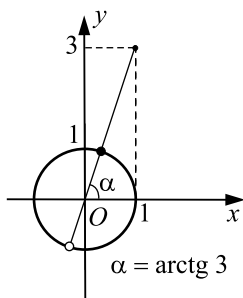


Рис. 228.

Таким образом, условию $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ удовлетворяют корни $x_1 = \frac{\pi}{4}$ и $x_2 = \operatorname{arctg} 3$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg} 3$.

$$\begin{aligned}
 1119. \text{ а) } & (2\sqrt{3} - 4) \cos^2 x - (2\sqrt{3} + 1) \sin 2x + 4 = 0; \\
 & (2\sqrt{3} - 4) \cos^2 x - 2(2\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + 4 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 0; \\
 & 2 \sin^2 x - (2\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0.
 \end{aligned}$$

Так как значения x , при которых $\cos x = 0$, не удовлетворяют уравнению, то, разделив на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение $2 \operatorname{tg}^2 x - (2\sqrt{3} + 1) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$. Пусть $z = \operatorname{tg} x$. Тогда уравнение $2z^2 - (2\sqrt{3} + 1)z + \sqrt{3} = 0$ имеет корни $z_1 = \sqrt{3}$ и $z_2 = \frac{1}{2}$. Значит, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}, x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ и $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}, x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n, k \in Z$ — две серии решений.

б) Для первой серии решений из условия $\pi \leq \frac{\pi}{3} + \pi k \leq \frac{3\pi}{2}$ следует $\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{7}{6}, k = 1$ и $x = \frac{4\pi}{3}$. Для второй серии решений $0 \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \pi \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi \leq \frac{3\pi}{2}$ и, ввиду $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \in (0; \frac{\pi}{2})$, при значениях $n \neq 1$ корни $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n \notin [\pi; \frac{3\pi}{2}]$.

Таким образом, условию $x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$ удовлетворяют корни $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi k, \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z$. б) $\frac{4\pi}{3}, \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi$.

$$1120. \text{ а) ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \Rightarrow x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

$$\frac{\sin^2 2x}{\operatorname{tg} x} + \sin 2x = 3 \cos x \sin 2x; \sin 2x (2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1) = 0.$$

1. $\sin 2x = 0$ — корни не входят в ОДЗ.

2. $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0; (\cos x - 1)(2 \cos x - 1) = 0;$
 $\cos x = 1$ — корни не входят в ОДЗ.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

б) Найдём корни из серий $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ на отрезке $[2\pi; 3\pi]$.

$$2\pi \leq \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 3\pi; 2 \leq \pm \frac{1}{3} + 2n \leq 3; \begin{cases} \frac{5}{3} \leq 2n \leq \frac{8}{3}, \\ \frac{7}{3} \leq 2n \leq \frac{10}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{6} \leq n \leq \frac{4}{3}, \\ \frac{7}{6} \leq n \leq \frac{10}{6}; \end{cases} \quad n = 1, \quad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; б) $\frac{7\pi}{3}$.

1121. а) Заметим, что значения x , при которых $\cos x = 0$, не являются решениями данного уравнения. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим $\frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{3 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$. Следовательно, $2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0$. Обозначим $t = \operatorname{tg} x$, тогда $2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Возвращаясь к исходной переменной, получим}$$

$$1) \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z;$$

$$2) \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k, k \in Z.$$

б) Найдём корни серии $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ на отрезке $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$. Имеем $2\pi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k \leq \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{4} \leq \pi k \leq \frac{9\pi}{4}; \frac{7}{4} \leq k \leq \frac{9}{4}; k = 2$ и $x = \frac{9\pi}{4}$.

Корни серии $x = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k$ лежат во II-й и IV-й четвертях, поэтому не принадлежат отрезку $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$, лежащему в I-й четверти.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k, k \in Z$; б) $\frac{9\pi}{4}$.

1122. а) Найдём ОДЗ: $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, откуда $x \neq \pi + 2\pi t, t \in Z$.

Уравнение $\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 3\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right) = 0$ перепишем как

$$\frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 = 0, \text{ а затем приведём к виду}$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 = 0, \text{ то есть } \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 4 = 0, \text{ откуда } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1,$$

$$\text{или } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 4.$$

Уравнение $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$ имеет решение $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$, откуда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Уравнение $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 4$ имеет решение $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 4 + \pi n, n \in Z$, откуда $x = 2 \operatorname{arctg} 4 + 2\pi n, n \in Z$. Все эти корни принадлежат ОДЗ.

Исходное уравнение имеет корни $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = 2 \operatorname{arctg} 4 + 2\pi n, n \in Z$.

б) Найдём корни, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.

В серии $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ $3\pi \leq 2\pi n - \frac{\pi}{2} \leq 4\pi; \frac{7}{4} \leq n \leq \frac{9}{4}$, так как n — целое, то $n = 2, x = 4\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$.

В серии $x = 2 \operatorname{arctg} 4 + 2\pi n, n \in Z$ $3\pi \leq 2 \operatorname{arctg} 4 + 2\pi n \leq 4\pi; \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} 4 \leq n \leq 2 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} 4$. Так как $\operatorname{arctg} 4 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $1 < n < 2$, но n — целое, а значит, решений нет.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2 \operatorname{arctg} 4 + 2\pi n, n \in Z$; б) $\frac{7\pi}{2}$.

1123. а) Найдём ОДЗ: $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, откуда $x \neq 2\pi l, l \in Z$.

Уравнение $\frac{\cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}} - 4\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 1\right) = 0$ перепишем как

$$\frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} - 4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 1 = 0, \text{ а затем приведём к виду}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 1 - 4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 1 = 0, \text{ то есть } \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 3 = 0, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 1 \text{ или } \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 3.$$

Уравнение $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 1$ имеет решение $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Уравнение $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 3$ имеет решение $x = 2 \operatorname{arccotg} 3 + 2\pi n, n \in Z$. Все эти корни принадлежат ОДЗ.

б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $[6\pi; 7\pi]$.

В серии $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ отрезку $[6\pi; 7\pi]$ принадлежит корень при $n = 3$, то есть $x = 6\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{2}$.

В серии $x = 2 \operatorname{arccotg} 3 + 2\pi n$ отрезку $[6\pi; 7\pi]$ принадлежит корень при $n = 3$, так как $2 \operatorname{arccotg} 3 \in (0; \pi), x = 6\pi + 2 \operatorname{arccotg} 3$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2 \operatorname{arccotg} 3 + 2\pi n, n \in Z$; б) $\frac{13\pi}{2}, 6\pi + 2 \operatorname{arccotg} 3$.

$$1124. \sqrt{(\sqrt{x+3}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+3}+2)^2 - 7} = 3;$$

$$\sqrt{x+3} + 2 + \sqrt{(\sqrt{x+3}+2)^2 - 7} = 3.$$

Пусть $t = \sqrt{x+3} + 2, t \geq 2$, тогда $t + \sqrt{t^2 - 7} = 3; \sqrt{t^2 - 7} = 3 - t$. Данное уравнение разрешимо только при $3 - t \geq 0$, то есть $t \leq 3$. При $t \leq 3$ имеем: $t^2 - 7 = (3 - t)^2; t^2 - 7 = 9 - 6t + t^2$, откуда $t = 2\frac{2}{3}, t = 2\frac{2}{3}$

удовлетворяет условию $2 \leq t \leq 3$. Вернёмся к замене: $\sqrt{x+3} + 2 = 2\frac{2}{3};$

$$\sqrt{x+3} = \frac{2}{3}; x+3 = \frac{4}{9}; x = -\frac{23}{9} = -2\frac{5}{9}.$$

Ответ: $-2\frac{5}{9}$.

1125. Область допустимых значений исходного уравнения находится из

$$\text{системы } \begin{cases} 4x^2 + 14x - 98 \geq 0, \\ 8x + 2 \neq 0, \\ 2x - 7 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)(x-3,5) \geq 0, \\ x \neq -0,25, \\ x \neq 3,5. \end{cases}$$

Таким образом, ОДЗ: $(-\infty; -7] \cup (3,5; +\infty)$.

Возвращаясь к уравнению, получим

$$\sqrt{4x^2 + 14x - 98} \cdot \left(\frac{1}{8x+2} - \frac{1}{2x-7} \right) = 0;$$

$$\sqrt{4(x+7)(x-3,5)} \left(\frac{-6x-9}{(8x+2)(2x-7)} \right) = 0.$$

Корни данного уравнения: $x_1 = -7$, $x_2 = 3,5$, $x_3 = -1,5$. Таким образом, с учётом ОДЗ корнем данного уравнения является $x = -7$.

Ответ: -7 .

1126. $(2x-5)\sqrt{2x^2-9x+4}+10=4x$; $(2x-5)\sqrt{2x^2-9x+4}=2(2x-5)$;

$$\left[\begin{cases} 2x-5=0, \\ 2x^2-9x+4 \geq 0, \\ \sqrt{2x^2-9x+4}=2; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} x=2,5, \\ (2x-1)(x-4) \geq 0, \\ 2x^2-9x+4=4; \end{cases} \right]$$

$$x(2x-9)=0; \left[\begin{matrix} x=0, \\ x=4,5. \end{matrix} \right]$$

Ответ: $0; 4,5$.

1127. $(x+1)\sqrt{3x^2+17x+10}-4=4x$; $(x+1)\sqrt{3x^2+17x+10}=4(x+1)$;

$$\left[\begin{cases} x+1=0, \\ 3x^2+17x+10 \geq 0, \\ \sqrt{3x^2+17x+10}=4; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} x=-1, \\ (3x+2)(x+5) \geq 0, \\ 3x^2+17x+10=16; \end{cases} \right]$$

$$3x^2+17x-6=0; (3x-1)(x+6)=0; x=-6, x=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-6; \frac{1}{3}$.

1128. Поскольку $x^2-2x+2=(x-1)^2+1 \geq 1$, то $\log_3(x^2-2x+2) \geq 0$.

Так как $x^2-2x+1=(x-1)^2 \geq 0$, $3^{x^2-2x+1} \geq 1$, то $\log_{0,3} 3^{x^2-2x+1} \leq 0$.

Следовательно, данное уравнение может выполняться лишь в случае $\log_3(x^2-2x+2)=0$, $x^2-2x+2=1$, $x=1$; при $x=1$ второе слагаемое также равно нулю, то есть $x=1$ является решением.

Ответ: 1 .

1129. Поскольку $x^2-4x+5=(x-2)^2+1 \geq 1$, то $\log_4(x^2-2x+2) \geq 0$.

А поскольку $\frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} < 1$, то $\log_{0,4} \frac{x^2-1}{x^2} > 0$. Следовательно, данное уравнение не имеет решений, так как его левая часть положительна при всех значениях x .

Ответ: решений нет.

1130. Рассмотрим первое уравнение системы: $5^{3x+4y} - 25^{2x-3y} = 0$, $5^{3x+4y} = 5^{4x-6y}$, $3x + 4y = 4x - 6y$, $x = 10y$. Итак, имеем систему

$$\begin{cases} x = 10y, \\ \sqrt{12-20y+19y} + \sqrt{10y-9y+2} = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10y, \\ \sqrt{12-y} + \sqrt{y+2} = 5. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$\sqrt{12-y} + \sqrt{y+2} = 5 \quad (1),$$

$$(\sqrt{12-y})^2 = (5 - \sqrt{y+2})^2, \quad 12-y = 25 - 10\sqrt{y+2} + y + 2,$$

$$(10\sqrt{y+2})^2 = (2y+15)^2, \quad 100y+200 = 4y^2+60y+225,$$

$$4y^2-40y+25=0; \quad y_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-100}}{4}, \quad y_{1,2} = \frac{10 \pm 5\sqrt{3}}{2}. \text{ Оба корня}$$

удовлетворяют уравнению (1). Тогда $x_{1,2} = 50 \pm 25\sqrt{3}$.

$$\text{Ответ: } \left(50 \pm 25\sqrt{3}; \frac{10 \pm 5\sqrt{3}}{2} \right).$$

1131. Рассмотрим первое уравнение. $\begin{cases} 13x+10 > 0, \\ 13x+10 \neq 1; \end{cases}$

$$4 - 2x - y = \sqrt{8(2-y-2x)}, \quad 4 - (2x+y) = \sqrt{8(2-(y+2x))}.$$

$$2x+y = t \Rightarrow 4-t = \sqrt{8(2-t)}, \quad 16-8t+t^2 = 8(2-t),$$

$$16-8t+t^2 = 16-8t, \quad t^2 = 0, \quad t = 0. \quad 2x+y = 0, \quad y = -2x. \text{ При}$$

$2x+y=0$ выражения, стоящие под знаком логарифма, положительны.

Итак, $\begin{cases} y = -2x, \\ \operatorname{ctg}(5y+3x-7) \operatorname{tg}(2+4x-y) = 1. \end{cases}$ Рассмотрим второе урав-

нение системы. Заметим, что $\operatorname{tg}(2+4x-y) \neq 0$, $\operatorname{ctg}(5y+3x-7) \neq 0$. $\operatorname{ctg}(-7x-7) \operatorname{tg}(6x+2) = 1$,

$$\operatorname{tg}(6x+2) = -\frac{1}{\operatorname{ctg}(7x+7)}, \quad \operatorname{tg}(6x+2) + \operatorname{tg}(7x+7) = 0,$$

$$\frac{\sin(6x+2+7x+7)}{\cos(6x+2)\cos(7x+7)} = 0, \quad \sin(13x+9) = 0, \quad 13x+9 = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$13x = \pi k - 9, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{9}{13} + \frac{\pi k}{13}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y = \frac{18}{13} - \frac{2\pi k}{13},$$

$k \in Z$. Найдём целые k , удовлетворяющие условию $\begin{cases} 13x + 10 > 0, \\ 13x + 10 \neq 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} -9 + \pi k + 10 > 0, \\ -9 + \pi k + 10 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} k > -\frac{1}{\pi}, \\ \pi k \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} k > -\frac{1}{\pi}, \\ k \neq 0; \end{cases} \quad k \geq 1.$$

$$\left(-\frac{9}{13} + \frac{\pi k}{13}; \frac{18}{13} - \frac{2\pi k}{13}\right), \quad k \in Z, k \geq 1.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{9}{13} + \frac{\pi k}{13}; \frac{18}{13} - \frac{2\pi k}{13}\right), \quad k \in Z, k \geq 1.$$

1132. Преобразуем первое уравнение:

$$2^{3y-x+3}(1+2) = 6, \quad 2^{3y-x+3} = 2, \quad 3y-x+3 = 1, \quad 3y-x+2 = 0, \quad x = 3y+2.$$

Преобразуем второе уравнение: $\sqrt{3y+2-8y+3} = 6y+4-y+1$,
 $\sqrt{5-5y} = 5y+5. \quad (1)$

$$5-5y = 25y^2 + 50y + 25, \quad 25y^2 + 55y + 20 = 0, \quad 5y^2 + 11y + 4 = 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121-80}}{10} = \frac{-11 \pm \sqrt{41}}{10}, \quad y_1 = \frac{-11 + \sqrt{41}}{10},$$

$$y_2 = \frac{-11 - \sqrt{41}}{10} \text{ — посторонний корень, так как правая часть уравнения}$$

(1) при $y = \frac{-11 - \sqrt{41}}{10}$ принимает отрицательные значения.

$$\text{Если } y = \frac{-11 + \sqrt{41}}{10}, \text{ то } x = \frac{-33 + 3\sqrt{41}}{10} + 2 = \frac{-13 + 3\sqrt{41}}{10}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-13 + 3\sqrt{41}}{10}; \frac{-11 + \sqrt{41}}{10}\right).$$

$$\mathbf{1133. ОДЗ:} \quad \begin{cases} y+3 \geq 0, \\ 5-x \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -3, \\ x \leq 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2y+2x}{2} + \frac{4y+2x}{4} = 6, \\ \sqrt{y+3} = 1 + \sqrt{5-x}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cdot 2y+2x + (2y+2x)^2 = 24, \\ \sqrt{y+3} = 1 + \sqrt{5-x}. \end{cases} \quad \text{Рассмотрим}$$

первое уравнение: $2y+2x = t, \quad t > 0, \quad 2t + t^2 = 24, \quad t^2 + 2t - 24 = 0;$
 $t_1 = -6$ не удовлетворяет условию $t > 0, \quad t_2 = 4. \quad 2y+2x = 4, \quad 2y+2x = 2^2,$

$$y+2x = 2. \text{ Итак, имеем систему: } \begin{cases} y+2x = 2, \\ \sqrt{y+3} = 1 + \sqrt{5-x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2-2x, \\ \sqrt{2-2x+3} = 1 + \sqrt{5-x}. \end{cases} \quad \text{Решим второе уравнение системы:}$$

$$\sqrt{5-2x} = 1 + \sqrt{5-x}, \quad (\sqrt{5-2x})^2 = (1 + \sqrt{5-x})^2,$$

$$5-2x = 1 + 2\sqrt{5-x} + 5-x, \quad -x-1 = 2\sqrt{5-x}, \quad (2)$$

$(-x-1)^2 = (2\sqrt{5-x})^2$, $x^2 + 2x + 1 = 4(5-x)$, $x^2 + 2x + 1 = 20 - 4x$, $x^2 + 6x - 19 = 0$; $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9+19}$, $x_1 = -3 + 2\sqrt{7}$, $x_2 = -3 - 2\sqrt{7}$. $x_1 = -3 + 2\sqrt{7}$ не удовлетворяет уравнению (2). Если $x = -3 - 2\sqrt{7}$, то $y = 8 + 4\sqrt{7}$. $(-3 - 2\sqrt{7}; 8 + 4\sqrt{7})$ — решение системы.

Ответ: $(-3 - 2\sqrt{7}; 8 + 4\sqrt{7})$.

1134. ОДЗ: $\begin{cases} y \geq 0, \\ x - 2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 0, \\ x \geq 2. \end{cases}$

$\begin{cases} (3^2)^{3x-2y} - 3^{3x-2y} - 6 = 0, \\ \sqrt{y} - \sqrt{x-2} = 1. \end{cases}$ Рассмотрим первое уравнение:

$3^{3x-2y} = t$, $t > 0$, $t^2 - t - 6 = 0$; $t_1 = -2$ не удовлетворяет условию $t > 0$, $t_2 = 3$. $3^{3x-2y} = 3$, $3x - 2y = 1$. Итак, имеем систему

$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ \sqrt{y} = 1 + \sqrt{x-2}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3x-1}{2}, \\ \sqrt{1,5x-0,5} = 1 + \sqrt{x-2}. \end{cases}$ Решим второе уравнение системы:

$$\sqrt{1,5x-0,5} = 1 + \sqrt{x-2}, \quad (1)$$

$$(\sqrt{1,5x-0,5})^2 = (1 + \sqrt{x-2})^2, \quad 1,5x - 0,5 = 1 + 2\sqrt{x-2} + x - 2,$$

$$0,5x + 0,5 = 2\sqrt{x-2}, \quad (x+1)^2 = (4\sqrt{x-2})^2, \quad x^2 + 2x + 1 = 16(x-2),$$

$$x^2 - 14x + 33 = 0, \quad x_1 = 11, \quad x_2 = 3. \text{ Оба числа удовлетворяют уравнению (1). Если } x = 11, \text{ то } y = \frac{33-1}{2} = 16. \text{ Если } x = 3, \text{ то } y = \frac{9-1}{2} = 4.$$

Полученные значения x и y входят в ОДЗ. $(11; 16)$ и $(3; 4)$ — решения системы.

Ответ: $(3; 4)$, $(11; 16)$.

1135. ОДЗ: $x > 0$, $y > -2$. Рассмотрим первое уравнение системы:

$$\lg(2+y) + 2\lg 2 = \lg 2x, \quad \lg(8+4y) = \lg 2x, \quad 8+4y = 2x. \text{ Система примет вид:}$$

$$\begin{cases} x = 4 + 2y, \\ \sqrt{y^2 + 2} = 4 + 2y + y - 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 + 2y, \\ \sqrt{y^2 + 2} = 3y. \end{cases} \quad \text{Решим второе уравнение: } \sqrt{y^2 + 2} = 3y, \quad (1)$$

$$y^2 + 2 = 9y^2, \quad y^2 = \frac{1}{4}, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = -\frac{1}{2}. \text{ Из чисел } -\frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{2} \text{ корнем}$$

$$\text{уравнения (1) является число } \frac{1}{2}. \text{ Если } y = \frac{1}{2}, \text{ то } x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 5.$$

$\left(5; \frac{1}{2}\right)$ — решение данной системы уравнений.

Ответ: $\left(5; \frac{1}{2}\right)$.

1136. $\begin{cases} 3^{2y+3x+1} + 3^{3-2y-3x} = 82, \\ \sqrt{22-5x+4y} = 2-2y-3x. \end{cases}$ Из второго уравнения системы следует, что $2y+3x \leq 2$. Рассмотрим первое уравнение системы:

$3 \cdot 3^{2y+3x} + \frac{27}{3^{2y+3x}} = 82$. Замена: $3^{2y+3x} = t, t > 0$. $3t + \frac{27}{t} = 82$,

$$3t^2 - 82t + 27 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 81}}{3}, \quad t_{1,2} = \frac{41 \pm 40}{3}, \quad t_1 = \frac{1}{3},$$

$t_2 = 27$. Вернемся к замене: а) $3^{2y+3x} = \frac{1}{3}$, $2y+3x = -1$, $y = \frac{-1-3x}{2}$;

б) $3^{2y+3x} = 27$, $2y+3x = 3$ — не удовлетворяет условию $2y+3x \leq 2$.

Система примет вид: $\begin{cases} y = \frac{-1-3x}{2}, \\ \sqrt{22-5x+4y} = 2-2y-3x. \end{cases}$

Решим второе уравнение системы: $\sqrt{22-5x+4y} = 2-(2y+3x)$,
 $\sqrt{22-5x-2-6x} = 2+1$, $\sqrt{20-11x} = 3$, $20-11x = 9$, $11x = 11$,
 $x = 1$. Если $x = 1$, то $y = -2$. $(1; -2)$ — решение данной системы.

Ответ: $(1; -2)$.

1137. ОДЗ: $x-3y > 3$. Рассмотрим второе уравнение системы:

$\frac{2^{x-3y}}{4} + \frac{16}{2^{x-3y}} = 5$. Замена: $2^{x-3y} = t, t > 0$. $\frac{t}{4} + \frac{16}{t} = 5$,

$$t^2 - 20t + 64 = 0; \quad t_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100-64}, \quad t_1 = 16, \quad t_2 = 4.$$

Вернемся к замене: а) $2^{x-3y} = 16$, $x-3y = 4$; б) $2^{x-3y} = 4$, $x-3y = 2$ —

не входит в ОДЗ. Система примет вид: $\begin{cases} x-3y = 4, \\ \sqrt{7y-4x+2} = x-3y-3; \end{cases}$

$x = 4+3y$, $\sqrt{7y-16-12y+2} = 4-3$, $\sqrt{-5y-14} = 1$, $-5y-14 = 1$,
 $-5y = 15$, $y = -3$. Если $y = -3$, то $x = 4-3 \cdot 3 = -5$. $(-5; -3)$ —
 решение данной системы.

Ответ: $(-5; -3)$.

1138. Преобразуем уравнения системы:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^{3x-2y} + 2^{y-2x} = 16, \\ \sqrt{2^{x-y}+4} + 2^{y-2x} = 2 \cdot 2^{3x-2y} + 6. \end{cases}$$

Заметим, что $x-y = (3x-2y) + (y-2x)$.

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^{3x-2y} + 2^{y-2x} = 16, \\ \sqrt{2^{3x-2y} \cdot 2^{y-2x} + 4} + 2^{y-2x} = 2 \cdot 2^{3x-2y} + 6. \end{cases} \quad \text{Замена: } 2^{3x-2y} = a,$$

$a > 0, 2^{y-2x} = b, b > 0$. $\begin{cases} 2a + b = 16, \\ \sqrt{ab + 4} + b = 2a + 6. \end{cases}$ Выразим b из первого уравнения последней системы $b = 16 - 2a$ и подставим во второе уравнение.

$$\begin{cases} \sqrt{a(16-2a)+4} + 16 - 2a = 2a + 6, & \sqrt{a(16-2a)+4} = 4a - 10, \\ a(16-2a)+4 = (4a-10)^2, & \begin{cases} 16a - 2a^2 + 4 = 16a^2 - 80a + 100, \\ 4a - 10 \geq 0; \end{cases} \\ a \geq 2,5. \end{cases}$$

Решим первое уравнение последней системы: $18a^2 - 96a + 96 = 0$,

$$3a^2 - 16a + 16 = 0; \quad a_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{3}, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = \frac{4}{3} \text{ — не}$$

удовлетворяет условию $a \geq 2,5$. Если $a = 4$, то $b = 16 - 2 \cdot 4 = 8$.

Вернемся к замене: $\begin{cases} 2^{3x-2y} = 4, \\ 2^{y-2x} = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 2, \\ y - 2x = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 + 2x, \\ 3x - 6 - 4x = 2; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 3 + 2x, \\ x = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -13, \\ x = -8. \end{cases}$$

Ответ: $(-8; -13)$.

1139. Так как основание логарифма число положительное и не равное единице, то $\operatorname{tg} x > 0, \operatorname{tg} x \neq 1$. По определению логарифма имеем:

$$\sin 2x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x \cos x + 1 = 1; \quad 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0, \quad \cos x \neq 0;$$

$$\sin x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0; \quad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in Z, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$

При $x = \pi n, n \in Z$ $\operatorname{tg} x = 0$ и при $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$ $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

что противоречит условию $\operatorname{tg} x > 0$. Следовательно, $x = \pi n, n \in Z$ и

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$ не являются корнями исходного уравнения. Имеем:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

1140. Так как основание логарифма число положительное и не равное единице, то $\operatorname{ctg} x > 0, \operatorname{ctg} x \neq 1$. По определению логарифма имеем:

$$\sin 2x + \operatorname{ctg} x \sin x + 1 = 1, \quad 2 \sin x \cos x + \cos x = 0, \quad \cos x (2 \sin x + 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z, \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z. \end{array} \right. \quad \text{При } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$$

$\operatorname{ctg} x = 0$ и при $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$ $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$, что проти-

воречит условию $\operatorname{ctg} x > 0$. Следовательно $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$ и

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$ не являются корнями исходного уравнения. Имеем:

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

1141. ОДЗ: $x \in R$. Раскрывая внешний модуль, получаем:

$$|\log_4(|x| + 3)| = |x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4(|x| + 3) = x, \\ \log_4(|x| + 3) = -x; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| + 3 = 4^x, \\ |x| + 3 = 4^{-x}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \pm 1.$$

1142. ОДЗ: $x > 0, x \neq 1, x \neq 10$. По свойству логарифмов, имеем:

$$\frac{1}{\log_x 2} = \log_2 x. \text{ Значит, данное уравнение преобразуется к виду:}$$

$$\log_2 x \cdot \left(\frac{1}{\log_3 |x - 10|} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Так как $x \neq 1$ ($x = 1$ не входит в ОДЗ переменной), то $\log_2 x \neq 0$ и,

$$\text{сокращая на } \log_2 x, \text{ получаем: } \frac{1}{\log_3 |x - 10|} - \frac{1}{2} = 0, \log_3 |x - 10| = 2,$$

$$|x - 10| = 9, \left[\begin{array}{l} x - 10 = -9, \\ x - 10 = 9, \end{array} \right. \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 19.$$

Значение $x = 1$ не входит в ОДЗ. На области определения проведенные преобразования уравнения были равносильны, поэтому $x = 19$ — корень исходного уравнения.

$$\text{Ответ: } 19.$$

1143. Найдём ОДЗ исходного уравнения: $\cos x \neq \frac{1}{6}, \sin x < 0$. Найдём

нули числителя: $6 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = 0$, применяя формулу косинуса

двойного аргумента, получаем: $12 \cos^2 x - 8 \cos x + 1 = 0$. Сделаем замену $\cos x = t$: $12t^2 - 8t + 1 = 0$. Решим это квадратное уравнение: $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{1}{6}$.

Остается сделать обратную замену и, учитывая ОДЗ, найти корни.

1. $\cos x = \frac{1}{2}$, так как $\sin x < 0$ (см. ОДЗ), то $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

2. $\cos x = \frac{1}{6}$ — не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

$$\begin{aligned}
 1144. \quad & \begin{cases} 5x - 2^y = 3 + \sqrt{5x - x^2}, \\ y - \log_2(x^2 - 1) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2^{\log_2(x^2 - 1)} = 3 + \sqrt{5x - x^2}, \\ y = \log_2(x^2 - 1); \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 5x - x^2 + 1 - \sqrt{5x - x^2} - 3 = 0, \\ y = \log_2(x^2 - 1); \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \begin{cases} 5x - x^2 - \sqrt{5x - x^2} - 2 = 0, \\ y = \log_2(x^2 - 1); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{5x - x^2} + 1)(\sqrt{5x - x^2} - 2) = 0, \\ y = \log_2(x^2 - 1); \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{5x - x^2} = 2, \\ y = \log_2(x^2 - 1); \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ y = \log_2(x^2 - 1); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x = 1, \\ x = 4, \end{bmatrix} \\ y = \log_2(x^2 - 1). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $x^2 - 1 > 0$, получим решение $(4; \log_2 15)$.

Ответ: $(4; \log_2 15)$.

$$1145. \quad \begin{cases} y^2 + 3^x = 4 + \sqrt{y^2 - y + 3}, \\ x - \log_3(1 - y) = 0. \end{cases}$$

По определению логарифма из второго уравнения имеем $3^x = 1 - y$. Подставим $3^x = 1 - y$ в первое уравнение и решим его.

$$y^2 - y + 1 = 4 + \sqrt{y^2 - y + 3}, \quad (y^2 - y + 3) - \sqrt{y^2 - y + 3} - 6 = 0.$$

Обозначим $\sqrt{y^2 - y + 3} = t$, $t > 0$, тогда последнее уравнение примет вид $t^2 - t - 6 = 0$, откуда $t_1 = 3$, $t_2 = -2$, t_2 не удовлетворяет условию $t > 0$. Вернёмся к замене: $\sqrt{y^2 - y + 3} = 3$; $y^2 - y + 3 = 9$; $y^2 - y - 6 = 0$; $y_1 = -2$, $y_2 = 3$.

1) $y = -2$, $3^x = 1 - (-2)$, $3^x = 3$, $x = 1$.

2) $y = 3$, $3^x = 1 - 3$, $3^x = -2$, решений нет.

Итак, исходная система имеет единственное решение $(1; -2)$.

Ответ: $(1; -2)$.

1146. ОДЗ. $3x^2 + x + 1 > 0, x \in \mathbb{R}$.

$$\log_3^2(3x^2 + x + 1) - \log_{\frac{1}{9}}(9x^2 + 3x + 3) = 18,5;$$

$$\log_3^2(3x^2 + x + 1) - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \log_3(3(3x^2 + x + 1)) = 18,5;$$

$$2\log_3^2(3x^2 + x + 1) + \log_3(3x^2 + x + 1) + 1 = 37;$$

$$2\log_3^2(3x^2 + x + 1) + \log_3(3x^2 + x + 1) - 36 = 0.$$

Пусть $\log_3(3x^2 + x + 1) = t$, тогда последнее уравнение примет вид $2t^2 + t - 36 = 0, (2t + 9)(t - 4) = 0$, откуда $t_1 = -4,5, t_2 = 4$.

Вернёмся к замене.

$$1) \log_3(3x^2 + x + 1) = -4,5; 3x^2 + x + 1 = 3^{-4,5}; 3x^2 + x + \left(1 - \frac{1}{81\sqrt{3}}\right) = 0.$$

$$D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{81\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{27\sqrt{3}} - 11. \frac{4}{27\sqrt{3}} < 1, \text{ значит } D < 1 - 11 < 0,$$

то есть действительных корней нет.

$$2) \log_3(3x^2 + x + 1) = 4; 3x^2 + x + 1 = 3^4; 3x^2 + x - 80 = 0;$$

$$(3x + 16)(x - 5) = 0; x = -\frac{16}{3}, x = 5.$$

Ответ: $-\frac{16}{3}, 5$.

$$\mathbf{1147.} \text{ ОДЗ. } \begin{cases} 15 + \sqrt{x-5} > 0, \\ 15 + \sqrt{x-5} \neq 1, \Leftrightarrow x \geq 5, \\ x - 5 \geq 0; \end{cases}$$

$$\log_5(15 + \sqrt{x-5}) + \log_{\sqrt{x-5}+15}(25(\sqrt{x-5} + 15)) = 4;$$

$$\log_5(15 + \sqrt{x-5}) + \log_{\sqrt{x-5}+15} 5^2 + 1 = 4;$$

$$\log_5(15 + \sqrt{x-5}) + \frac{2}{\log_5(15 + \sqrt{x-5})} - 3 = 0.$$

Пусть $\log_5(15 + \sqrt{x-5}) = t, t \geq 1 + \log_5 3$, тогда последнее уравнение

примет вид $t + \frac{2}{t} - 3 = 0; t^2 - 3t + 2 = 0, (t-1)(t-2) = 0$, откуда $t_1 = 1,$

$t_2 = 2. t_1 = 1$ не удовлетворяет условию $t \geq 1 + \log_5 3$.

Вернёмся к замене.

$$\log_5(15 + \sqrt{x-5}) = 2, 15 + \sqrt{x-5} = 25, \sqrt{x-5} = 10, x = 105.$$

Ответ: 105.

$$\mathbf{1148.} \begin{cases} 2^{\sqrt{x^2-6x-23}} = 6 - \sqrt{x^2-6x-23}, \\ \log_3 x = y. \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ. } \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 6x - 23 \geq 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы.

Пусть $\sqrt{x^2 - 6x - 23} = t, t \geq 0$, тогда уравнение примет вид $2^t = 6 - t$, $2^t + t - 6 = 0$. Функция $f(t) = 2^t + t - 6$ определена при $t \geq 0$ и строго возрастает, $f(0) = -5 < 0$, поэтому уравнение $f(t) = 0$ имеет единственное решение. Нетрудно видеть, что при $t = 2$ $f(t) = 0$.

Вернёмся к замене.

$\sqrt{x^2 - 6x - 23} = 2; x^2 - 6x - 23 = 4; x^2 - 6x - 27 = 0; (x - 9)(x + 3) = 0;$
 $x_1 = -3; x_2 = 9. x_1 = -3$ не удовлетворяет ОДЗ.

$$\begin{cases} x = 9, \\ \log_3 x = y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9, \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ: (9; 2).

$$1149. \begin{cases} 3^{\sqrt{x^2 - 7x - 7}} = 5 - 2\sqrt{x^2 - 7x - 7}, \\ \log_2 x = y. \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ. } \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 7x - 7 \geq 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы.

Пусть $\sqrt{x^2 - 7x - 7} = t, t \geq 0$, тогда уравнение примет вид $3^t = 5 - 2t$, $3^t + 2t - 5 = 0$. Функция $f(t) = 3^t + 2t - 5$ определена при $t \geq 0$ и строго возрастает, $f(0) = -4 < 0$, поэтому уравнение $f(t) = 0$ имеет единственное решение. Нетрудно видеть, что при $t = 1$ $f(t) = 0$.

Вернёмся к замене.

$\sqrt{x^2 - 7x - 7} = 1; x^2 - 7x - 7 = 1; x^2 - 7x - 8 = 0; (x + 1)(x - 8) = 0;$
 $x_1 = -1; x_2 = 8. x_1 = -1$ не удовлетворяет ОДЗ.

$$\begin{cases} x = 8, \\ \log_2 x = y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8, \\ y = 3 \end{cases}$$

Ответ: (8; 3).

1150. ОДЗ системы: $x > 0, y > 0$.

$$\begin{cases} x \log_2(xy) - x^2 = -10, \\ \log_2(xy) = -3; \end{cases} \Rightarrow -3x - x^2 = -10; x_1 = -5, x_2 = 2.$$

Учитывая ОДЗ, получим $x = 2$. Тогда $\log_2(2y) = -3; y = \frac{1}{16}$.

Ответ: $\left(2; \frac{1}{16}\right)$.

1151. ОДЗ. $x \in R$. Из исходной системы следует уравнение $9x^6 + 6 - 8 \sin y = 24x^3 - \frac{26}{81} - 8 \sin y; 9x^6 - 24x^3 + \frac{512}{81} = 0$. Замена $t = x^3$ при-

водит к уравнению $9t^2 - 24t + \frac{512}{81} = 0$; $t_1 = \frac{8}{27}$, $t_2 = \frac{64}{27}$. Следовательно,

$x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$. Перепишем второе уравнение исходной системы в виде

$8 \sin y = 24x^3 - 4x^4 - 3x - \frac{26}{81}$. При $x = \frac{4}{3}$ оно не имеет решений, так как

его правая часть больше 8. При $x = \frac{2}{3}$ последнее уравнение имеет вид:

$\sin y = \frac{1}{2}$; $y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. Все пары последовательности

$\left(\frac{2}{3}; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$ удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

1152. 1) Пусть $u = xy$, $v = x + y$, тогда $2v^2 = 2(x^2 + 2xy + y^2) = 2x^2 + 4xy + 2y^2$. Отсюда, $2x^2 + 2y^2 = 2v^2 - 4u$.

Следовательно,

$$2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 = 2v^2 - 4u + u^2.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 2v^2 - 4u + u^2 = 62, \\ u + v = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 11 - v, \\ 2v^2 = 4(11 - v) - (11 - v)^2 + 62; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 11 - v, \\ 3v^2 - 18v + 15 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 11 - v, \\ \begin{bmatrix} v = 1, \\ v = 5; \end{bmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} u = 10 \\ v = 1, \\ u = 6, \\ v = 5. \end{cases}$$

2) Получаем $\begin{cases} xy = 10, \\ x + y = 1; \end{cases}$ или $\begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 5. \end{cases}$

Решая первую систему, приходим к уравнению $-x^2 + x - 10 = 0$. Действительных корней нет.

Решая вторую систему, получаем $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

Ответ: $(3; 2)$, $(2; 3)$.

1153. 1) Пусть $u = xy$, $v = x + y$. Тогда $v^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Отсюда $x^2 + y^2 = v^2 - 2u$. Следовательно, $x^2 + y^2 + x^2y^2 - 8xy = v^2 - 2u + u^2 - 8u = v^2 + u^2 - 10u$.

Заданная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} v^2 + u^2 - 10u = 20, \\ u + v = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 14 - v, \\ v^2 + (14 - v)^2 - 10(14 - v) = 20; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 14 - v, \\ 2(v - 3)(v - 6) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} v = 3, \\ u = 11, \\ v = 6, \\ u = 8. \end{cases}$$

2) Получаем $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 11, \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8. \end{cases}$

Решая первую систему, приходим к уравнению $y^2 - 3y + 11 = 0$. Действительных корней нет.

Из второй системы находим: $x_1 = 4, y_1 = 2; x_2 = 2, y_2 = 4$.

Ответ: $(4; 2), (2; 4)$.

1154. $\begin{cases} 36^{2x+1} + 16 \cdot 4^{2x-1} = 24 \cdot 12^{2x}, \\ \sin y = -x; \end{cases}$

$$\begin{cases} 36^{2x+1} + 4^{2x+1} - 2 \cdot 12^{2x+1} = 0, \\ \sin y = -x; \end{cases} \quad \begin{cases} 9^{2x+1} - 2 \cdot 3^{2x+1} + 1 = 0, \\ \sin y = -x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3^{2x+1} - 1)^2 = 0, \\ \sin y = -x; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 1 = 0, \\ \sin y = -x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -0,5, \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $(-0,5; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

1155. $\begin{cases} 49^{2x-1} + 9^{2x-1} - 2 \cdot 21^{2x-1} = 0, \\ \cos y = x; \end{cases}$

$$\begin{cases} \left(\frac{49}{9}\right)^{2x-1} - 2\left(\frac{7}{3}\right)^{2x-1} + 1 = 0, \\ \cos y = x; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\left(\frac{7}{3}\right)^{2x-1} - 1\right)^2 = 0, \\ \cos y = x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0, \\ \cos y = x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0,5, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $(0,5; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

1156. Сделаем замену $a = \sqrt{-x}, b = \sqrt{-y}$, тогда

$$\begin{cases} 16 = (2a + b)^2, \\ 64 = (4a^2 - b^2)^2; \end{cases}$$

где $a \geq 0$ и $b \geq 0$.

$$4 = (2a - b)^2;$$

$$2a - b = \pm 2;$$

$$b = 2a \pm 2.$$

Подставим $b = 2a \pm 2$ в первое уравнение системы:

$$16 = (4a \pm 2)^2, \text{ отсюда } a_1 = 1,5, a_2 = 0,5, \text{ следовательно } b_1 = 1, b_2 = 3.$$

$$x_1 = -(1,5)^2 = -2,25, x_2 = -(0,5)^2 = -0,25;$$

$$y_1 = -(1)^2 = -1, y_2 = -(3)^2 = -9.$$

$$\text{Ответ: } (-0,25; -9), (-2,25; -1).$$

$$1157. \text{ Сделаем замену } a = \sqrt{-x}, b = \sqrt{-y}, \text{ тогда } \begin{cases} 25 = (a + 3b)^2, \\ 25 = (a^2 - 9b^2)^2 \end{cases};$$

где $a \geq 0$ и $b \geq 0$.

$$1 = (a - 3b)^2,$$

$$a - 3b = \pm 1,$$

$$a = 3b \pm 1.$$

Подставим $a = 3b \pm 1$ в первое уравнение системы:

$$25 = (6b \pm 1)^2, \text{ отсюда } b_1 = 1, b_2 = \frac{2}{3}, \text{ следовательно } a_1 = 2, a_2 = 3.$$

$$x_1 = -(2)^2 = -4, x_2 = -(3)^2 = -9;$$

$$y_1 = -(1)^2 = -1, y_2 = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}.$$

$$\text{Ответ: } (-4; -1), \left(-9; -\frac{4}{9}\right).$$

$$1158. \text{ ОДЗ. } x(x+4) - 1 \geq 0, x^2 + 4x - 1 \geq 0.$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 2\sqrt{x(x+4) - 1} = 9, \\ 4 \sin y \cos y = x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + 4x - 1) + 2\sqrt{x^2 + 4x - 1} - 8 = 0, \\ 2 \sin 2y = x. \end{cases}$$

Решим отдельно первое уравнение системы. Пусть $\sqrt{x^2 + 4x - 1} = t$, $t \geq 0$, тогда уравнение примет вид $t^2 + 2t - 8 = 0$; получаем: $t_1 = -4$, $t_2 = 2$. $t = -4$ не удовлетворяет условию $t \geq 0$.

Вернёмся к замене.

$\sqrt{x^2 + 4x - 1} = 2$; $x^2 + 4x - 1 = 4$; $x^2 + 4x - 5 = 0$; $x_1 = -5$, $x_2 = 1$. Оба полученных значения x удовлетворяют ОДЗ.

Подставим найденные значения x во второе уравнение системы.

1) $2 \sin 2y = -5$, $\sin 2y = -2,5$ — уравнение не имеет решений, так как $-1 \leq \sin 2y \leq 1$.

2) $2 \sin 2y = 1$, $\sin 2y = \frac{1}{2}$; $2y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Итак, решением системы являются $\left(1; (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z$.

Ответ: $\left(1; (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z$.

1159. ОДЗ. $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$.

$$\begin{cases} x(2x - 5) + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = -1, \\ \cos^2 y - \sin^2 y = x; \\ \begin{cases} (2x^2 - 5x + 3) + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - 2 = 0, \\ \cos 2y = x. \end{cases} \end{cases}$$

Решим отдельно первое уравнение системы.

Пусть $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = t, t \geq 0$, тогда уравнение примет вид:
 $t^2 + t - 2 = 0; t_1 = -2, t_2 = 1. t = -2$ не удовлетворяет условию $t \geq 0$.

Вернёмся к замене.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1; 2x^2 - 5x + 3 = 1; 2x^2 - 5x + 2 = 0; (2x - 1)(x - 2) = 0;$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_1 = 2; x_1 \text{ и } x_2 \text{ удовлетворяют ОДЗ.}$$

Подставим найденные значения x во второе уравнение системы:

$$1) \cos 2y = \frac{1}{2}; 2y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; y = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

$$2) \cos 2y = 2 \text{ — уравнение не имеет решений, так как } -1 \leq \cos 2y \leq 1.$$

Итак, решением системы являются $\left(\frac{1}{2}; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n\right), n \in Z$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n\right), n \in Z$.

$$1160. \begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (6\sqrt{\cos x} - 1)(5y + 4) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x, \\ 6\sqrt{\cos x} - 1 = 0, \\ y = \cos x, \\ 5y + 4 = 0, \\ \cos x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{cases} y = \cos x, \\ \cos x = \frac{1}{36}, \\ y = -\frac{4}{5}, \\ \cos x = -\frac{4}{5} \text{ — нет решений,} \\ \cos x \geq 0; \end{cases} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{36}, \\ x = \pm \arccos \frac{1}{36} + 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm \arccos \frac{1}{36} + 2\pi n; \frac{1}{36} \right), n \in Z$.

$$1161. \begin{cases} y - \sin x = 0, \\ (8\sqrt{\sin x} - 1)(3y - 4) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sin x, \\ 8\sqrt{\sin x} - 1 = 0, \\ y = \sin x, \\ 3y - 4 = 0, \\ 0 \leq \sin x \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{cases} y = \sin x, \\ \sin x = \frac{1}{64}, \\ y = \frac{4}{3}, \\ \sin x = \frac{4}{3} \text{ — нет решений,} \\ 0 \leq \sin x \leq 1; \end{cases} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{64}, \\ x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{64} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n \arcsin \frac{1}{64} + \pi n; \frac{1}{64} \right), n \in Z$.

1162. ОДЗ: $\cos x \geq 0$. Из второго уравнения получаем: $y = \frac{8}{3}$ или

$\cos x = \frac{1}{25}$. Если $y = \frac{8}{3}$, то из первого уравнения $\cos x = \frac{8}{3}$. Это

уравнение не имеет корней, так как $|\cos x| \leq 1$. Если $\cos x = \frac{1}{25}$, то

$x = \pm \arccos \frac{1}{25} + 2\pi n, n \in Z$, и из первого уравнения получаем: $y = \frac{1}{25}$.

Найденные значения x и y удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\left(\pm \arccos \frac{1}{25} + 2\pi n; \frac{1}{25} \right), n \in Z$.

1163. ОДЗ: $\sin x \geq 0$. Из второго уравнения получаем: $y = \frac{4}{5}$ или $\sin x = \frac{4}{9}$. Если $y = \frac{4}{5}$, то из первого уравнения $\sin x = -\frac{4}{5}$ — не удовлетворяет ОДЗ. Если $\sin x = \frac{4}{9}$, то $x = (-1)^n \arcsin \frac{4}{9} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ и из первого уравнения получаем: $y = -\frac{4}{9}$.

Ответ: $\left((-1)^n \arcsin \frac{4}{9} + \pi n; -\frac{4}{9}\right), n \in \mathbb{Z}$.

1164. Обозначим $\sqrt{\sin x} = t, 0 \leq t \leq 1$. Тогда из первого уравнения получаем $y = -t^2$, а из второго: $(3t - 2)(-6t^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow (t - \frac{2}{3})(t^2 + \frac{1}{2}) = 0$. Уравнение $t^2 + \frac{1}{2} = 0$ не имеет действительных корней, поэтому $t = \frac{2}{3}$; $y = -\frac{4}{9}$; $\sin x = \frac{4}{9}$; $x = (-1)^n \arcsin \frac{4}{9} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left((-1)^n \arcsin \frac{4}{9} + \pi n; -\frac{4}{9}\right), n \in \mathbb{Z}$.

1165. ОДЗ: $\cos x > 0$. Из второго уравнения системы: $\ln(\cos x) + 1 = 0$ или $y - 1 = 0$.

1) $\ln(\cos x) + 1 = 0$; $\ln(\cos x) = -1$; $\cos x = \frac{1}{e}$. $x = \pm \arccos \frac{1}{e} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = -\frac{3 \cos x}{2} = -\frac{3}{2e}$.

2) $y - 1 = 0$; $y = 1$; $\cos x = -\frac{2}{3}$ не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $\left(\pm \arccos \frac{1}{e} + 2\pi n; -\frac{3}{2e}\right), n \in \mathbb{Z}$.

1166. $\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (\ln |\sin x| - 2)(2 \sin y - 1) = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ \begin{cases} 2 \sin y = 1, \\ \ln(\sin x) - 2 = 0; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} y + \sin x = 0, \\ \begin{cases} y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \sin x = e^2; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -y, \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = -y, \\ y = \frac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \\ y = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^{n+1} \arcsin \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6}\right), n \in Z.$

1167. $\begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (\sqrt{\cos x} - 3)(2 \sin y - \sqrt{2}) = 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} y - \cos x = 0, \\ \begin{cases} \sqrt{\cos x} - 3 = 0, \\ 2 \sin y - \sqrt{2} = 0; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \cos x, \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = y, \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = y, \\ y = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm \arccos \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z, \\ y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm \arccos \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4}\right), n \in Z.$

1168. $(3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3) \cdot \sqrt{9 - 4x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0, \\ \begin{cases} 9 - 4x^2 \geq 0; \\ 9 - 4x^2 = 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$1. 9 - 4x^2 \geq 0; x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

$$t = 3^x, t > 0.$$

$$9t^2 - 28t + 3 = 0. \text{ Корни уравнения: } t_1 = \frac{1}{9}, t_2 = 3.$$

$$3^x = \frac{1}{9}, x = -2 \text{ — не удовлетворяет условию } x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right];$$

$$3^x = 3, x = 1.$$

$$2 \cdot 9 - 4x^2 = 0; x_1 = -\frac{3}{2}; x_2 = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\pm\frac{3}{2}; 1$.

$$1169. (2^{2x+3} - 17 \cdot 2^x + 2) \cdot \sqrt{16 - 4x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x+3} - 17 \cdot 2^x + 2 = 0, \\ 16 - 4x^2 \geq 0; \\ 16 - 4x^2 = 0. \end{cases}$$

$$1) t = 2^x, t > 0. 8 \cdot t^2 - 17t + 2 = 0, \text{ корни уравнения: } t_1 = \frac{1}{8}, t_2 = 2.$$

$$2^x = \frac{1}{8}, x = -3 \text{ — не удовлетворяет условию } 16 - 4x^2 \geq 0.$$

$$2^x = 2, x = 1.$$

$$2) 16 - 4x^2 = 0; x_{1,2} = \pm 2.$$

Ответ: $\pm 2; 1$.

$$1170. \begin{cases} 4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 12 = 0, \\ \sin y = x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4^x)^2 - 8 \cdot 4^x + 12 = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

Решим первое уравнение полученной системы. Пусть $t = 4^x, t > 0$. Тогда $t^2 - 8t + 12 = 0$. Отсюда находим $t_1 = 2, t_2 = 6$. Тогда

$$1) 4^{x_1} = 2; 4^{x_1} = 4^{\frac{1}{2}}; x_1 = \frac{1}{2}.$$

$$2) 4^{x_2} = 6; \log_4 4^{x_2} = \log_4 6; x_2 = \log_4 6.$$

Поскольку найденные значения x_1, x_2 должны удовлетворять второму уравнению системы, то должно выполняться $|x_1| \leq 1; |x_2| \leq 1$. Но $x_2 = \log_4 6 > 1$, следовательно, не является решением заданной системы уравнений.

Подставляя значение $x_1 = \frac{1}{2}$ во второе уравнение системы, получаем

$$\sin x = \frac{1}{2}. \text{ Отсюда } y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

$$1171. \begin{cases} 9^{2y} - 3 \cdot 9^{y+1} + 72 = 0, \\ \cos x = y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9^y)^2 - 27 \cdot 9^y + 72 = 0, \\ \cos x = y. \end{cases}$$

Решим первое уравнение полученной системы. Пусть $t = 9^y, t > 0$. Тогда $t^2 - 27t + 72 = 0$. Отсюда находим $t_1 = 3, t_2 = 24$. Тогда

$$1) 9^{y_1} = 3; 9^{y_1} = 9^{\frac{1}{2}}; y_1 = \frac{1}{2}.$$

$$2) 9^{y_2} = 24; \log_9 9^{y_2} = \log_9 24; y_2 = \log_9 24.$$

Поскольку найденные значения y_1, y_2 должны удовлетворять второму уравнению системы, то должно выполняться $|y_1| \leq 1; |y_2| \leq 1$. Но $y_2 = \log_9 24 > 1$, следовательно, не является решением заданной системы уравнений.

Подставляя значение $y_1 = \frac{1}{2}$ во второе уравнение системы, получаем

$$\cos x = \frac{1}{2}. \text{ Отсюда } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{1}{2} \right), n \in Z.$$

$$1172. (\log_3 x + \log_x 3 + 2)(\log_3 x - \log_{3x} x) = 6.$$

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{3}$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$\left(\frac{1}{\log_x 3} + \log_x 3 + 2 \right) \left(\frac{1}{\log_x 3} - \frac{1}{1 + \log_x 3} \right) = 6.$$

Замена $\log_x 3 = t, t \neq -1, t \neq 0$.

$$\left(\frac{1}{t} + t + 2 \right) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) = 6.$$

$$\frac{(t+1)^2}{t} \cdot \frac{1}{t(t+1)} = 6. \text{ Так как } t \neq 0, \text{ то}$$

$$t+1 = 6t^2;$$

$$6t^2 - t - 1 = 0;$$

$$t_1 = \frac{1}{2}, \log_x 3 = \frac{1}{2}, x^{\frac{1}{2}} = 3, x = 9;$$

$$t_2 = -\frac{1}{3}, \log_x 3 = -\frac{1}{3}, x^{-\frac{1}{3}} = 3, x = \frac{1}{27}.$$

$$\text{Ответ: } 9; \frac{1}{27}.$$

$$1173. (\log_2 x + 2\log_x 2)(\log_2 x - 2\log_x 2) = 3.$$

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$.

Замена $\log_x 2 = t, t \neq 0$.

$$\left(\frac{1}{t} + 2t \right) \left(\frac{1}{t} - 2t \right) = 3.$$

$$\frac{1}{t^2} - 4t^2 = 3. \text{ Так как } t \neq 0, \text{ то}$$

$$1 - 4t^4 = 3t^2;$$

$$4t^4 + 3t^2 - 1 = 0;$$

$$(4t^2 - 1)(t^2 + 1) = 0;$$

$$t_1 = \frac{1}{2}, \log_x 2 = \frac{1}{2}, x^{\frac{1}{2}} = 2, x = 4;$$

$$t_2 = -\frac{1}{2}, \log_x 2 = -\frac{1}{2}, x^{-\frac{1}{2}} = 2, x = \frac{1}{4}.$$

Ответ: 4; $\frac{1}{4}$.

$$1174. \begin{cases} \frac{2x-2}{x-y} - \frac{3y}{x+y} = 3, \\ \frac{6x-6y}{x-1} + \frac{5x+5y}{y} = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \frac{x-1}{x-y} - 3 \cdot \frac{y}{x+y} = 3, \\ 6 \cdot \frac{x-y}{x-1} + 5 \cdot \frac{x+y}{y} = 7. \end{cases}$$

ОДЗ: $x \neq \pm y, x \neq 1, y \neq 0$. Обозначим $\frac{x-1}{x-y} = U, \frac{y}{x+y} = V$.

$$\text{Система уравнений примет вид: } \begin{cases} 2U - 3V = 3, \\ \frac{6}{U} + \frac{5}{V} = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = 1,5(V+1), \\ \frac{4}{V+1} + \frac{5}{V} = 7; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U = 1,5(V+1), \\ \begin{bmatrix} V = 1, \\ V = -\frac{5}{7}; \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} V = 1, \\ U = 3, \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V = -\frac{5}{7}, \\ U = \frac{3}{7}. \end{bmatrix} \end{cases}$$

Вернемся к исходным переменным:

$$\begin{bmatrix} \begin{cases} \frac{x-1}{x-y} = 3, \\ \frac{y}{x+y} = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x-1}{x-y} = \frac{3}{7}, \\ \frac{y}{x+y} = -\frac{5}{7}; \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x-1 = 3x-3y, \\ x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4x = 7-3y, \\ x = -\frac{12y}{5}; \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{1}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{28}{11}, \\ y = -\frac{35}{33}. \end{cases} \end{bmatrix}$$

Ответ: $(0; \frac{1}{3}), (\frac{28}{11}; -\frac{35}{33})$.

$$1175. \begin{cases} \frac{3x-1}{y+1} - \frac{3y-1}{x+1} = 2, \\ \frac{3y+3}{3x-1} + \frac{2x+2}{3y-1} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-1}{y+1} - \frac{3y-1}{x+1} = 2, \\ 3 \cdot \frac{y+1}{3x-1} + 2 \cdot \frac{x+1}{3y-1} = 1. \end{cases}$$

ОДЗ. $x \neq -1, y \neq -1, x \neq \frac{1}{3}, y \neq \frac{1}{3}$.

Обозначим $\frac{3x-1}{y+1} = U, \frac{3y-1}{x+1} = V$.

$$\begin{aligned} \text{Система уравнений примет вид: } \begin{cases} U - V = 2, \\ \frac{3}{U} + \frac{2}{V} = 1; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} U = 2 + V, \\ \frac{3}{2+V} + \frac{2}{V} = 1; \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} U = 2 + V, \\ \begin{bmatrix} V = -1, \\ V = 4 \end{bmatrix}; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} V = -1, \\ U = 1, \\ V = 4, \\ U = 6. \end{bmatrix} \end{cases} \end{aligned}$$

Вернёмся к исходным переменным:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \begin{cases} \frac{3x-1}{y+1} = 1, \\ \frac{3y-1}{x+1} = -1, \\ \frac{3x-1}{y+1} = 6, \\ \frac{3y-1}{x+1} = 4; \end{cases} \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} 3x - y = 2, \\ x + 3y = 0, \\ 3x - 6y = 7, \\ 4x - 3y = -5; \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x = \frac{3}{5}, \\ y = -\frac{1}{5}, \\ x = -\frac{17}{5}, \\ y = -\frac{43}{15}. \end{cases} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right), \left(-\frac{17}{5}; -\frac{43}{15}\right)$.

$$1176. \begin{cases} 3 \sin y - \cos^2 y + 6 \cos x = 0, \\ 2 \sin^2 x + 5 \cos x = 4. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы.

$$2 \sin^2 x + 5 \cos x - 4 = 0,$$

$$2 - 2 \cos^2 x + 5 \cos x - 4 = 0,$$

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0.$$

Замена $\cos x = t, t \in [-1; 1]$ приводит к уравнению $2t^2 - 5t + 2 = 0$,

$t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 2$, при этом $t_2 \notin [-1; 1]$.

$$\cos x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Подставим найденное значение $\cos x = \frac{1}{2}$ в первое уравнение системы и решим его.

$$3 \sin y - \cos^2 y + 6 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$\begin{aligned} 3 \sin y - 1 + \sin^2 y + 3 &= 0, \\ \sin^2 y + 3 \sin y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Замена $\sin y = v$, $v \in [-1; 1]$.

$$v^2 + 3v + 2 = 0;$$

$$\begin{aligned} v_1 &= -1, & v_2 &= -2; \\ \sin y &= -1, & v_2 &\notin [-1; 1]. \end{aligned}$$

$$y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right); k, n \in Z.$$

$$1177. \begin{cases} 2 \sin^2 y + 9 \cos y - 3 \sin x = 0, \\ 2 \cos^2 x - 5 \sin x = 5. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы.

$$2 \cos^2 x - 5 \sin x = 5;$$

$$2 - 2 \sin^2 x - 5 \sin x = 5;$$

$$2 \sin^2 x + 5 \sin x + 3 = 0.$$

Замена $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$;

$$2t^2 + 5t + 3 = 0;$$

$$\begin{aligned} t_1 &= -1, & t_2 &= -1,5; \\ \sin x &= -1, & t_2 &\notin [-1; 1]. \end{aligned}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$$

Подставим найденное значение $\sin x = -1$ в первое уравнение системы и решим его.

$$2 \sin^2 y + 9 \cos y + 3 = 0;$$

$$2 - 2 \cos^2 y + 9 \cos y + 3 = 0;$$

$$2 \cos^2 y - 9 \cos y - 5 = 0.$$

Замена $\cos y = v$, $v \in [-1; 1]$;

$$2v^2 - 9v - 5 = 0;$$

$$\begin{aligned} v_1 &= -0,5, & v_2 &= 5; \\ \cos y &= -0,5, & v_2 &\notin [-1; 1]. \end{aligned}$$

$$y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right); k, n \in Z.$$

$$1178. \begin{cases} \frac{2x+5y}{2y} + \frac{y-2x}{x} = 2,5, \\ x|y| + x^2 + y^2 = 1 + 2x; \end{cases}$$

ОДЗ: $x \neq 0, y \neq 0$.

Из первого уравнения выразим y через x . Получим:

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 - 4xy = 5xy,$$

$$(x-y)^2 = 0,$$

$$x = y.$$

Подставим $y = x$ во второе уравнение. Получим:

$$x|x| + x^2 + x^2 = 1 + 2x.$$

$$1. \ x > 0: x^2 + x^2 + x^2 = 1 + 2x,$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -\frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ — не удовлетворяет условию } x > 0.$$

$$2. \ x < 0: -x^2 + x^2 + x^2 = 1 + 2x,$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}, \\ x = 1 - \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$x = 1 + \sqrt{2} \text{ — не удовлетворяет условию } x < 0.$$

Имеем: $(1; 1)$ и $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ — решения исходной системы.

$$\text{Ответ: } (1; 1), (1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}).$$

$$1179. \begin{cases} \frac{3x-y}{y} + \frac{3y+4x}{x} = -3, \\ x|y| + x^2 - y^2 - 3 = 2x; \end{cases}$$

ОДЗ: $x \neq 0, y \neq 0$.

Из первого уравнения системы выразим x через y . Получим:

$$3x^2 - xy + 3y^2 + 4xy = -3xy,$$

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 = 0,$$

$$(x+y)^2 = 0,$$

$$x = -y.$$

Подставим $x = -y$ во второе уравнение системы. Получим:

$$-y|y| + y^2 - y^2 - 3 = -2y,$$

$$-y|y| + 2y - 3 = 0.$$

1. $y > 0$: $y^2 - 2y + 3 = 0$. Уравнение не имеет действительных корней.

$$2. y < 0: y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ y = -3; \end{cases}$$

$y = 1$ — не удовлетворяет условию $y < 0$.

Итак, $(3; -3)$ — решение исходной системы.

Ответ: $(3; -3)$.

$$1180. \begin{cases} (x+2)^2 + \sqrt{x^2 + 4x + 19} = 57, \\ y^2 = x - 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем: $x \geq 1$.

Решим первое уравнение системы.

$$x^2 + 4x + 4 + \sqrt{x^2 + 4x + 19} = 57;$$

$$x^2 + 4x + 19 + \sqrt{x^2 + 4x + 19} - 72 = 0.$$

Замена $\sqrt{x^2 + 4x + 19} = t$, $t \geq 0$.

$$t^2 + t - 72 = 0, \text{ откуда}$$

$$t_1 = 8, \quad t_2 = -9 < 0.$$

$$\sqrt{x^2 + 4x + 19} = 8,$$

$$x^2 + 4x + 19 = 64,$$

$$x^2 + 4x - 45 = 0,$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -9,$$

x_2 не удовлетворяет условию $x \geq 1$.

$$y^2 = 5 - 1,$$

$$y = \pm 2.$$

Ответ: $(5; -2), (5; 2)$.

$$1181. \begin{cases} x^2 - \sqrt{x^2 - x + 10} = x + 2, \\ y^2 = x - 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем: $x \geq 2$.

Решим первое уравнение системы.

$$x^2 - x + 10 - \sqrt{x^2 - x + 10} - 12 = 0.$$

Замена $\sqrt{x^2 - x + 10} = t$, $t \geq 0$.

$$t^2 - t - 12 = 0, \text{ откуда}$$

$$t_1 = 4, \quad t_2 = -3 < 0.$$

$$\sqrt{x^2 - x + 10} = 4,$$

$$x^2 - x + 10 = 16,$$

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -2,$$

x_2 не удовлетворяет условию $x \geq 2$.

$$y^2 = 3 - 2,$$

$$y = \pm 1.$$

Ответ: $(3; -1), (3; 1)$.

$$1182. \begin{cases} 2 \cos x - \sqrt{y+1} = 0, \\ 2^{2 \sin x} + 4\sqrt{2} = 2^{\sin x+2} + 2^{\sin x+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

ОДЗ: $y + 1 \geq 0; y \geq -1$.

Пусть $t = 2^{\sin x}, t > 0$. Тогда второе уравнение системы принимает вид: $t^2 + 4\sqrt{2} = 4t + \sqrt{2}t; t^2 - (4 + \sqrt{2})t + 4\sqrt{2} = 0$. Его корни $t_1 = 4, t_2 = \sqrt{2}$. Значит,

$$\begin{cases} 2^{\sin x} = 4, \\ 2^{\sin x} = \sqrt{2}; \end{cases} \begin{cases} \sin x = 2, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \text{ (уравнение}$$

$\sin x = 2$ не имеет решений, так как $|\sin x| \leq 1$).

Из первого уравнения системы следует уравнение $2 \cos x = \sqrt{y+1}$. Следовательно, $\cos x \geq 0$. Значит, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$ — корни второго уравнения системы, удовлетворяющие условию $\cos x \geq 0$. Тогда $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и первое уравнение системы принимает вид:

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{y+1}. \text{ Его корень } y = 2.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; 2\right), k \in Z$.

$$1183. \begin{cases} |x - 2\sqrt{2}| - 2 \sin y = 0, \\ 3^{\operatorname{ctg} y + 1} + 8 = 3^{1 - \operatorname{ctg} y}. \end{cases}$$

Пусть $t = 3^{\operatorname{ctg} y}, t > 0$. Тогда второе уравнение системы принимает вид: $3t + 8 = \frac{3}{t}; 3t^2 + 8t - 3 = 0$. Его корни $t_1 = -3, t_2 = \frac{1}{3}$, причём t_1 не удовлетворяет условию $t > 0$. Значит, $3^{\operatorname{ctg} y} = \frac{1}{3}; \operatorname{ctg} y = -1; y = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Из первого уравнения системы следует уравнение $|x - 2\sqrt{2}| = 2 \sin y$. Следовательно, $\sin y \geq 0$. Значит, $y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$ — корни второго уравнения системы, удовлетворяющие условию $\sin y \geq 0$. Тогда $\sin y = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, и первое уравнение системы принимает

$$\text{вид: } |x - 2\sqrt{2}| = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \left[\begin{cases} x \geq 2\sqrt{2}, \\ x - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}, \\ x < 2\sqrt{2}, \\ 2\sqrt{2} - x = \sqrt{2}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x = 3\sqrt{2}, \\ x = \sqrt{2}. \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left(3\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right), \left(\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in Z.$$

1184. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$.

Замена $t = \log_x y$, $t \neq 0$ приводит первое уравнение системы к виду

$$(t+2)\left(\frac{1}{t}-1\right) = -2; \quad t_1 = -1, \quad t_2 = 2.$$

$$1) \log_x y = 2; \quad y = x^2.$$

$$2) \log_x y = -1; \quad y = \frac{1}{x}.$$

Упрощая второе уравнение, получим $x^2 + 4y^2 - 5 = 0$.

$$1) \text{ При } y = x^2 \text{ получим } 4x^4 + x^2 - 5 = 0; \quad z = x^2; \quad 4z^2 + z - 5 = 0; \quad z_1 = -\frac{5}{4}$$

не удовлетворяет условию $z \geq 0$;

$z_2 = 1$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$ не удовлетворяет ОДЗ.

$$2) \text{ При } y = \frac{1}{x} \text{ получим } x^2 + \frac{4}{x^2} = 5;$$

$$\begin{cases} x^2 = 1, \\ x^2 = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ x = \pm 2. \end{cases} \quad \text{Только значение } x = 2 \text{ удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$\text{Тогда } y = \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left(2; \frac{1}{2}\right).$$

1185. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$.

Замена $t = \log_x y$, $t \neq 0$ приводит первое уравнение системы к виду

$$(t-6)\left(\frac{1}{t}-1\right) = 2; \quad t_1 = 2, \quad t_2 = 3.$$

$$1) \log_x y = 2; \quad y = x^2. \text{ Тогда второе уравнение примет вид}$$

$$2 - \log_2 x = 3; \quad \log_2 x = -1; \quad x = \frac{1}{2}; \quad y = x^2 = \frac{1}{4}.$$

$$2) \log_x y = 3; \quad y = x^3. \text{ Тогда второе уравнение примет вид}$$

$$3 - \log_2 x = 3; \quad \log_2 x = 0; \quad x = 1 \text{ — не удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right).$$

$$1186. \begin{cases} 25^x = 30 - 5^x, \\ 6\sqrt{3} \cos y = x + 2. \end{cases}$$

Пусть $t = 5^x$, тогда первое уравнение системы примет вид $(5^x)^2 = 30 - 5^x$, $t^2 = 30 - t$, $t^2 + t - 30 = 0$, $\begin{cases} t = 5, \\ t = -6, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} 5^x = 5, \\ 5^x = -6; \end{cases}$
 $x = 1$.

Подставив $x = 1$ во второе уравнение, получим $6\sqrt{3} \cos y = 3$, $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $y = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(1; \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{6} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$1187. \begin{cases} 9^x = 3^x + 72, \\ 2\sqrt{3} \sin y = x + 1. \end{cases}$$

Пусть $t = 3^x$, тогда первое уравнение системы примет вид $(3^x)^2 = 3^x + 72$, $t^2 = t + 72$, $t^2 - t - 72 = 0$, $\begin{cases} t = 9, \\ t = -8; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^x = 9, \\ 3^x = -8; \end{cases}$
 $x = 2$.

Подставив $x = 2$ во второе уравнение, получим $2\sqrt{3} \sin y = 3$, $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(2; (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$1188. (4 \cos^2 x - 12 \cos x + 5) \sqrt{-7 \sin x} = 0.$$

$$1. -7 \sin x = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \begin{cases} 4 \cos^2 x - 12 \cos x + 5 = 0, \\ \sin x \leq 0. \end{cases}$$

Решим уравнение системы.

$$4 \cos^2 x - 12 \cos x + 5 = 0.$$

Обозначим $\cos x = t$, $|t| \leq 1$.

$$\text{Уравнение примет вид: } 4t^2 - 12t + 5 = 0 \iff \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2,5. \end{cases}$$

$t = 2,5$ не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$.

Вернёмся к исходной переменной: $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

Условию $\sin x \leq 0$ удовлетворяет $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (см. рис. 229).

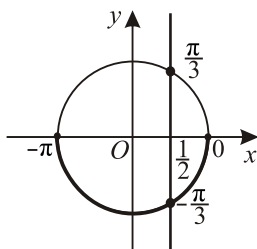


Рис. 229.

Ответ: $\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

1189. $(6 \sin^2 x - 11 \sin x + 4)\sqrt{-5 \cos x} = 0$.

1. $-5 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2.
$$\begin{cases} 6 \sin^2 x - 11 \sin x + 4 = 0, \\ \cos x \leq 0. \end{cases}$$

Решим уравнение системы.

$$6 \sin^2 x - 11 \sin x + 4 = 0.$$

Обозначим $\sin x = t$, $|t| \leq 1$.

Уравнение примет вид:

$$6t^2 - 11t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

$t = \frac{4}{3}$ не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$.

Вернёмся к исходной переменной:

$$\sin x = \frac{1}{2}, \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ \left. \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ (см. рис. 230)}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

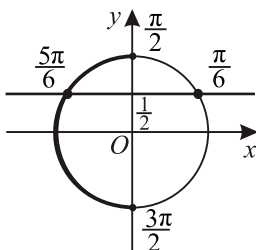


Рис. 230.

$$\begin{aligned}
 1190. \frac{4 \cos^2 x - 3}{\log_5(-\operatorname{tg} x)} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cos^2 x - 3 = 0, \\ \log_5(-\operatorname{tg} x) \neq 0, \\ \operatorname{tg} x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x \neq -1, \\ \operatorname{tg} x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi(k+1)\right), k \in Z; \end{cases} &\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

$$\begin{aligned}
 1191. (2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3)(1 - \log_2(-\sin x)) = 0 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0, \\ \log_2(-\sin x) = 1, \\ \sin x < 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0, \\ \sin x = -2, \\ \sin x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0, \\ \sin x < 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Пусть $t = \cos x$, $|t| \leq 1$. Тогда первое уравнение системы примет вид $2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ или $t = -\frac{1}{2}$. Учитывая, что $|t| \leq 1$ и возвращаясь к исходной переменной, получаем $\cos x = -\frac{1}{2}$. Отсюда $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Из неравенства $\sin x < 0$ следует $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi(k+1))$, $k \in Z$.

Значит, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$1192. \begin{cases} x^2 - x + 1 = x + 1, \\ \cos x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2) = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2, \\ x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \text{Система имеет единственное решение } x = 0.$$

Ответ: 0.

$$1193. \begin{cases} x^2 - x + 4 = 4(2x + 1), \\ \sin x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 9) = 0, \\ \sin x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 9, \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \text{Система имеет единственное решение при } x = 0.$$

Ответ: 0.

1194. Выпишем ОДЗ: $x > 100$. Обозначим $\log_8(x - 3)$ через t , тогда $t^2 - 5t + 6 = 0$, откуда возможны два случая:

1) $t = 2$, тогда $\log_8(x - 3) = 2$, т.е. $x = 67$ — не входит в ОДЗ;

2) $t = 3$, тогда $\log_8(x - 3) = 3$, т.е. $x = 515$ — является корнем.

Ответ: 515.

1195. ОДЗ: $\cos x > 0$.

Сделаем замену $\sin x = t$, тогда $1 - 5t + 2(1 - t^2) = 0, 2t^2 + 5t - 3 = 0$,

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{4}, t_1 = -3, t_2 = \frac{1}{2}.$$

а) $\sin x = -3$ — решений нет;

б) $\sin x = \frac{1}{2}$ (см. рис. 231),

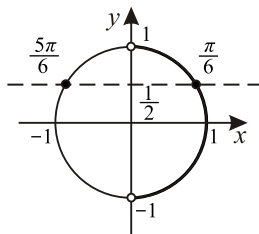


Рис. 231.

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. ОДЗ удовлетворяет только

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

1196. ОДЗ: $\sin x > 0$.

Сделаем замену $\cos x = t$, тогда $4 - 5t - 2(1 - t^2) = 0$, $2t^2 - 5t + 2 = 0$,

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 2.$$

а) $\cos x = \frac{1}{2}$ (см. рис. 232), $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. ОДЗ удовлетворяет

только $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$;

б) $\cos x = 2$ — решений нет.

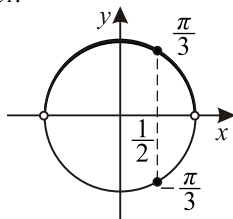


Рис. 232.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

1197. ОДЗ: $\begin{cases} 3x - 1 > 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$.

Замена $2\sqrt{x} = t$.

$$t^3 - \frac{7t^2}{2} + \frac{7t}{2} - 1 = 0; \quad 2t^3 - 7t^2 + 7t - 2 = 0, \quad 2(t^3 - 1) - 7(t^2 - t) = 0,$$

$$2(t - 1)(t^2 + t + 1) - 7t(t - 1) = 0; \quad (t - 1)(2t^2 + 2t + 2 - 7t) = 0;$$

$$(t - 1)(2t^2 - 5t + 2) = 0; \quad (t - 1)(2t - 1)(t - 2) = 0,$$

$$t_1 = 1 = 2\sqrt{x}, \quad x = 0 \text{ — не удовлетворяет ОДЗ,}$$

$$t_2 = \frac{1}{2} = 2\sqrt{x}, \quad \sqrt{x} = -1, \text{ решений нет.}$$

$$t \geq 1, \quad t_3 = 2 = 2\sqrt{x}, \quad x = 1.$$

Ответ: 1.

1198. ОДЗ: $x^2 - x > 0$, $x(x - 1) > 0$, $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. Замена $3x^2 = t > 1$.

$$t^3 - \frac{13t^2}{3} + \frac{13t}{3} - 1 = 0;$$

$$3t^3 - 13t^2 + 13t - 3 = 0; 3(t^3 - 1) - 13(t^2 - t) = 0;$$

$$3(t - 1)(t^2 + t + 1) - 13t(t - 1) = 0; (t - 1)(3t^2 + 3t + 3 - 13t) = 0;$$

$$(t - 1)(3t^2 - 10t + 3) = 0; (t - 1)(3t - 1)(t - 3) = 0;$$

$t_1 = 1 = 3x^2$, $x = 0$ — не удовлетворяет ОДЗ.

$t_2 = \frac{1}{3} = 3x^2$ — не удовлетворяет условию $t > 1$.

$$t_3 = 3 = 3x^2, x^2 = 1, \begin{cases} x = -1, \\ x = 1 \end{cases} \text{ — не удовлетворяет ОДЗ.}$$

Ответ: -1 .

1199. Учитывая, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, перепишем исходное уравнение в виде $\frac{8\sin^2 x - 2\sin x - 1}{\sqrt{3\cos x + 2\sqrt{2}}} = 0$, то есть $\begin{cases} 8\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0, \\ 3\cos x + 2\sqrt{2} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -\frac{1}{4}, \\ \cos x > -\frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{cases}$$

Решению совокупности соответствует четыре точки (см. рис. 233).

Точки в I-й и IV-й четвертях удовлетворяют условию $\cos x > -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (так как в этих четвертях косинус положителен). Проверим точки во II-й и III-й четвертях. Здесь неравенство $\cos x > -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ равносильно неравенству

$$\cos^2 x < \frac{8}{9} \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x < \frac{8}{9} \Leftrightarrow \sin^2 x > \frac{1}{9} \Leftrightarrow |\sin x| > \frac{1}{3}.$$

Условию удовлетворяет точка $\frac{5\pi}{6}$ во II-й четверти, соответствующая ре-

шению уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$; точка $-\pi + \arcsin \frac{1}{4}$, соответствующая реше-

нию уравнения $\sin x = -\frac{1}{4}$, не удовлетворяет условию $|\sin x| > \frac{1}{3}$.

Окончательным решением является $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$,

$$x = -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

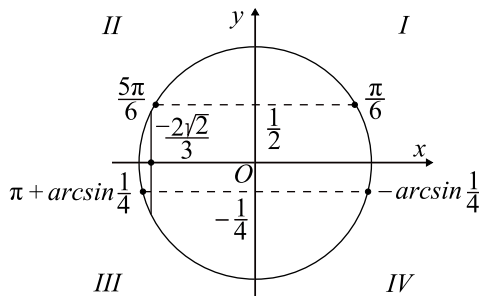


Рис. 233.

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

1200. Учитывая, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, перепишем исходное уравнение в виде $\frac{12 \cos^2 x - 4 \cos x - 5}{\sqrt{2} - 3 \sin x} = 0$, то есть $\begin{cases} 12 \cos^2 x - 4 \cos x - 5, \\ 2 - 3 \sin x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{5}{6}, \\ \sin x < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решению совокупности соответствует четыре точки (см. рис. 234).

Так точки в III и IV четвертях удовлетворяют условию $\sin x < \frac{2}{3}$. Проверим точки в I и II четвертях. Здесь неравенство $\sin x < \frac{2}{3}$ равносильно неравенству $\sin^2 x < \frac{4}{9} \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x < \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos^2 x > \frac{5}{9}$. Для точки $x = \frac{2\pi}{3}$ имеем: $\cos^2 x = \frac{1}{4} < \frac{5}{9}$. Для точки $x = \arccos \frac{5}{6}$ име-

ем: $\cos^2 x = \frac{25}{36} > \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$. Поэтому условию $\sin x < \frac{2}{3}$ удовлетворяют три точки (в I, III и IV четверти). Окончательным решением является $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, x = \pm \arccos \frac{5}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

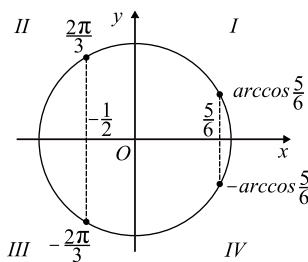


Рис. 234.

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \pm \arccos \frac{5}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

1201. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2^{2 \cos x} \cdot 2^{\sqrt{2} \cos x} - 2^{\sqrt{2} \cos x} - 4 \cdot 2^{2 \cos x} + 4 = 0, \\ (2 \sin x - 1)(1 - 2 \cos x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2^{2 \cos x} - 1)(2^{\sqrt{2} \cos x} - 4) = 0, \\ (2 \sin x - 1)(1 - 2 \cos x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2^{2 \cos x} = 2^0, \\ 2^{\sqrt{2} \cos x} = 2^2, \end{cases} \\ (2 \sin x - 1)(1 - 2 \cos x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = \sqrt{2}, \end{cases} \\ (2 \sin x - 1)(1 - 2 \cos x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2 \sin x - 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

1202. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 25^{\sin x} + 5^{\sin x+1} - 6 = 0, \\ (2 \cos x - 1)(\sqrt{3} - 2 \sin x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{2 \sin x} + 5 \cdot 5^{\sin x} - 6 = 0, \\ (2 \cos x - 1)(\sqrt{3} - 2 \sin x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} (5^{\sin x} + 6)(5^{\sin x} - 1) = 0, \\ (2 \cos x - 1)(\sqrt{3} - 2 \sin x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{\sin x} = 1, \\ (2 \cos x - 1)(\sqrt{3} - 2 \sin x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ (2 \cos x - 1)(\sqrt{3} - 2 \sin x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in Z, \\ 2 \cos x - 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in Z.
\end{aligned}$$

Ответ: $2\pi n, n \in Z$.

1203. $\sin 12x - 1 \leq 0, (|\sin 2x| - \cos 6x)^2 \geq 0$, поэтому равенство возможно лишь в случае одновременного равенства нулю обеих частей уравнения:

$$\begin{cases} \sin 12x - 1 = 0, \\ |\sin 2x| = \cos 6x. \end{cases} \quad \text{Решением первого уравнения являются}$$

$$x_k = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z. \text{ Поскольку } 6x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ а } \cos 6x \geq 0, \text{ то } k$$

$$\text{должно быть чётным, } \Rightarrow x_n = \frac{\pi}{24} + \frac{2\pi n}{6}, n \in Z. \text{ Так как } \cos 6x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ то}$$

$$\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ что будет выполняться при } n = \pi(3p + 1), p \in Z \text{ и тогда}$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \pi p, p \in Z.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8} + \pi p, p \in Z$.

1204. $\cos 6x - 1 \leq 0, (|\cos x| - \sin 4x)^2 \geq 0$, \Rightarrow равенство возможно лишь в случае одновременного равенства нулю обеих частей уравнения:

$$\begin{cases} \cos 6x = 1, \\ |\cos x| = \sin 4x. \end{cases} \quad \text{Решением первого уравнения являются } x_k = \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$$

$$\text{Задача сводится к решению уравнения } \left| \cos \frac{\pi k}{3} \right| - \sin \frac{4\pi k}{3} = 0, k \in Z.$$

Если $k = 3n$, где $n \in Z$, то $\left| \cos \frac{\pi k}{3} \right| - \sin \frac{4\pi k}{3} = |\cos \pi n| - \sin 4\pi n = 1 - 0 \neq 0$. Если $k = 3n + r$, где $r = 1$ или $r = 2$, то $\left| \cos \frac{\pi k}{3} \right| - \sin \frac{4\pi k}{3} = \left| \cos \left(\pi n + \frac{\pi r}{3} \right) \right| - \sin \left(4\pi n + \frac{4\pi r}{3} \right) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$. Рассмотренное последним уравнение решений не имеет, следовательно, у исходной системы решений нет.

Ответ: решений нет.

1205. Обозначим $5^{1-y^2} = a$, тогда

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x < 0, (1) \\ 5a^2 - 25\frac{1}{5}a + 1 = 0, (2) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{4\cos^2 x} = \frac{2}{5} - a. (3) \end{cases}$$

Решим уравнение (2), $a_1 = \frac{1}{25}$; $a_2 = 5$. Из (3) получим:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{4\cos^2 x} = \frac{2}{5} - 5, \text{ корней нет; } \left(\frac{3}{5}\right)^{4\cos^2 x} = \frac{2}{5} - \frac{1}{25}; \left(\frac{3}{5}\right)^{4\cos^2 x} = \frac{9}{25};$$

$$4\cos^2 x = 2; \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \text{ Учитывая условие (1),}$$

$$\text{получим } x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \text{ Найдем } y: 5^{1-y^2} = \frac{1}{25}; 1 - y^2 = -2; y^2 = 3, \\ y_{1,2} = \pm \sqrt{3}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \sqrt{3}\right), \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\sqrt{3}\right), k \in Z.$$

$$\text{1206. Обозначим } 6^{y^2-2} = a, \text{ тогда } \begin{cases} a + \left(\frac{2}{3}\right)^{-4\sin^2 x} = \frac{5}{3}, (1) \\ a^2 - 36\frac{1}{6}a + 6 = 0, (2) \\ 5\sin x + 1 > 0. (3) \end{cases}$$

$$\text{Из (2) } a_1 = 36, a_2 = \frac{1}{6}, \text{ тогда из (1) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-4\sin^2 x} = \frac{5}{3} - a; \text{ при } a = 36 \text{ корней}$$

$$\text{нет, при } a = \frac{1}{6} \text{ получим } \left(\frac{2}{3}\right)^{-4\sin^2 x} = \frac{3}{2}; -4\sin^2 x = -1; \sin x = \pm \frac{1}{2}.$$

Учитывая (3), $\sin x > -\frac{1}{5}$, то есть подходит $\sin x = \frac{1}{2}$;

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. Найдём y . $6y^{2-2} = \frac{1}{6}$; $y^2 - 2 = -1$; $y^2 = 1$;
 $y_{1,2} = \pm 1$.

Ответ: $\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; 1\right), \left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; -1\right), n \in Z$.

1207. а) Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 1 + \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg}^2 x, \\ \operatorname{tg} x \geq 0; \end{cases}$

\Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \\ \operatorname{tg} x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos x} + 1\right) - \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{\cos x} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos x} - 1 - 1\right) = 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{\cos x} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos x} - 2\right) = 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{\cos x} + 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 0, \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = -1, \\ \operatorname{tg} x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{\cos x} - 2 = 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 0; \end{cases} & & \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \geq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \pi + 2\pi n, n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

$x = \pi + 2\pi n, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ — корни данного уравнения (см. рис. 235).

б) Выполним отбор корней на промежутке $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

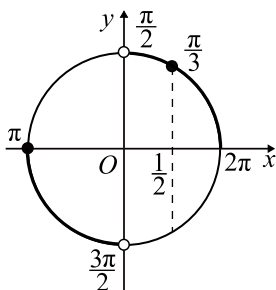


Рис. 235.

1. $x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$

$$-3\pi \leq \pi + 2\pi n \leq -\frac{3\pi}{2},$$

$$-3 \leq 1 + 2n \leq -1,5,$$

$$-4 \leq 2n \leq -2,5,$$

$$-2 \leq n \leq -1,25,$$

$$n = -2, \text{ так как } n \in Z.$$

$$\text{При } n = -2 \text{ имеем } x = \pi - 4\pi = -3\pi.$$

2. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

$$-3\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq -\frac{3\pi}{2},$$

$$-3 \leq \frac{1}{3} + 2n \leq -\frac{3}{2},$$

$$-3\frac{1}{3} \leq 2n \leq -\frac{11}{6},$$

$$-\frac{5}{3} \leq n \leq -\frac{11}{12},$$

$$n = -1, \text{ так как } n \in Z.$$

$$\text{При } n = -1 \text{ имеем } x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}.$$

Таким образом, корнями исходного уравнения, принадлежащими промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$, являются числа -3π и $-\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) -3π ; $-\frac{5\pi}{3}$.

1208. а) Учитывая, что $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, запишем уравнение в виде

$$\sqrt{2} - \sqrt{2 \sin^2 x} = \sqrt{-\sin x}, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sin^2 x} + \sqrt{-\sin x} - \sqrt{2} = 0.$$

Обозначим $\sqrt{-\sin x} = t$, $t \in [0; 1]$. Получим квадратное уравнение

$$\sqrt{2} \cdot t^2 + t - \sqrt{2} = 0, \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}}, \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad t_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

t_2 не удовлетворяет условию $t \in [0; 1]$.

Вернёмся к исходной переменной $\sqrt{-\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\sin x = \frac{1}{2}$,

$$\sin x = -\frac{1}{2}, \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) Выполним отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ принадлежит только один корень $\frac{19\pi}{6}$ (см. рис. 236).

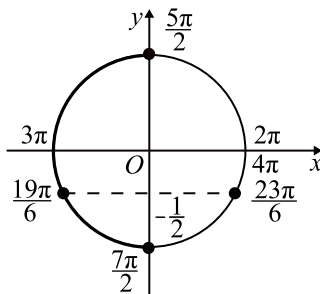


Рис. 236.

Ответ: а) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{19\pi}{6}$.

1209. а) $\sqrt{(\cos 5x - 5)^2} - \sqrt{(7 \cos 5x - 10)^2} = -8$,
 $|\cos 5x - 5| - |7 \cos 5x - 10| = -8$, $|5 - \cos 5x| - |10 - 7 \cos 5x| = -8$. Так как $\cos 5x \in [-1; 1]$, то $5 - \cos 5x > 0$ и $10 - 7 \cos 5x > 0$ для всех x .

$$5 - \cos 5x - 10 + 7 \cos 5x = -8, 6 \cos 5x = -3, \cos 5x = -\frac{1}{2},$$

$$5x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. x = \pm \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) Запишем решение уравнения в виде двух серий: $x = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi n$,
 $x = -\frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z}$. В каждой серии корней найдём корни на промежутке $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right)$.

В первой серии $\frac{\pi}{3} \leq \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi n < \pi; 5 \leq 2 + 6n < 15; 3 \leq 6n < 13$;
 $0,5 \leq n < 2\frac{1}{6}$. При $n = 1$ получаем корень $x = \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{8\pi}{15}$; при
 $n = 2$ — корень $x = \frac{2}{15}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{14\pi}{15}$.

Во второй серии $\frac{\pi}{3} \leq -\frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi n < \pi; 5 \leq -2 + 6n < 15$;
 $7 \leq 6n < 17; 1\frac{1}{6} \leq n < 2\frac{5}{6}$. При $n = 2$ получаем корень
 $x = -\frac{2}{15}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: а) $\pm \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{15}, \frac{2\pi}{3}, \frac{14\pi}{15}$.

1210. а) $\sqrt{(\sin 3x - 3)^2} - \sqrt{(5 \sin 3x - 8)^2} = -7$,
 $|\sin 3x - 3| - |5 \sin 3x - 8| =$
 $= -7, |3 - \sin 3x| - |8 - 5 \sin 3x| = -7$. Так как $\sin 3x \in [-1; 1]$, то
 $3 - \sin 3x \geq 0$ и $8 - 5 \sin 3x > 0$ для всех x . $3 - \sin 3x - 8 + 5 \sin 3x = -7$,
 $4 \sin 3x = -2, \sin 3x = -\frac{1}{2}, 3x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$,

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

б) Запишем решение уравнения в виде двух серий: $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$,
 $x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$.

В каждой серии корней найдём корни на промежутке $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right)$.

В первой серии $2\pi \leq -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < \frac{5\pi}{2}; 36 \leq -2 + 12n < 45;$
 $38 \leq 12n < 47; 2\frac{2}{12} \leq n < 2\frac{11}{12}$. Нет целых n , удовлетворяющих этому неравенству.

Во второй серии $2\pi \leq \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3} < \frac{5\pi}{2}; 36 \leq 1 + 6 + 12n < 45;$
 $29 \leq 12n < 38; 2\frac{5}{12} \leq n < 3\frac{2}{12}$. При $n = 3$ получаем корень

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{43\pi}{18}.$$

Ответ: а) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$; б) $\frac{43\pi}{18}$.

$$1211. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} \frac{5\pi}{2} - x > 0, \\ \frac{5\pi}{2} - x \neq 1, \\ x - \frac{3\pi}{2} > 0; \end{cases} \quad x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} - 1\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2} - 1; \frac{5\pi}{2}\right).$$

На ОДЗ исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 8 \cos^2 x + 2 \sin x - 7 = 0, \\ \log_{\frac{5\pi}{2}-x} \left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0, \\ x - \frac{3\pi}{2} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 8 \left(\sin x + \frac{1}{4}\right) \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0, \\ x = \frac{3\pi + 2}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi k, k \in Z, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, \\ x = \frac{3\pi + 2}{2}. \end{cases}$$

Среди корней $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi k$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$ и

$x = \frac{3\pi + 2}{2}$ находим те, которые лежат в интервале $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$. Это

$$x = 2\pi + \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\pi - \arcsin \frac{1}{4}, x = 2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ и } x = \frac{3\pi + 2}{2}.$$

Таким образом, корнями исходного уравнения являются числа

$$2\pi - \arcsin \frac{1}{4}; \frac{13\pi}{6}; \frac{3\pi + 2}{2}, \text{ каждое из которых не равно } \frac{5\pi}{2} - 1.$$

$$\text{Ответ: } 2\pi - \arcsin \frac{1}{4}; \frac{13\pi}{6}; \frac{3\pi + 2}{2}.$$

$$1212. \text{ а) } (5 \sin^2 x + 4 \cos x - 4) \ln(x - 7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5 \sin^2 x + 4 \cos x - 4 = 0, \\ x - 7 > 0, \\ x - 7 = 1; \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5 \cos^2 x - 4 \cos x - 1 = 0, \\ x > 7, \\ x = 8; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5\left(\cos x + \frac{1}{5}\right)(\cos x - 1) = 0, \\ x > 7, \\ x = 8; \end{cases} & \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \begin{cases} x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k, k \in Z, \\ x = 2\pi k, k \in Z, \\ x > 7, \end{cases} \\ x = 8; \end{cases}$$

1) $2\pi k > 7$ ($k \in Z$) при $k > 1$.

2) Из условия $\pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi n > 7$ ($n \in Z$) получаем корень

$$3\pi - \arccos \frac{1}{5} \text{ при } n = 1 \text{ и корни } \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi n \text{ при } n > 1.$$

Таким образом, корнями данного уравнения являются числа 8;

$$3\pi - \arccos \frac{1}{5}; 2\pi k, \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k, k \in Z, k > 1.$$

б) Корень $x = 8$ принадлежит промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. Так как $\frac{3\pi}{2} < 7$, среди корней $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k$ и $x = 2\pi k, k \in Z$ найдём те, которые принадлежат промежутку $[7; 3\pi]$. Это корень $3\pi - \arccos \frac{1}{5}$.

Таким образом, корнями исходного уравнения, принадлежащими промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, являются числа 8 и $3\pi - \arccos \frac{1}{5}$.

$$\text{Ответ: а) } 8; 3\pi - \arccos \frac{1}{5}, 2\pi k, 2\pi k \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right), k \in Z, k > 1;$$

$$\text{б) } 8; 3\pi - \arccos \frac{1}{5}.$$

1213. а) Исходное уравнение равносильно уравнению $3\cos^2 x - 2\sin x - 2 = 0$; $3 - 3\sin^2 x - 2\sin x - 2 = 0$; $3\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$, откуда $\sin x = -1$ или $\sin x = \frac{1}{3}$. Уравнение $\sin x = -1$ имеет корни $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Уравнение $\sin x = \frac{1}{3}$ имеет корни $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$.

Таким образом, исходное уравнение имеет корни $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$,

$$(-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z.$$

б) В каждой из серий корней найдём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

В серии $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ имеем $\frac{5\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \leq \frac{7\pi}{2}$; $\pi \leq 2\pi n \leq 2\pi$;

$\frac{1}{2} \leq n \leq 1$. Так как $n \in Z$, то $n = 1$ и $x = \frac{7\pi}{2}$.

В серии $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$ имеем

$$\frac{5\pi}{2} \leq (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k \leq \frac{7\pi}{2};$$

$$\frac{5\pi}{2} - (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} \leq \pi k \leq \frac{7\pi}{2} - (-1)^k \arcsin \frac{1}{3};$$

$$\frac{5}{2} - \frac{(-1)^k}{\pi} \arcsin \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{7}{2} - \frac{(-1)^k}{\pi} \arcsin \frac{1}{3}.$$

Так как $k \in Z$ и $0 < \arcsin \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$, то $k = 3$ и $x = 3\pi - \arcsin \frac{1}{3}$.

Ответ: а) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $(-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{7\pi}{2}$, $3\pi - \arcsin \frac{1}{3}$.

1214. а) Исходное уравнение равносильно уравнению $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$; $2 - 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, откуда $\cos x = 1$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$. Уравнение $\cos x = 1$ имеет корни

$x = 2\pi n$, $n \in Z$. Уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$ имеет корни $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Таким образом, исходное уравнение имеет корни $2\pi n$, $n \in Z$, $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) В каждой из серий корней найдём корни, принадлежащие отрезку $[4\pi; 5\pi]$.

В серии $x = 2\pi n$, $n \in Z$ имеем $4\pi \leq 2\pi n \leq 5\pi$; $2 \leq n \leq 2,5$. Так как $n \in Z$, то $n = 2$ и $x = 4\pi$.

В серии $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$ имеем $4\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 5\pi$; $2 \leq k + \frac{1}{3} \leq \frac{5}{2}$; $1\frac{2}{3} \leq k \leq 2\frac{1}{6}$. Так как $k \in Z$, то $k = 2$ и $x = \frac{14\pi}{3}$.

В серии $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$ имеем $4\pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 5\pi$; $2 \leq k - \frac{1}{3} \leq \frac{5}{2}$; $2\frac{1}{3} \leq k \leq 2\frac{5}{6}$. Так как $k \in Z$, то в этой серии нет корней из отрезка $[4\pi; 5\pi]$.

Ответ: а) $2\pi n$, $n \in Z$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) 4π , $\frac{14\pi}{3}$.

1215. а) $4 \cdot 16^{2\sin x \cos x} - 9 \cdot 16^{\sin x \cos x} + 2 = 0$. Пусть $16^{\sin x \cos x} = y$, $y > 0$,

тогда $4y^2 - 9y + 2 = 0$; $y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{8} = \frac{9 \pm 7}{8}$; $y_1 = \frac{1}{4}$; $y_2 = 2$.

$$1. 16^{\sin x \cos x} = \frac{1}{4}; \sin x \cos x = -\frac{1}{2}; 2 \sin x \cos x = -1; \sin 2x = -1;$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

$$2. 16^{\sin x \cos x} = 2; \sin x \cos x = \frac{1}{4}; 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2}; \sin 2x = \frac{1}{2};$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ и } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; x = \frac{\pi}{12} + \pi k \text{ и } x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in Z.$$

б) Выберем корни, принадлежащие $\left[-\pi; \frac{2\pi}{5}\right]$.

$$1: -\pi \leq -\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{4} + k \leq \frac{2}{5} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{13}{20} \Leftrightarrow k = 0,$$

$$\text{так как } k \in Z \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}.$$

$$2: -\pi \leq \frac{\pi}{12} + \pi k \leq \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{12} + k \leq \frac{2}{5} \Leftrightarrow -\frac{13}{12} \leq k \leq \frac{19}{60} \Leftrightarrow k = -1$$

$$\text{или } k = 0, \text{ так как } k \in Z \Rightarrow x = -\frac{11\pi}{12} \text{ и } x = \frac{\pi}{12}.$$

$$-\pi \leq \frac{5\pi}{12} + \pi k \leq \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow -\frac{17}{12} \leq k \leq -\frac{1}{60} \Rightarrow k = -1, \text{ так как } k \in Z \Rightarrow$$

$$x = -\frac{7\pi}{12}.$$

Таким образом, на отрезке $\left[-\pi; \frac{2\pi}{5}\right]$ лежат только корни $-\frac{11\pi}{12}$, $-\frac{7\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{12}$.

$$\text{Ответ: а) } -\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{12} + \pi k, \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in Z;$$

$$\text{б) } -\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}.$$

1216. а) $3 \cdot 9^{2 \cos 2x} - 28 \cdot 9^{\cos 2x} + 9 = 0$. Пусть $9^{\cos 2x} = y$, $y > 0$, тогда

$$3y^2 - 28y + 9 = 0; y_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 3 \cdot 9}}{3} = \frac{14 \pm 13}{3}; y_1 = \frac{1}{3}; y_2 = 9.$$

$$1. 9^{\cos 2x} = \frac{1}{3}; \cos 2x = -\frac{1}{2}; 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2. 9^{\cos 2x} = 9; \cos 2x = 1; 2x = 2\pi k; x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Объединяя найденные решения, получаем $x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{б) Решим неравенство } -\frac{4\pi}{3} < \frac{\pi k}{3} < \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < \frac{k}{3} < \frac{5}{12},$$

$$k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -4 < k < \frac{5}{4}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = -3, k = -2, k = -1, k = 0, k = 1.$$

На интервале $\left(-\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{12}\right)$ лежат только корни $-\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0$ и $\frac{\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$.

1217. Пусть SO — высота пирамиды $SABC$, H — проекция точки M на плоскость основания, K — середина BC (см. рис. 237). Так как HN —

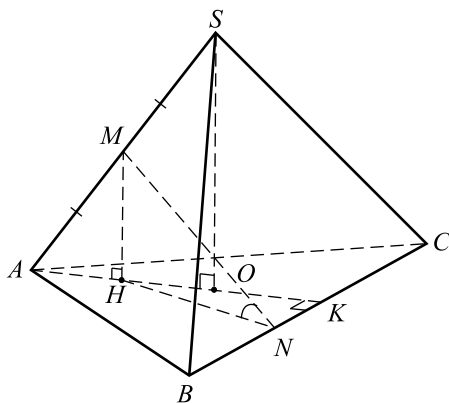


Рис. 237.

проекция прямой MN на плоскость основания, то $\angle MNH$ — искомый. Так как $MH \parallel SO$ и $AM = MS$, то MH — средняя линия $\triangle ASO$. Значит

$$AH = HO = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2} \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} (AO \text{ — радиус окружности, описанной около правильного } \triangle ABC).$$

Тогда $MH = \sqrt{\left(\frac{AS}{2}\right)^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{39}}{2}$.

$OK = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}$ (OK — радиус окружности, вписанной в правильный

$\triangle ABC$). Следовательно, $HK = HO + OK = 1$.

Из условия следует, что $BN = \frac{1}{3}BC = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Тогда $NK = BK - BN =$
 $= \frac{BC}{2} - BN = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. По теореме Пифагора для $\triangle HKN$:
 $HN = \sqrt{NK^2 + HK^2} = \frac{\sqrt{39}}{6}$. Итак, из прямоугольного $\triangle MHN$

следует, что $\operatorname{tg} \angle MNH = \frac{MH}{HN} = 3$; $\angle MNH = \operatorname{arctg} 3$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 3$.

1218. Пусть H — проекция точки N на плоскость основания, SO — высота пирамиды, M — середина BC (см. рис. 238). Тогда $\angle NCH$ — иско-
 мый.

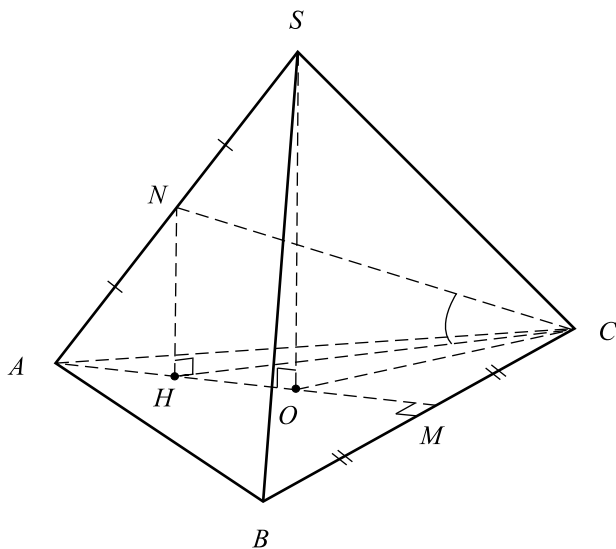


Рис. 238.

Так как $\triangle ANH \sim \triangle ASO$ (оба прямоугольных треугольника имеют общий острый угол при вершине A), то $\frac{NH}{SO} = \frac{AN}{AS} = \frac{1}{2} \Rightarrow NH = \frac{SO}{2}$.

$AO = \frac{2}{3}AM$ (O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$),

$$AO = \frac{2}{3}\sqrt{AC^2 - MC^2} = 1. \text{ Тогда } NH = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}\sqrt{AS^2 - AO^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Из подобия треугольников ANH и ASO следует, что $HO = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}$.

$CO = AO = 1$. Так как $\triangle AOC$ — равнобедренный, AO и OC — биссектрисы равностороннего $\triangle ABC$, то $\angle AOC = \angle HOC = 120^\circ$. По теореме косинусов для треугольника HOC получим:

$$CH^2 = HO^2 + CO^2 - 2 \cdot HO \cdot CO \cdot \cos \angle HOC = \frac{1}{4} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4};$$

$$CH = \frac{\sqrt{7}}{2}. \text{ Тогда } \operatorname{tg} \angle NCH = \frac{NH}{CH} = 1; \angle NCH = 45^\circ.$$

Ответ: 45° .

1219. На рисунке 239 плоскость PMN — плоскость α .

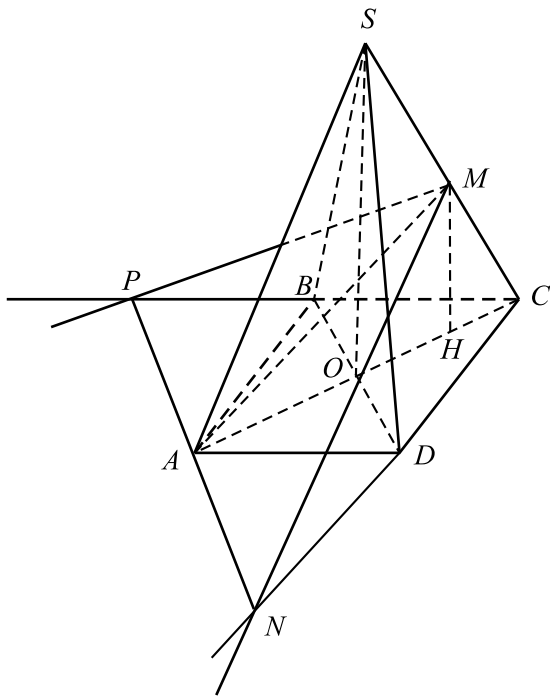


Рис. 239.

PN — пересечение плоскостей ABC и PMN , а так как плоскость

PMN параллельна прямой BD , содержащейся в плоскости ABC , то $PN \parallel BD$.

$AC \perp BD$ как диагонали квадрата, $PN \parallel BD$, тогда $AC \perp PN$.

Пусть H — проекция точки M на плоскость основания пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах $AM \perp PN$, и тогда угол MAC является углом между плоскостью α и плоскостью основания.

Так как пирамида правильная, то боковые ребра равны между собой, тогда треугольник SAC равнобедренный, а так как угол при его основании равен $\frac{\pi}{6} = 60^\circ$, то он равносторонний. Так как MA является медианой равностороннего треугольника, то она является его биссектрисой и $\angle MAC = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

1220. Пусть M — середина ребра SE (см. рис. 240), H — проекция точки M на плоскость основания пирамиды. Пусть O — центр основания пирамиды. Так как проекцией ребра SE на плоскость основания является отрезок OE , то $H \in OE$.

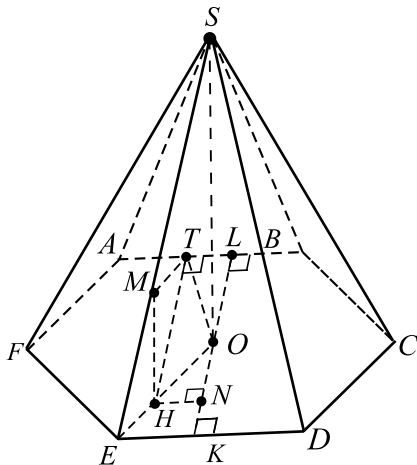


Рис. 240.

Из $\triangle SOE$: $SO = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$. ($OE = 1$, как ради-

ус окружности, описанной около правильного шестиугольника со стороной 1).

$\triangle EMH \sim \triangle ESO$ (прямоугольные с общим острым углом E).

$$\frac{MH}{SO} = \frac{EM}{SE} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{EH}{HO} = \frac{EM}{MS} = 1 \Rightarrow EH = HO = \frac{1}{2}.$$

Пусть OK — высота в $\triangle EOD$. $\triangle EOD$ — правильный со стороной 1 \Rightarrow

$$OK = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Аналогично } OL = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ где } OL \text{ — высота в } \triangle AOB.$$

$AB \parallel ED \Rightarrow K, O, L$ лежат на одной прямой, $KL = \sqrt{3}$.

Из точки H опустим перпендикуляр HN на OK .

Так как $HN \parallel EK$, то по теореме Фалеса

$$\frac{KN}{NO} = \frac{EH}{HO} = 1 \Rightarrow KN = \frac{OK}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$NL = KL - KN = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Опустим из точки H перпендикуляр HT на AB .

$$HTLN \text{ — прямоугольник} \Rightarrow HT = LN = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Угол MTH — искомый

(так как $MH \perp AB$, $MH \perp HT$, $HT \parallel AE$, $MT \in ABM$).

$$\operatorname{tg} \angle MTH = \frac{MH}{TH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

1221. Пусть M — середина SD (см. рис. 241), $DM = MS = 1$. Так как $SABCD$ правильная пирамида, то $SO \perp ABC$, где O — центр квадрата $ABCD$.

Из $\triangle ADB$ по теореме Пифагора

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2}, DO = \frac{BD}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Опустим из M перпендикуляр MH на плоскость ABC . Так как отрезок DO является проекцией отрезка DS на плоскость ABC , то $H \in DO$.

По теореме Фалеса $\frac{DH}{HO} = \frac{DM}{MS} = 1$ (так как $MH \parallel OS$ как перпендикуляр к одной плоскости $ABCD$).

$$DH = \frac{DO}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}; BH = HO + OB = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

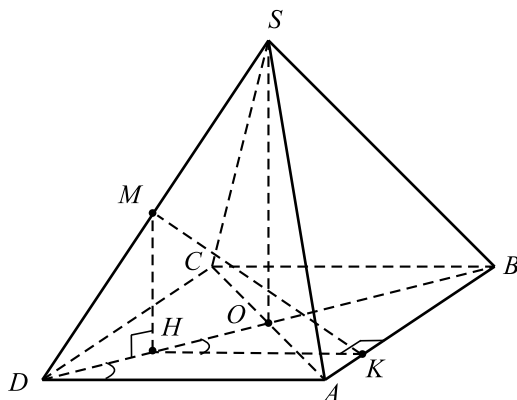


Рис. 241.

Опустим из точки H перпендикуляр HK на AB . Так как $HK \parallel AD$, то $\angle BHK = \angle BDA$ (соответственные) и $\triangle BHK \sim \triangle BDA$ (прямоугольные с равными острыми углами).

$$\frac{HK}{AD} = \frac{BH}{BD}; HK = AD \cdot \frac{BH}{BD} = 1 \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}.$$

Из $\triangle SOD$ находим

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}};$$

$$MH \text{ — средняя линия } \triangle SDO \Rightarrow MH = \frac{1}{2}SO = \sqrt{\frac{7}{8}}.$$

Из $\triangle MHK$ по теореме Пифагора:

$$MK = \sqrt{MH^2 + HK^2} = \sqrt{\frac{7}{8} + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{23}}{4}.$$

$$\sin \angle MKH = \frac{MH}{MK} = \sqrt{\frac{7}{8}} \cdot \frac{4}{\sqrt{23}} = \sqrt{\frac{14}{23}}.$$

Это и есть искомый синус, так как

$MK \in ABM$, $HK \parallel AD$, $MH \perp AB$, $MH \perp HK$.

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{14}{23}}.$$

1222. Примем длину стороны основания пирамиды за единицу. Тогда $AB = BC = AC = DH = 1$.

Опустим из точки K перпендикуляр KM на ABC . Так как отрезок AH является проекцией отрезка AD на ABC , то $M \in AH$. Отсюда $\angle KHA$ —

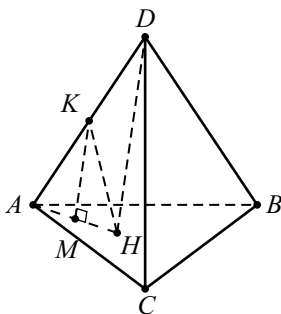


Рис. 242.

около. AH — радиус описанной около правильного треугольника ABC окружности, то $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

KM — средняя линия $\triangle HAD$ (так как $AK = KD$ и $KM \parallel DH$ ввиду $KM \perp ABC$ и $DH \perp ABC$). Отсюда $KM = \frac{DH}{2} = \frac{1}{2}$;

$$MH = \frac{AH}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\operatorname{tg} \angle KHM = \frac{KM}{MH} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \text{ значит, } \angle KHM = 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

1223. Примем длину SH за единицу. Тогда $AC = BD = 2$, $AH = \frac{AC}{2} = 1$ (так как H — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$). Опустим из точки K перпендикуляр KM на $ABCD$. Имеем: $KM \parallel SH$; проекцией отрезка AS на ABC является отрезок $AH \Rightarrow M \in AH$.

Из $\triangle ASH$ по теореме Пифагора: $AS = \sqrt{AH^2 + HS^2} = \sqrt{2}$.

$\triangle AKM \sim \triangle ASH$ (прямоугольные треугольники имеют общий острый угол при вершине A). Отсюда

$$\frac{AM}{AH} = \frac{KM}{SH} = \frac{AK}{AS} = \frac{1}{3} \text{ (т.к. } K \text{ делит } AS \text{ в отношении } 1 : 2).$$

$$AM = \frac{AH}{3} = \frac{1}{3}; \quad KM = \frac{SH}{3} = \frac{1}{3}; \quad MH = AH - MA = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Тогда тангенс искомого угла KHM может быть найден из $\triangle KHM$:

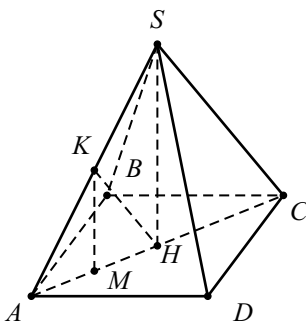


Рис. 243.

$$\operatorname{tg} \angle KHM = \frac{KM}{MH} = \frac{1}{2}, \angle KHM = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

1224. 1) Пусть CN — перпендикуляр, опущенный к стороне AB , тогда $AN = NB$ (так как $\triangle ABC$ — равносторонний, см. рис. 244). Так как пирамида $SABC$ — правильная, то проекцией вершины S на плоскость ABC является точка $O \in NC$. Следовательно, OC — проекция SC на плоскость ABC . Тогда $SNC \perp ABC$.

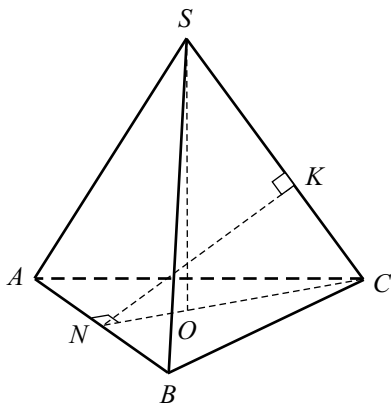


Рис. 244.

2) Опустим из N перпендикуляр NK на ребро SC . Тогда NK — искомое расстояние.

3) Из прямоугольного треугольника NCB находим $NC = \sqrt{BC^2 - NB^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$.

4) Так как все рёбра пирамиды равны, то $SN = NC \Rightarrow NK$ — медиана треугольника NSC и $SK = KC = 2$.

5) Из треугольника NCK находим $NK = \sqrt{NC^2 - KC^2} = \sqrt{12 - 4} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

1225. По условию призма правильная, значит, $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, точка O — центр основания, SO — высота (см. рис. 245).

$BE \parallel AF$, $\angle SEB$ — искомый. $\cos \angle SEB = \frac{OE}{SE}$. Так как сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности,

то $OE = EF = 3$. $\cos \angle SEB = \frac{3}{5} = 0,6$. $\angle SEB = \arccos 0,6$.

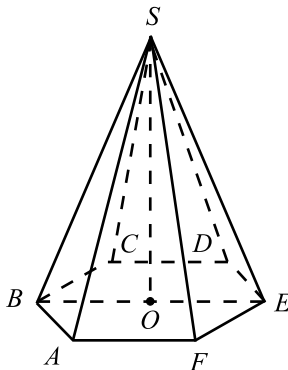


Рис. 245.

Ответ: $\arccos 0,6$.

1226. Пусть длина ребра исходного тетраэдра равна a , точка O — центр вписанной в него сферы (см. рис. 246). Так как $SABC$ — правильный тетраэдр, его вершина S проецируется на плоскость основания в точку M пересечения медиан треугольника ABC , аналогично вершина A проецируется в точку N . Точка $O \in SM$ и $O \in AN$, $OM = ON = r$. Выразим r через a . Проведём высоты SH и AH в треугольниках SBC и ABC .

$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SN = \frac{a\sqrt{3}}{3}, MH = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SM = \sqrt{SH^2 - MH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$\triangle SON \sim \triangle SMH$, так как $\angle OSN = \angle MSH$ и $\angle SNO = \angle SMH$

$\Rightarrow \frac{SN}{SM} = \frac{ON}{MH}$, откуда $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$. Рассмотрим тетраэдр, вершинами которого являются точки пересечения высот граней $SABC$. В $\triangle SKH$ (см. рис. 247) (SH и SK — апофемы) $KH = \frac{a}{2}$ как средняя линия равнобедренного треугольника со стороной a . Точки P и N — вершины полученного тетраэдра. $\triangle SPN \sim \triangle SKH$ по двум равным углам, следовательно, $\frac{PN}{KH} = \frac{SN}{SH} = \frac{2}{3}$, откуда $PN = \frac{a}{3}$. Полученный тетраэдр правильный, следовательно, проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим $R = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \Rightarrow \frac{r}{R} = 1$.

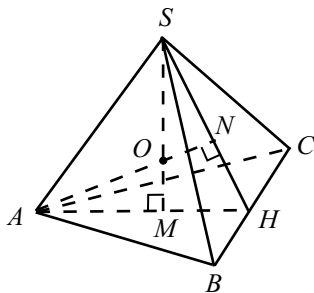


Рис. 246.

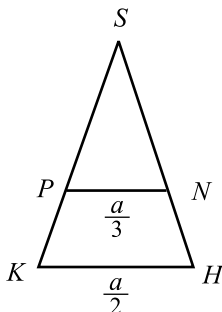


Рис. 247.

Ответ: 1.

1227. Пусть длина ребра исходного тетраэдра равна a , точка O — центр описанной около него сферы (см. рис. 248). Так как $SABC$ — правиль-

ный тетраэдр, то его вершина S проектируется на плоскость основания в точку пересечения медиан M треугольника ABC , аналогично вершина A проектируется в точку N . Точка $O \in SM$ и $O \in AN$, $AO = OS = R$. Выразим R через a . Проведём высоты SH и AH . $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$$MH = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SM = \sqrt{SH^2 - MH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \triangle SON \sim \triangle SMH, \text{ так как}$$

$$\angle OSN = \angle MSH \text{ и } \angle SNO = \angle SMH \Rightarrow \frac{SO}{SH} = \frac{SN}{SM}, \text{ откуда } R = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Рассмотрим тетраэдр, вершинами которого являются точки пересечения биссектрис граней $SABC$. В $\triangle SKH$ (см. рис. 249) (SH и SK — апофемы)

$KH = \frac{a}{2}$ как средняя линия равностороннего треугольника со стороной a . Точки P и N — вершины полученного тетраэдра. $\triangle SPN \sim \triangle SKH$

по двум равным углам, $\Rightarrow \frac{PN}{KH} = \frac{SN}{SH} = \frac{2}{3}$, откуда $PN = \frac{a}{3}$. Полученный

тетраэдр правильный, следовательно, проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим $r = \frac{a\sqrt{6}}{36}, \Rightarrow \frac{R}{r} = 9$.

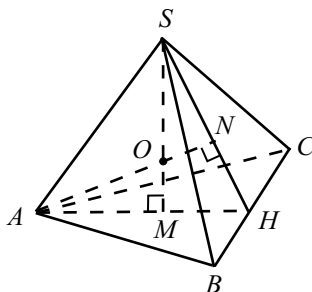


Рис. 248.

Ответ: 9.

1228. Так как пирамида правильная, то $\triangle ABC$ — равносторонний и O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$ (см. рис. 250). Пусть AK — высота $\triangle ABC$, тогда $AK = 3\sqrt{3}$ и $AO = \frac{2}{3}AK = 2\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника AOP : высота $PO = \sqrt{PA^2 - OA^2} = \sqrt{28 - 12} = 4$

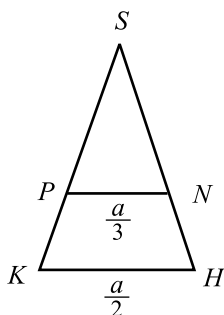


Рис. 249.

и $NO = \frac{1}{2}PO = 2$. Тогда $\operatorname{tg} \angle OAN = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, следовательно, $\angle OAN = 30^\circ$.

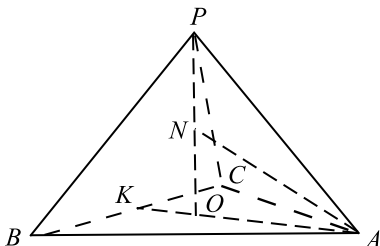


Рис. 250.

Ответ: 30° .

1229. Так как пирамида правильная, то $\triangle ABC$ — равносторонний и O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$ (см. рис. 251). Пусть BK — высота $\triangle ABC$, тогда $BK = 3\sqrt{3}$ и $BO = \frac{2}{3}BK = 2\sqrt{3}$. Высота $PO = \sqrt{108}$, тогда $NO = \frac{1}{3}PO = 2\sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} \angle BNO = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$, следовательно, $\angle BNO = 45^\circ$.

Ответ: 45° .

1230. Пусть a — длина бокового ребра правильной пирамиды $SABC$, тогда сторона основания $AB = \frac{a}{3}$ (см. рис. 252). Пусть также $AH \perp SC$, и так как пирамида правильная, $BH \perp SC$.

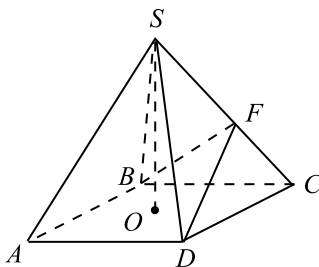


Рис. 253.

Ответ: $\arccos \frac{17}{35}$.

1231. $AB = 4$, тогда $BD = 4\sqrt{2}$ как диагональ квадрата, $BF = DF$, $\angle BFD = 60^\circ$, следовательно, $\triangle BFD$ — равносторонний. $FD = BF = BD = 4\sqrt{2}$, FD — медиана в $\triangle SDC$ (см. рис. 253).

$$FD = \frac{1}{2}\sqrt{2SD^2 + 2DC^2 - SC^2}, SC = SD, \text{ тогда } FD = \frac{1}{2}\sqrt{32 + SD^2};$$

$$4\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{32 + SD^2}; SD = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$

$$\triangle SOD: SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{96 - 8} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}.$$

Ответ: $2\sqrt{22}$.

1232. 1. Пусть $SA = SB = SC = AB = BC = AC = a$.

Тогда $SM = MN = NB = \frac{a}{3}$ (см. рис. 254). По теореме косинусов

$$CM^2 = SC^2 + SM^2 - 2SC \cdot SM \cos 60^\circ = a^2 + \frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{3} = \frac{7a^2}{9};$$

$$CM = CN = \frac{\sqrt{7}}{3}a.$$

$$2. HM = HN = \sqrt{CM^2 - CH^2} = \frac{\sqrt{19}}{6}a.$$

3. Из $\triangle HMN$ по теореме косинусов

$$\cos \angle MHN = \frac{HM^2 + HN^2 - MN^2}{2HM \cdot HN} = \frac{\frac{19}{36} + \frac{19}{36} - \frac{1}{9}}{2 \cdot \frac{19}{36}} = \frac{34}{38} = \frac{17}{19}.$$

$$4. (\widehat{AMC}, \widehat{ANC}) = \arccos \frac{17}{19}.$$

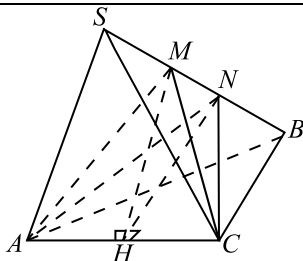


Рис. 254.

Ответ: $\arccos \frac{17}{19}$.

1233. 1) Пусть $SA = SB = SC = SD = AB = BC = CD = AD = a$,
 $SM = MN = NC = \frac{a}{3}$ (см. рис. 255).

$$DM^2 = SD^2 + SM^2 - 2SD \cdot SM \cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9}; \quad DM = DN = \frac{\sqrt{7}}{3}a.$$

2) Проведём $MM' \parallel AD$, где $M' \in SB$. $MM' = \frac{a}{3}$.

В трапеции $AM'D$ проведём высоту MH_1 (см. рис. 256), HG — также высота этой трапеции.

$$H_1D = \frac{AD - MM'}{2} = \frac{a}{3}; \quad HG = MH_1 = \sqrt{DM^2 - H_1D^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

Пусть $NN' \parallel AD$, RH и NH_2 — высоты трапеции $AN'D$.

$$NN' = \frac{2}{3}a \text{ (см. рис. 257); } H_2D = \frac{AD - NN'}{2} = \frac{a}{6};$$

$$RH = NH_2 = \sqrt{DN^2 - DH_2^2} = \sqrt{\frac{7}{9} - \frac{1}{36}}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

3) Найдём высоту SL треугольника BCS (см. рис. 258): $SL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$GR = \frac{1}{3}SL = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\begin{aligned} 4) \text{ Из } \triangle GHR, \text{ по теореме косинусов, } \cos \angle GHR &= \frac{GH^2 + RH^2 - GR^2}{2GH \cdot RH} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad (\widehat{AMD, AND}) = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

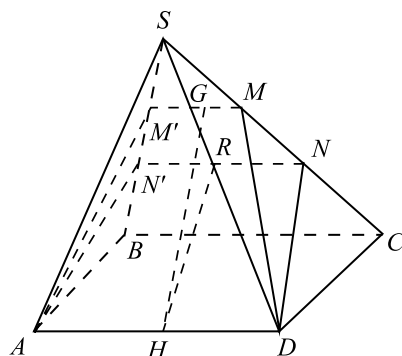


Рис. 255.

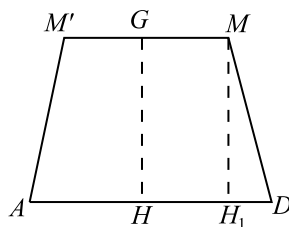


Рис. 256.

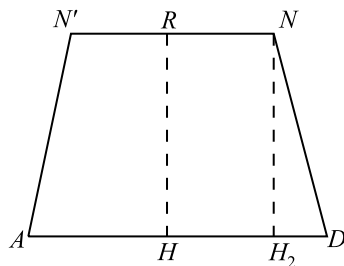


Рис. 257.

Ответ: $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

1234. Пусть R — радиус сферы. тогда $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$, $R = 3$. Обозначим O — центр сферы, a — сторона основания пирамиды, h — высота пирамиды. Возможны два случая (см. рис. 259).

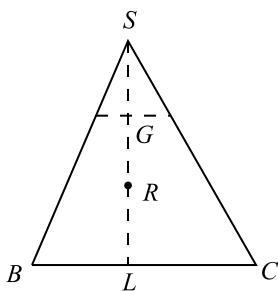


Рис. 258.

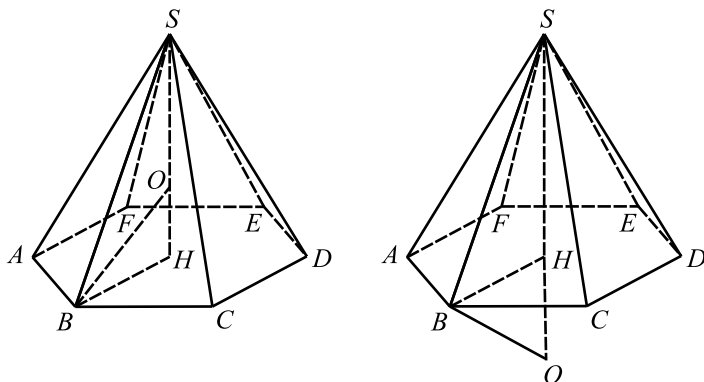


Рис. 259.

Треугольник OBH — прямоугольный, $BH = a = \sqrt{OB^2 - OH^2} =$
 $= \sqrt{R^2 - OH^2} = 2\sqrt{2}$, $S_{\text{осн}} = 6 \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}h \cdot S_{\text{осн}}.$$

Возможны два случая: в первом $h = R + OH = 4$ и $V = 16\sqrt{3}$, а во втором $h = R - OH = 2$ и $V = 8\sqrt{3}$.

Ответ: $8\sqrt{3}; 16\sqrt{3}$.

1235. Пусть R — радиус сферы, тогда $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$, $R = 3$. Обозначим

O — центр сферы, H — основание высоты пирамиды, r — радиус описанной около основания пирамиды окружности. Пусть A — одна из вершин основания, тогда $\triangle OHA$ — прямоугольный и $r^2 = HA^2 = R^2 - 1$, $r = 2\sqrt{2}$ (см. рисунок 260).

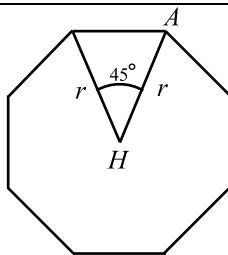


Рис. 260.

$$S_{\text{осн}} = 8 \cdot \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 45^\circ = 16\sqrt{2}.$$

Если точка O расположена внутри пирамиды, то высота пирамиды равна $R + 1$ и тогда $V = \frac{64\sqrt{2}}{3}$, иначе высота равна $R - 1$ и $V = \frac{32\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{32\sqrt{2}}{3}; \frac{64\sqrt{2}}{3}$.

1236. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр (см. рис. 261). Проведём через ребро AB плоскость, параллельную противоположному ребру CD . Такая плоскость будет единственной и выполним её построение следующим образом: возьмем точку K на AB , проведём через неё прямую $C_1D_1 \parallel CD$, тогда плоскость, проходящая через AB и C_1D_1 будет требуемой. Далее так же построим плоскость, проходящую через CD и параллельную AB . Две построенные плоскости будут параллельны. Построив для каждой пары противоположных рёбер тетраэдра аналогичным образом плоскости, получим куб с диагональю грани, равной $4\sqrt{2}$. Шар, касающийся рёбер тетраэдра, будет вписан в построенный куб, а значит, искомый радиус равен $\frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

Ответ: 2.

1237. Пусть $ABCD$ данный тетраэдр (рис. 262). Проведём через ребро AB плоскость, параллельную противоположному ребру CD . Такая плоскость будет единственной, и выполним её построение следующим образом: возьмем точку K на AB , проведём через точку K прямую $C_1D_1 \parallel CD$, тогда плоскость, проходящая через AB и C_1D_1 , будет требуемой. Далее так же построим плоскость, проходящую через CD и параллельную AB . Две построенные плоскости будут параллельны. Построив для каждой пары противоположных ребер тетраэдра аналогичным образом плоскости, получим куб с диагональю грани, равной ребру данного тетраэдра.

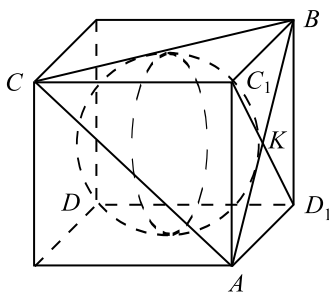


Рис. 261.

ра. Шар, касающийся ребер тетраэдра, будет вписан в построенный куб, а значит, ребро куба равно $2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, а длина диагонали его грани равна $6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12$ и является искомой длиной ребра.

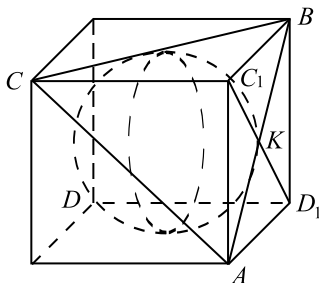


Рис. 262.

Ответ: 12.

1238. Введём прямоугольную систему координат (см. рис. 263) и найдём координаты направляющих векторов прямых BK и AC .

$B(-2; 0; 0)$, $C(2; 0; 0)$. $OA^2 = AC^2 - OC^2 = 4^2 - 2^2 = 12$, тогда

$$A(0; 2\sqrt{3}; 0). OS_1 = \frac{1}{3}AO = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$SS_1 = \sqrt{SA^2 - S_1A^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3};$$

$$S\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right), K\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{BK} \left\{ 2; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3} \right\}, \overrightarrow{AC} \{ 2; -2\sqrt{3}; 0 \}.$$

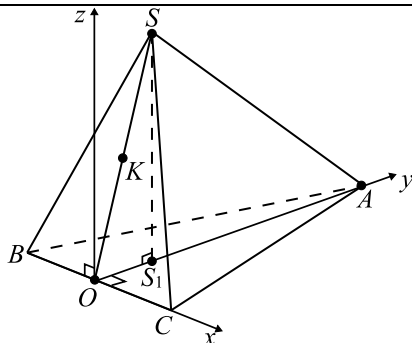


Рис. 263.

Пусть φ — искомый угол, тогда $\cos \varphi = \frac{|\vec{BK} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{BK}| \cdot |\vec{AC}|}$.

$$\vec{BK} \cdot \vec{AC} = 2 \cdot 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{3} + 0 = 4 - \frac{2 \cdot 3}{3} = 2,$$

$$|\vec{BK}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3}} = \sqrt{7};$$

$$|\vec{AC}| = 4; \quad \cos \varphi = \frac{2}{4 \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}; \quad \varphi = \arccos \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{7}}{14}$.

1239. По условию пирамида $SABCD$ правильная и все рёбра равны 1, значит, $AC = \sqrt{2}$ как диагональ квадрата $ABCD$. На ребре BS выберем точку K (см. рис. 264), так что $SK = KB$, и проведём медианы AK и CK . Так как равные треугольники SAB и SCB равнобедренные, то $AK \perp SB$, $CK \perp SB$, следовательно, $\angle AKC$ — искомый.

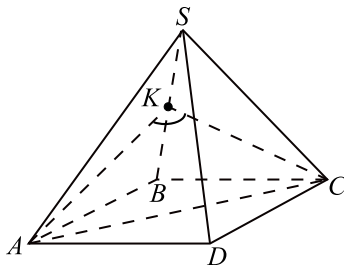


Рис. 264.

По теореме косинусов в треугольнике AKC

$$AC^2 = AK^2 + KC^2 - 2AK \cdot KC \cos \angle AKC,$$

$$\cos \angle AKC = \frac{AK^2 + KC^2 - AC^2}{2AK \cdot KC},$$

$$AK = KC = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ — как высоты равносторонних треугольников.}$$

$$\cos \angle AKC = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{3}. \text{ Следовательно,}$$

$$\angle AKC = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \pi - \arccos \frac{1}{3}.$$

1240. По условию пирамида правильная, значит, $ABCD$ — квадрат, SO — её высота. Проведём $BE \perp OK$ (см. рис. 265). $SO \perp ABC \Rightarrow SO \perp AC$, $AC \perp BD$ как диагонали квадрата $ABCD \Rightarrow AC \perp DSB \Rightarrow AC \perp BE \Rightarrow BE \perp AKC$, следовательно, BE — искомое расстояние.

$$\text{В прямоугольном треугольнике } SOB \text{ катет } SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \\ = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Проведём } KF \parallel SO, SO \perp BD \Rightarrow KF \perp BD,$$

$$\text{так как } SK = BK, \text{ то } OF = \frac{1}{2}OB = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ и } KF = \frac{1}{2}SO = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

В прямоугольном треугольнике KFO имеем $\operatorname{tg} \angle KOF = \frac{KF}{OF} = 1$, отсюда $\angle KOF = 45^\circ$. В прямоугольном треугольнике BEO

$$\sin \angle BOE = \frac{BE}{OB}; BE = OB \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,5.$$

$$\text{Ответ: } 0,5.$$

1241. Пусть M и K — середины сторон AD и BC соответственно (см. рис. 266).

Проведём $KH \perp ASD$. Так как $KM \perp AD$, то по теореме о трёх перпендикулярах $HM \perp AD$; HM — серединный перпендикуляр в равнобедренном $\triangle ASD$, поэтому $S \in HM$.

$$MO = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{2}AB = 2. \triangle SOM \text{ — равнобедренный прямоуголь-}$$

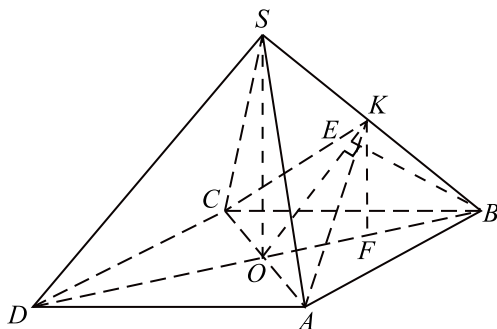


Рис. 265.

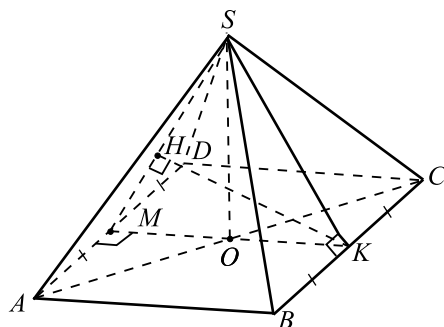


Рис. 266.

ный треугольник, поэтому $\angle SMO = 45^\circ$. Из $\triangle KHM$ имеем

$$KH = MK \sin \angle KMH = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $2\sqrt{2}$.

1242. Пусть M и K — середины сторон AD и BC соответственно (см. рис. 267).

Опустим перпендикуляр KH на плоскость ASD . Так как $KM \perp AD$, то по теореме о трёх перпендикулярах $HM \perp AD$.

$$\begin{aligned} \text{Катет } HK \text{ лежит против угла } 30^\circ \text{ в } \triangle KHM, \text{ поэтому } HK &= \frac{1}{2}KM = \\ &= \frac{1}{2}AB = 1,5. \end{aligned}$$

Ответ: 1,5.

1243. Пусть указанное сечение проведено через вершину B основания

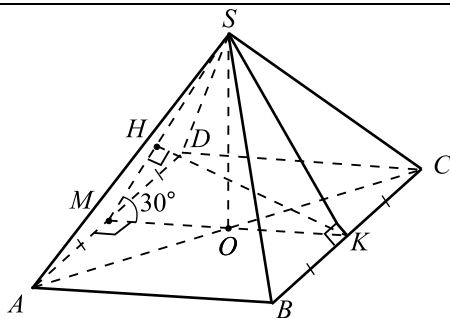


Рис. 267.

ABC пирамиды $SABC$, K — точка пересечения заданного сечения с апофемой SP грани ASC (см. рис. 268).

Из условия следует, что $BK \perp SP$, $\operatorname{tg} \angle KBP = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Пусть SO — высота пирамиды $SABC$, проведённая из вершины S к основанию ABC . Тогда объём пирамиды $V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO$. Так как пирамида $SABC$ — правильная, то BP — высота $\triangle ABC$ и $BP = BA \cdot \sin 60^\circ = 6$. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} BP \cdot AC = 12\sqrt{3}$. Так как BP — медиана $\triangle ABC$, то $OP = \frac{1}{3} BP = 2$. $\triangle BKP \sim \triangle SOP$ (по двум углам). Значит, $\angle OSP = \angle KBP$. Поэтому $\operatorname{tg} \angle OSP = \frac{OP}{SO} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Отсюда $SO = \sqrt{3}$, и, следовательно, $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$.

Ответ: 12.

1244. Обозначим сторону тетраэдра a , $a = \sqrt{2}$. M и N — середины рёбер DC и AB соответственно, DO и MH — перпендикуляры, проведённые к плоскости ABC (см. рис. 269).

Из правильного $\triangle ABC$ находим длину его высоты $NC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. По теореме Фалеса из $DO \parallel MH$ и $DM = MC$ получаем $HC = \frac{1}{2} OC$, откуда $NH = \frac{2}{3} NC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, так как медиана CN треугольника

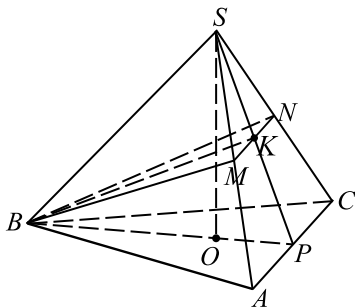


Рис. 268.

ABC разделена точкой O в отношении $2 : 1$, считая от точки C .

$MH = \frac{1}{2}DO = \frac{1}{2}\sqrt{DC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$. Из прямоугольного

$\triangle NMH$ по теореме Пифагора находим $NM = \sqrt{NH^2 + MH^2} =$
 $= \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6}} = \sqrt{\frac{3a^2}{6}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = 1$.

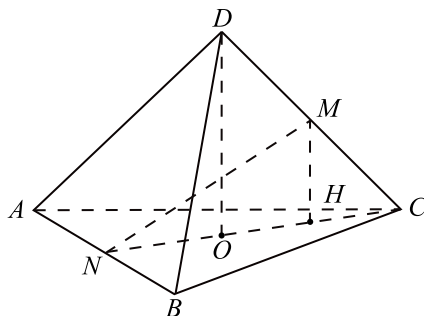


Рис. 269.

Ответ: 1.

1245. AC — диагональ квадрата $ABCD$, $AC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$, откуда $AO = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$. По теореме Пифагора из $\triangle AOS$ $SO = \sqrt{16 - 8} =$
 $= 2\sqrt{2}$. $\angle ABS = 60^\circ$, так как треугольник ABS — равносторонний. $\angle KSB = \angle ABS = 60^\circ$ как накрест лежащие при параллельных прямых SK и AB и секущей SB . Так как $BS = BK = 4$, то $\triangle SBK$ — равнобедренный с углом 60° , следовательно, $\triangle SBK$ — равносторонний и

$SK = SB = BK = 4$, $SO \perp ABC$, значит, $SO \perp AB$, а так как $AB \parallel SK$, то $SO \perp SK$. Поэтому OK — гипотенуза прямоугольного треугольника OSK . По теореме Пифагора $OK = \sqrt{SO^2 + SK^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

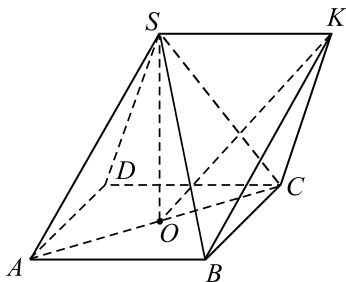


Рис. 270.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

1246. Пусть SO — высота пирамиды $SABC$, AR — высота равностороннего треугольника ABC (см. рис. 271).

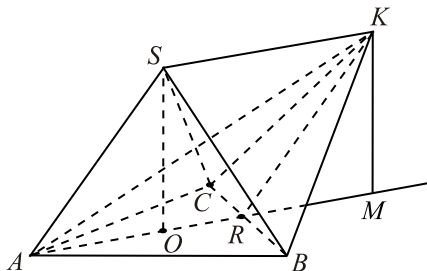


Рис. 271.

$AR = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 3\sqrt{3}$. Таким образом, $AR = SK$, кроме того,

$AR \parallel SK$ по условию, а значит, $ARKS$ — параллелограмм (см. рис. 272) по признаку параллелограмма.

Так как AR — медиана $\triangle ABC$, то $AO = \frac{2}{3}AR = 2\sqrt{3}$. Проведём $KM \parallel SO$ (точка M лежит на продолжении AR), тогда $OSKM$ — параллелограмм по определению. $SO \perp ABC$, значит, $SO \perp AR$, поэтому $OSKM$ — прямоугольник. В $\triangle AOS$ по теореме Пифагора

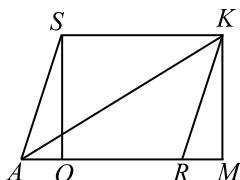


Рис. 272.

$$SO^2 = AS^2 - AO^2 = 36 - 12 = 24; KM^2 = SO^2; AK^2 = AM^2 + KM^2 = (AR + RM)^2 + KM^2 = (AR + AO)^2 + KM^2 = 75 + 24 = 99; AK = 3\sqrt{11}.$$

Ответ: $3\sqrt{11}$.

1247. 1. Треугольник ABD — прямоугольный (см. рис. 273).

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20.$$

2. Из точки A опустим перпендикуляр AK на прямую B_1D_1 ; $AK \perp B_1D_1$. Построим $KH \perp ABD$. Тогда $KH \perp A_1B_1D_1$, так как $A_1B_1D_1 \parallel ABD$. Следовательно, $\angle AKH$ — искомый линейный угол дву-

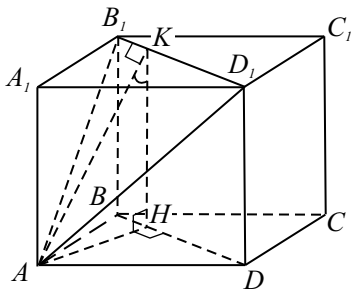


Рис. 273.

гранного угла между плоскостями BDD_1 и AB_1D_1 .

$$3. \text{ Из } \triangle ABD \text{ найдём } AH: S_{ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AH = 10AH;$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96; 10AH = 96; AH = \frac{48}{5}.$$

4. Из прямоугольного $\triangle AKH$ находим:

$$\operatorname{tg} \angle AKH = \frac{AH}{KH} = \frac{48}{5 \cdot 9} = \frac{16}{15}. \text{ Следовательно, } \angle AKH = \operatorname{arctg} \frac{16}{15}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{16}{15}$.

1248. 1. Из точки A опустим перпендикуляр на прямую BD ; $AK \perp BD$ (см. рис. 274).

Прямая AK является проекцией A_1K на плоскость нижнего основания. Так как $AK \perp BD$, то $A_1K \perp BD$ по теореме о трёх перпендикулярах. Тогда $\angle KAA_1$ — линейный угол искомого двугранного угла между плоскостями ABD и A_1BD .

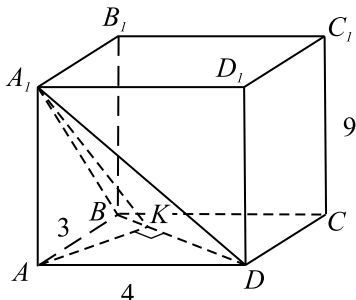


Рис. 274.

2. Так как $\triangle ABD$ — прямоугольный, то $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$.

3. Из $\triangle ABD$ найдём AK : $S_{ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AK$, $S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD$;

$$BD \cdot AK = AB \cdot AD; AK = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

4. Из прямоугольного $\triangle AA_1K$ находим: $\operatorname{tg} \angle KAA_1 = \frac{A_1A}{AK} = 3,75$;
 $\angle KAA_1 = \operatorname{arctg} 3,75$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 3,75$.

1249. Так как параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямой, то $\angle CAA_1 = \angle BDD_1 = 90^\circ$. Из прямоугольных $\triangle CAA_1$ и $\triangle BDD_1$:

$$AC = AA_1 \operatorname{ctg} \angle ACA_1 = CC_1 \operatorname{ctg} \angle ACA_1 = 1 \cdot 2 = 2.$$

$$BD = DD_1 \operatorname{ctg} \angle DBD_1 = CC_1 \operatorname{ctg} \angle DBD_1 = 1 \cdot 4 = 4.$$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$. Искомый объём вычисляется по формуле $V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = 4 \cdot 1 = 4$.

Ответ: 4.

1250. Так как параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямой, то $\angle CAA_1 = \angle BDD_1 = 90^\circ$. Из прямоугольных $\triangle CAA_1$ и $\triangle BDD_1$:

$$AC = AA_1 \operatorname{ctg} \angle ACA_1 = CC_1 \operatorname{ctg} \angle ACA_1 = 2 \cdot 3 = 6.$$

$$BD = DD_1 \operatorname{ctg} \angle DBD_1 = CC_1 \operatorname{ctg} \angle DBB_1 = 2 \cdot 4 = 8.$$

По теореме Пифагора: $AB^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = 3^2 + 4^2 = 25$; $AB = 5$.

Периметр $P_{ABCD} = 4AB = 20$. Площадь боковой поверхности параллелепипеда: $S_{\text{бок.}} = CC_1 \cdot P_{ABCD} = 2 \cdot 20 = 40$.

Ответ: 40.

1251. Проведём $BE \perp AD$ (см. рис. 275), тогда по теореме о трёх перпендикулярах $FE \perp AD$ и угол FEB — искомый.

Обозначим $AB = a$, тогда $FB = \frac{a}{2}$. $\angle ABE = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, $BE = \frac{a}{2}$.

Получаем $\operatorname{tg} \angle FEB = 1$, $\angle FEB = \frac{\pi}{4}$.

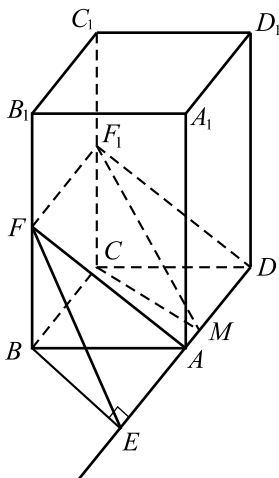


Рис. 275.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

1252. Так как $CC_1 \perp ABCD$ и $CD \perp AD$, то $C_1D \perp AD$ (по теореме о трёх перпендикулярах). Поэтому искомый угол равен углу C_1DC (см. рис. 276).

По условию $AC_1 = 2\sqrt{5}$; $AB = BC = 2$. Так как $AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2$, то $20 = 4 + 4 + CC_1^2$; $CC_1^2 = 12$; $CC_1 = 2\sqrt{3}$.

Из $\triangle DC_1C$ имеем: $\operatorname{tg} \angle C_1DC = \frac{CC_1}{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

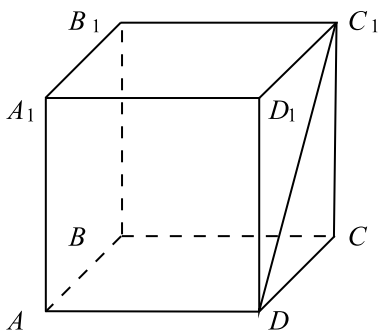


Рис. 276.

Отсюда $\angle C_1DC = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

1253. Так как $DD_1 \perp A_1B_1C_1D_1$ и $D_1C_1 \perp B_1C_1$, то $DC_1 \perp B_1C_1$ (по теореме о трёх перпендикулярах). Поэтому искомый угол равен углу DC_1D_1 (см. рис. 277).

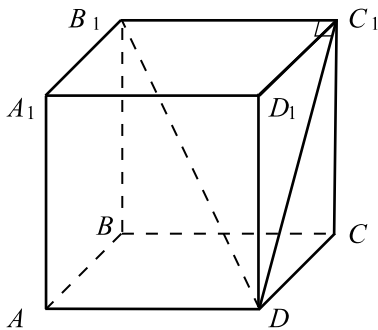


Рис. 277.

По условию $B_1D = \sqrt{21}$. Из $\triangle B_1DC_1$ по теореме Пифагора:
 $DC_1^2 = B_1D^2 - B_1C_1^2 = 21 - 3^2 = 12$.
 $DC_1 = 2\sqrt{3}$.

$$\text{Из } \triangle DC_1D_1: \cos \angle DC_1D_1 = \frac{C_1D_1}{C_1D}; \cos \angle DC_1D_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\angle DC_1D_1 = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

1254. $S_{\text{пов}} = 4BC \cdot CC_1$ (см. рис. 278).

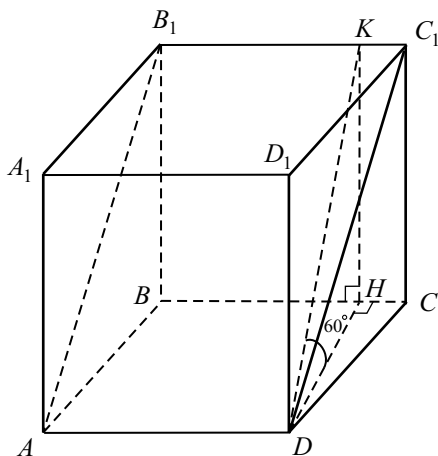


Рис. 278.

$$S_{ABCD} = S_{AB_1C_1D} \cdot \cos \angle HDK = 5\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{ABCD} = BC \cdot DH, BC = \frac{S_{ABCD}}{DH} = \frac{5\sqrt{3}}{2DH}.$$

$$\operatorname{tg} \angle HDK = \frac{KH}{DH}, KH = DH \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = DH\sqrt{3}.$$

$$S_{\text{пов}} = \frac{4 \cdot 5\sqrt{3} \cdot DH \cdot \sqrt{3}}{2DH} = 30.$$

Ответ: 30.

1255. $V = S_{ABCD} \cdot BB_1$ (см. рис. 279). В прямоугольном треугольнике B_1AD согласно условию $\angle DB_1A = 30^\circ$, следовательно, $AD = \frac{1}{2}DB_1$,

$DB_1 = 6\sqrt{2}$. Тогда из прямоугольного треугольника BB_1D находим $BB_1 = \sqrt{DB_1^2 - BD^2} = 6$ ($BD = 6$ как диагональ квадрата).

Значит, $V = (3\sqrt{2})^2 \cdot 6 = 108$.

Ответ: 108.

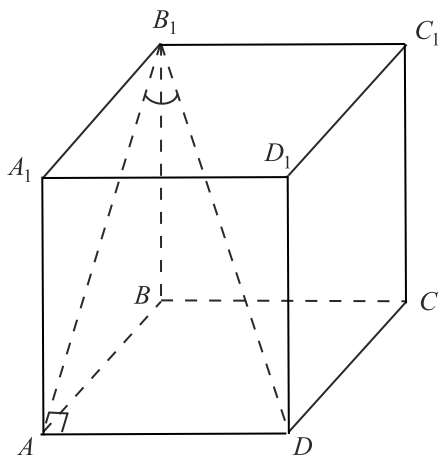


Рис. 279.

1256. В $\triangle ABC$ выполняется равенство $AB^2 = BC^2 + AC^2$ (см. рис. 280). Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle BCA = 90^\circ$.

Тогда $\cos \angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$.

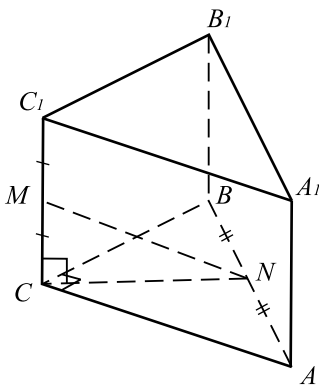


Рис. 280.

Так как $AN = BN$, то $AN = 2,5$. Аналогично $CM = \frac{1}{2}CC_1 = \sqrt{6}$.

По теореме косинусов для $\triangle CNA$:

$$CN^2 = AC^2 + AN^2 - 2 \cdot AC \cdot AN \cdot \cos \angle A = 9 + 6,25 - 2 \cdot 3 \cdot 2,5 \cdot \frac{3}{5} = 6,25.$$

Рассмотрим $\triangle MCN$. Так как исходная призма прямая, то $\angle MCN = 90^\circ$. По теореме Пифагора $MN = \sqrt{CN^2 + MC^2} = \sqrt{6,25 + 6} = 3,5$.

Ответ: 3,5.

1257. Пусть a — прямая, о которой говорится в условии, точка M — середина стороны AB . По условию прямая a параллельна прямой CM_1 (см. рис. 281).

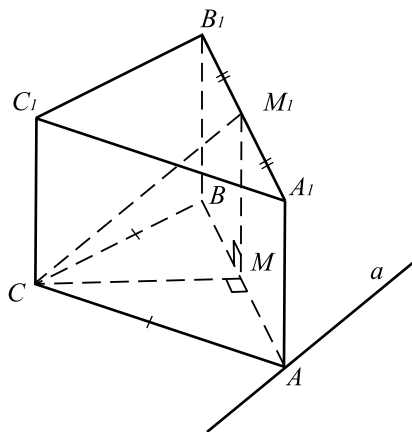


Рис. 281.

Так как призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, то $CC_1 \perp ABC$. Так как прямая AM лежит в плоскости ABC , то $AM \perp CC_1$.

$CM \perp AM$ как медиана равнобедренного треугольника ABC . Кроме того, $AM \perp CC_1$. Значит, $AM \perp MM_1C$, и, следовательно, $AM \perp CM_1$. Но $CM_1 \parallel a$, поэтому $AM \perp a$.

Так как $AM \perp MM_1C$, $AM \perp a$ и $a \parallel MM_1C$, то AM — искомое расстояние между прямыми a и CC_1 . Значит, $AM = \frac{1}{2}AB = 5$.

Ответ: 5.

1258. Проведём $CH \perp DE$ и $HH_1 \parallel CC_1$. $CC_1 \perp (ABC)$, значит, $HH_1 \perp (ABC)$, CH_1 — наклонная, CH — проекция наклонной. $CH_1 \perp ED$ по теореме о трёх перпендикулярах (см. рис. 282).

Так как $E_1D_1 \parallel ED$, то $CH_1 \perp E_1D_1$, следовательно, CH_1 — искомое расстояние.

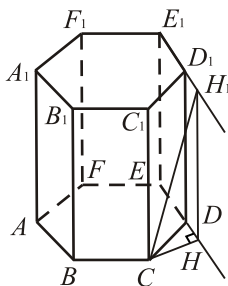


Рис. 282.

Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то $\angle CDE = 120^\circ$, тогда $\angle CDH = 60^\circ$.

В прямоугольном треугольнике CHD :

$$\sin \angle D = \frac{CH}{CD}, CH = CD \cdot \sin \angle D = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике CHH_1 :

$$CH_1 = \sqrt{CH^2 + HH_1^2} = \sqrt{\frac{75}{4} + 25} = \frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{7}}{2}$.

1259. 1. Проведём $BH \perp DC$ и $HH_1 \parallel BB_1$, $BB_1 \perp (ABC)$, значит, $HH_1 \perp (ABC)$, BH_1 — наклонная, BH — проекция наклонной. $BH_1 \perp DC$ по теореме о трёх перпендикулярах (см. рис. 283).

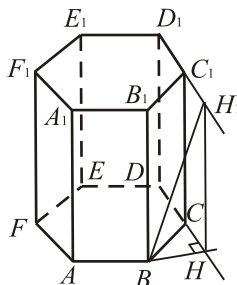


Рис. 283.

Так как $D_1C_1 \parallel DC$, то $BH_1 \perp D_1C_1$, следовательно, BH_1 — искомое расстояние.

2. В $\triangle BHC$ $\angle H = 90^\circ$, $\angle BCH = 180^\circ - \angle BCD$. $\angle BCD = 120^\circ$, так как шестиугольник $ABCDEF$ — правильный, $\angle BCH = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$$\sin \angle BCH = \frac{BH}{BC}, BH = BC \cdot \sin \angle BCH = 7 \cdot \sin 60^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

3. В $\triangle BHH_1$, $\angle H = 90^\circ$:

$$BH_1 = \sqrt{BH^2 + HH_1^2} = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 7^2} = \frac{7\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{7}}{2}$.

1260. 1) Рассмотрим треугольник AEF (см. рис. 284). Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то $\angle F = 120^\circ$, $AF = FE$, следовательно, $\angle FEA = \angle FAE = 30^\circ$. Тогда $\angle AED = \angle FED - \angle FEA = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.

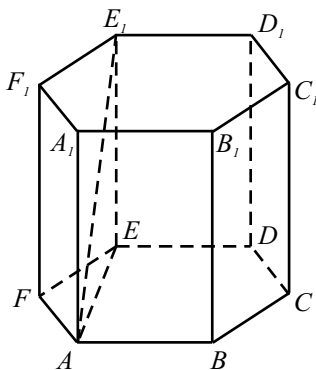


Рис. 284.

2) Отрезок EE_1 перпендикулярен плоскости $FEA \Rightarrow EE_1 \perp EA \Rightarrow EE_1$ — проекция AE_1 на плоскость EE_1D . Так как $EE_1 \perp E_1D_1$, AE_1 — искомое расстояние.

3) По теореме косинусов из треугольника AEF находим $AE^2 = FE^2 + FA^2 - 2FE \cdot FA \cdot \cos \angle FEA = 2 \cdot 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos 120^\circ = 36 \cdot 3$. Следовательно, $AE = 6\sqrt{3}$.

4) По теореме Пифагора из треугольника AAE_1 находим $AE_1 = \sqrt{AE^2 + EE_1^2} = \sqrt{36 \cdot 3 + 36} = 12$.

Ответ: 12.

1261. По условию призма правильная, следовательно, $ABCD$ — квадрат. Прямые BD и AD_1 — скрещивающиеся. Проведём $BC_1 \parallel AD_1$, то-

гда $\angle C_1BD$ — искомый (см. рис. 285). В $\triangle BC_1D$ сторона $BC_1 = DC_1$ как диагонали равных граней, следовательно, $\triangle BC_1D$ — равнобедренный. $BC_1 = DC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $BD = 4\sqrt{2}$ как диагональ квадрата $ABCD$.

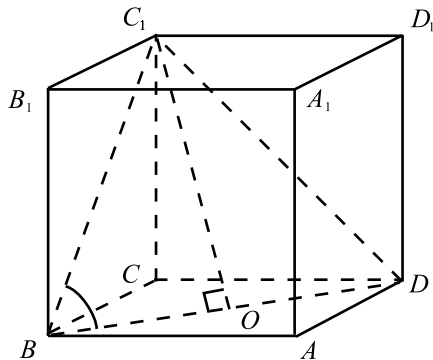


Рис. 285.

Пусть O — середина отрезка BD . Из прямоугольного треугольника BOC_1 $\cos \angle C_1BO = \frac{OB}{BC_1} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$; $\angle C_1BO = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

1262. KL — средняя линия $\triangle AA_1C_1 \Rightarrow KL \parallel AC_1$. Кроме того, $KM \parallel AB$, поэтому плоскости KLM и AC_1B параллельны. Кроме того, $BB_1 \parallel CC_1$, поэтому искомый угол равен углу между плоскостью AC_1B и прямой BB_1 (см. рис. 286). Так как $BB_1 \perp ABC$, то косинус угла между плоскостью AC_1B и прямой BB_1 равен синусу угла между плоскостями AC_1B и ABC . Проведём $CH \perp AB$. Так как $C_1C \perp ABC$, по теореме о трёх перпендикулярах получаем $C_1H \perp AB$. Угол C_1HC — линейный угол двугранного угла между плоскостями AC_1B и ABC . Имеем: $CH = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ как

высота правильного треугольника со стороной 4. По теореме Пифагора для $\triangle HCC_1$: $C_1H = \sqrt{CC_1^2 + CH^2} = \sqrt{12 + 16} = 2\sqrt{7}$.

$$\sin \angle C_1HC = \frac{CC_1}{C_1H} = \frac{4}{2\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

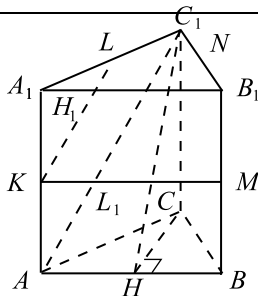


Рис. 286.

1263. Рассмотрим треугольник AKM (см. рис. 287). Проведём из вершины A высоту AH . Тогда $S_{AKM} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot MK$. Треугольники $A_1B_1C_1$ и A_1MK подобны, так как $\angle B_1A_1C_1$ — общий и $\frac{A_1M}{A_1K} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1}$, поэтому $\frac{MK}{B_1C_1} = \frac{A_1M}{A_1B_1} = \frac{1}{3}$ и $MK = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

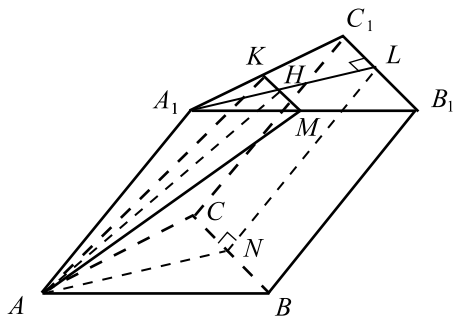


Рис. 287.

Найдём AH . Проведём высоту A_1L треугольника $A_1B_1C_1$. Рассмотрим параллелограмм A_1LNA (см. рис. 288). $A_1L = \frac{3}{2}$, $A_1H = \frac{A_1L}{3} = \frac{1}{2}$. По теореме косинусов $AH^2 = AA_1^2 + A_1H^2 - 2AA_1 \cdot A_1H \cdot \cos 150^\circ = 3 + \frac{1}{4} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13}{4} + \frac{3}{2} = \frac{19}{4}$, откуда $AH = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

$$\text{Получаем, что } S_{AKM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{19}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{57}}{12}.$$

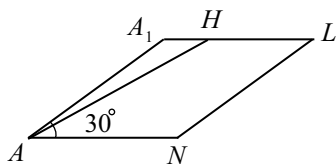


Рис. 288.

Ответ: $\frac{\sqrt{57}}{12}$.

1264. Так как призма правильная, то $B_1F_1 \parallel EC$ (см. рис. 289). Отсюда следует, что прямая, по которой пересекаются плоскости B_1DF_1 и ED_1C , параллельна EC .

Так как $AA_1D_1D \perp EC$, то искомый угол равен углу HMD , где M — точка пересечения плоскости AA_1D_1D и прямой, по которой пересекаются плоскости B_1DF_1 и ED_1C . Рассмотрим сечение AA_1D_1D (см. рис. 290). В равнобедренном треугольнике EDC $\angle EDC = 120^\circ$ как угол правильного шестиугольника, поэтому $\angle DCH = 30^\circ$ и $DH = \frac{DC}{2} = 4$ как катет против угла 30° в прямоугольном $\triangle DHC$.

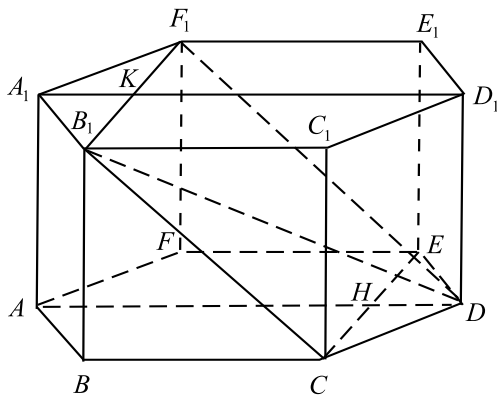


Рис. 289.

Аналогично $A_1K = 4$. $A_1D_1 = 2A_1B_1 = 16$ как диагональ правильного шестиугольника, соединяющая противоположные вершины.

$KD_1 = A_1D_1 - A_1K = 12$. По теореме Пифагора из $\triangle HDD_1$ и $\triangle KDD_1$ имеем: $HD_1 = \sqrt{HD^2 + DD_1^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$;

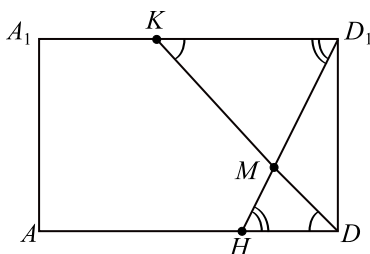


Рис. 290.

$$KD = \sqrt{KD_1^2 + DD_1^2} = \sqrt{12^2 + 3^2} = 3\sqrt{17}.$$

$\triangle HDM \sim \triangle D_1KM$ ($\angle HDM = \angle D_1KM$ и $\angle DHM = \angle KD_1M$ как накрест лежащие). Поэтому $\frac{MD}{KM} = \frac{MH}{MD_1} = \frac{HD}{KD_1}$. Так как

$$\frac{HD}{KD_1} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \text{ то } HM = \frac{HD_1}{4} = \frac{5}{4}, DM = \frac{KD}{4} = \frac{3\sqrt{17}}{4}.$$

По теореме косинусов для $\triangle HMD$:

$$HD^2 = HM^2 + MD^2 - 2 \cdot HM \cdot MD \cdot \cos \angle HMD;$$

$$4^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{17}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3\sqrt{17}}{4} \cos \angle HMD;$$

$$256 = 25 + 153 - 30\sqrt{17} \cos \angle HMD; \cos \angle HMD = -\frac{13}{5\sqrt{17}}.$$

Отсюда следует, что $\angle HMD$ тупой. Так как в качестве угла между плоскостями следует брать острый или прямой угол, то в качестве ответа следует записать $\cos(180^\circ - \angle HMD) = \frac{13}{5\sqrt{17}}$.

Ответ: $\frac{13}{5\sqrt{17}}$.

1265. Так как призма правильная, то $B_1F_1 \parallel CE \parallel C_1E_1$ (см. рис. 291). Отсюда следует, что прямая, по которой пересекаются плоскости CEB_1 и AE_1C_1 , параллельна EC .

Так как $AA_1D_1D \perp EC$, то искомый угол равен углу ANM , где N — точка пересечения плоскостей CEB_1 , AE_1C_1 и AA_1D_1D , M — точка пересечения прямых EC и AD .

В равнобедренном $\triangle EDC$ имеем: $\angle EDC = 120^\circ$ как угол правильного шестиугольника, поэтому $\angle DCM = 30^\circ$ и $DM = \frac{DC}{2} = 4$ как катет против угла 30° в прямоугольном $\triangle DCM$.

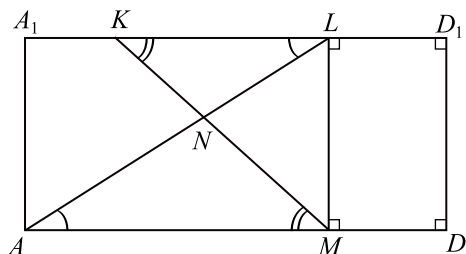


Рис. 292.

Ответ: $\frac{71}{13\sqrt{89}}$.

1266. Необходимо найти угол между диагоналями A_1B и CB_1 , для этого построим призму: на основании ABC построим такую же призму с ребром $AA_2 = AA_1$ (см. рис. 293). Угол между A_1B и CB_1 равен углу между A_1B и C_2B , так как $C_2B \parallel CB_1$ (по построению). Искомый угол $\angle A_1BC_2$ обозначим через α , сторону треугольника ABC — через a .

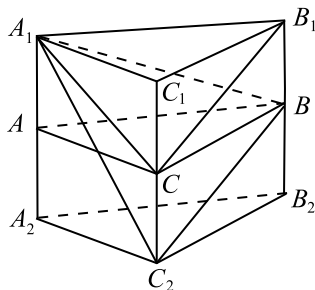


Рис. 293.

$$1) \triangle AA_1C: A_1C = \frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}; AA_1 = \frac{AC}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$2) \triangle A_1A_2C_2: A_1C_2 = \sqrt{(2AA_1)^2 + (A_2C_2)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 \cdot 3}{9} + a^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

$$3) \text{ По теореме косинусов для } \triangle A_1C_2B: A_1C_2^2 = A_1B^2 + C_2B^2 - 2A_1B \cdot C_2B \cos \alpha; \frac{21a^2}{9} = \frac{4a^2 \cdot 3}{9} + \frac{4a^2 \cdot 3}{9} - 2 \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cos \alpha,$$

$$\frac{7a^2}{3} = \frac{8a^2}{3} - \frac{8a^2}{3} \cos \alpha; \cos \alpha = \frac{1}{8}. \quad \alpha = \arccos \frac{1}{8}, \quad \alpha = \arccos 0,125.$$

Ответ: $\arccos 0,125$.

1267. Необходимо найти косинус угла между диагональю BC_1 и плоскостью боковой грани AA_1C_1C (см. рис. 294). В $\triangle ABC$ проведём высоту BK . $C_1C \perp ABC$, $BK \perp CK$, поэтому по теореме о трёх перпендикулярах $C_1K \perp BK$. Имеем $BK \perp KC$, $BK \perp C_1K$, поэтому $BK \perp AA_1C_1C$.

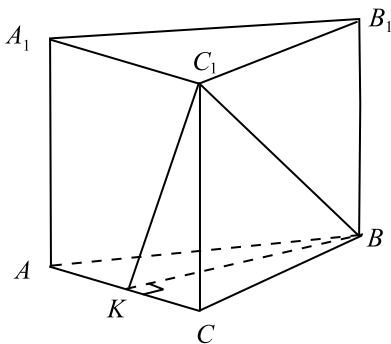


Рис. 294.

1) ABC перпендикулярна боковым граням, $ABC \perp AA_1C_1C$.

2) Из $\triangle BKC$ имеем $BK = AB \sin \angle BCK = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

3) Из $\triangle C_1CB$ по теореме Пифагора
 $BC_1 = \sqrt{C_1C^2 + BC^2} = \sqrt{128 + 16} = \sqrt{144} = 12$.

4) $\sin \angle BC_1K = \frac{BK}{C_1B} = \frac{2\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. $\cos \angle BC_1K = \sqrt{1 - \frac{3}{36}} = \frac{\sqrt{33}}{6}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{33}}{6}$.

1268. 1. Сечение $KLPD_1$ является трапецией, так как $PL \parallel KD_1$ (см. рис. 295).

2. $\triangle KA_1D_1$ — прямоугольный $\Rightarrow KD_1 = \sqrt{A_1K^2 + A_1D_1^2} = 4\sqrt{2}$.

3. $\triangle LB_1P \sim \triangle KA_1D_1 \Rightarrow \frac{PL}{KD_1} = \frac{B_1L}{A_1K} \Rightarrow PL = \frac{B_1L \cdot KD_1}{A_1K} = 3\sqrt{2}$.

4. $BC = A_1D_1 = 4$, $A_1K = 4$ по условию $\Rightarrow \triangle A_1KD_1$ — равнобедренный. $\triangle A_1KD_1 \sim \triangle B_1LP \Rightarrow B_1L = B_1P \Rightarrow A_1D_1PB_1 = A_1KLB_1$,

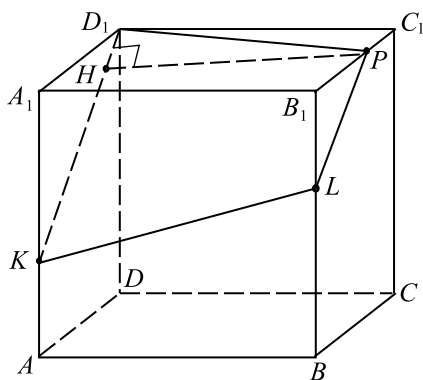


Рис. 295.

значит, $D_1P = KL \Rightarrow KLPD_1$ — равнобочная трапеция. Пусть $PH \perp D_1K$, тогда $D_1H = \frac{1}{2}(D_1K - PL) = \frac{1}{2}(4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\triangle PD_1C_1$ — прямоугольный $\Rightarrow PD_1 = \sqrt{D_1C_1^2 + PC_1^2} = \sqrt{5}$. $\triangle PHD_1$ — прямоугольный $\Rightarrow PH = \sqrt{PD_1^2 - D_1H^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

$$5. S_{KLPD_1} = \frac{1}{2}(KD_1 + PL) \cdot PH = 10,5.$$

Ответ: 10,5.

1269. Из $\triangle ABA_1$ имеем $AA_1 = \sqrt{6^2 + 9^2} = 3\sqrt{13}$ (см. рис. 296). Проводим $BH \perp AA_1$; $BH = \frac{AB \cdot A_1B}{AA_1} = \frac{6 \cdot 9}{3\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}}$. Из $\triangle AHB$ имеем $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 81 - \frac{324}{13} = \frac{729}{13}$; $AH = \frac{27}{\sqrt{13}}$. Из $\triangle A_1B_1C_1$ имеем $B_1C_1 = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$; A_1K — высота $\triangle A_1B_1C_1$ и $A_1K = \frac{A_1B_1 \cdot A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{9 \cdot 12}{15} = \frac{36}{5}$. По теореме о 3-х перпендикулярах из $A_1B \perp A_1B_1C_1$ и $A_1K \perp B_1C_1$ имеем $BK \perp B_1C_1$.

$$\text{Из } \triangle A_1B_1K: B_1K = \sqrt{9^2 - \left(\frac{36}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{729}{25}} = \frac{27}{5}.$$

$$\text{Из } \triangle BB_1K: BK = \sqrt{(3\sqrt{13})^2 - \left(\frac{27}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{117 \cdot 25 - 729}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt{61}.$$

Проводим $BN \perp CC_1$. Так как $S_{BB_1C_1C} = B_1C_1 \cdot BK = CC_1 \cdot BN$,

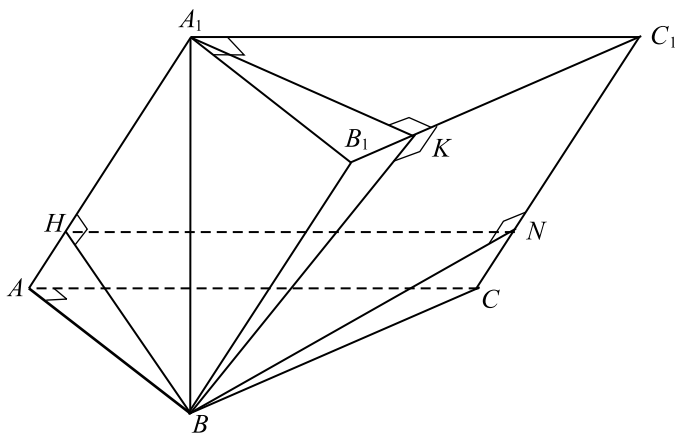


Рис. 296.

$$\text{то } BN = \frac{B_1C_1 \cdot BK}{CC_1} = \frac{15 \cdot 6\sqrt{61}}{5 \cdot 3\sqrt{13}} = 6\sqrt{\frac{61}{13}}.$$

Из $\triangle BNC$: $CN^2 = BC^2 - BN^2 = 15^2 - 36 \cdot \frac{61}{13} = \frac{729}{13}$; $CN = \frac{27}{\sqrt{13}} = AH$, поэтому $HN = AC = 12$. Так как $BH \perp AA_1$ и $BN \perp CC_1$, то $BH \perp BB_1$ и $BN \perp BB_1$, $\angle HBN$ — искомый. Из $\triangle HBN$: $HN^2 = BH^2 + BN^2 - 2 \cdot BH \cdot BN \cos \angle HBN$;

$$144 = \frac{324}{13} + \frac{2196}{13} - \frac{216\sqrt{61}}{13} \cos \angle HBN; \cos \angle HBN = \frac{3}{\sqrt{61}};$$

$$\angle HBN = \arccos \frac{3}{\sqrt{61}} = \arccos \frac{3\sqrt{61}}{61}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{3\sqrt{61}}{61}.$$

1270. Обозначим через α угол между плоскостью CC_1D_1D и плоскостью основания призмы, через β — угол между плоскостью A_1B_1CD и плоскостью основания призмы. Тогда угол $(\alpha - \beta)$ — искомый. Проведём $HK \perp CD$, тогда по теореме о 3-х перпендикулярах $C_1K \perp CD$ и $\angle \alpha = \angle C_1KH$ (см. рис. 297).

$$\text{Так как } ABCD \text{ — ромб, то } CH = \frac{AC}{2} = 3; DH = \frac{BD}{2} = 4;$$

$$CH \perp DH; CD = \sqrt{CH^2 + HD^2} = 5; HK \cdot CD = CH \cdot HD;$$

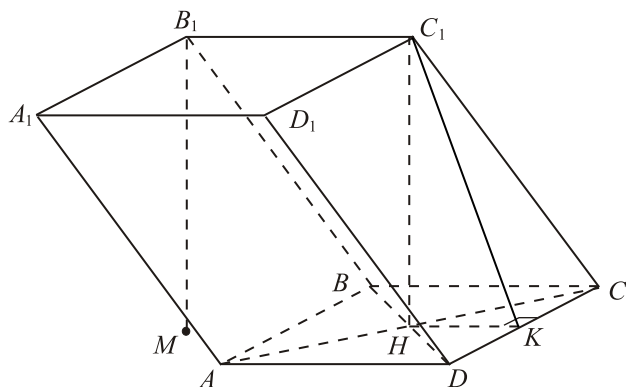


Рис. 297.

$$HK = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1H}{HK} = 3 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{4}.$$

Проведём высоту призмы B_1M , и $MQ \perp CD$. Тогда B_1MHC_1 — прямоугольник, поэтому $MH \parallel B_1C_1$ и $MH = B_1C_1$, значит, $MBCN$ — параллелограмм (см. рис. 298). Пусть продолжение MH и CD пересекаются в точке P . Тогда $\triangle MQP \sim \triangle HKP$ (прямоугольные с общим острым углом) и $\frac{MQ}{HK} = \frac{MP}{HP} = 3$; $MQ = 3HK = \frac{36}{5}$.

По теореме о 3-х перпендикулярах $B_1Q \perp CD$ и $\angle \beta = \angle B_1QM$;
 $\operatorname{tg} \beta = \frac{B_1M}{MQ} = \frac{3 \cdot 5}{36} = \frac{5}{12}$.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{5 \cdot 12 - 5 \cdot 4}{48 + 5 \cdot 5} = \frac{40}{73}.$$

$$\alpha - \beta = \operatorname{arctg} \frac{40}{73}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{40}{73}.$$

1271. Найдём $\cos \alpha$, где α — угол между \overrightarrow{PO} и $\overrightarrow{CA_1}$. Пусть сторона куба равна a , $a > 0$. Для удобства вычислений примем $a = 10$, так как величина искомого угла не зависит от длины ребра куба.

Пусть D — центр системы координат (см. рис. 299). Тогда $O(0; 0; 2)$,

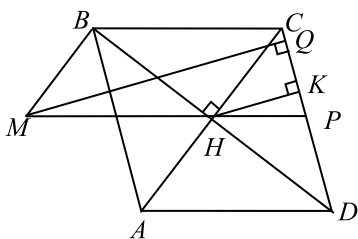


Рис. 298.

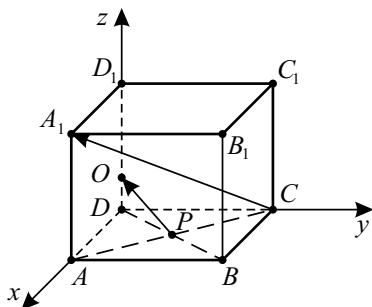


Рис. 299.

$$P(5; 5; 0), \overrightarrow{PO}(-5; -5; 2), A_1(10; 0; 10), C(0; 10; 0), CA_1(10; -10; 10),$$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{CA_1}| \cdot |\overrightarrow{PO}|} = \frac{\sqrt{2}}{9}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}}{9}.$$

1272. Введём систему координат, как показано на рис. 300.

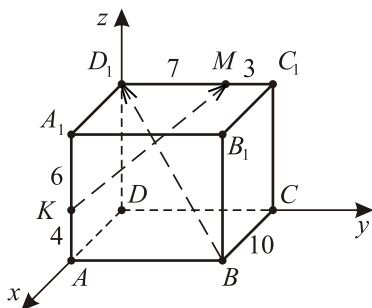


Рис. 300.

Из условия получим:

$$K(10; 0; 4), M(0; 7; 10), \overrightarrow{KM}(-10; 7; 6); \\ B(10; 10; 0), D_1(0; 0; 10), \overrightarrow{BD_1}(-10; -10; 10).$$

$$\text{Пусть } \alpha \text{ — искомый угол. Тогда } \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{KM}| \cdot |\overrightarrow{BD_1}|} = \\ = \frac{(-10) \cdot (-10) + 7 \cdot (-10) + 6 \cdot 10}{\sqrt{10^2 + 7^2 + 6^2} \cdot \sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2}} = \frac{9}{\sqrt{555}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{9}{\sqrt{555}}.$$

1273. Проведем $PK \parallel BD$, $BD \perp AA_1C_1 \Rightarrow PK \perp AA_1C_1$, тогда прямая C_1K — проекция прямой C_1P на плоскость AA_1C_1 и $\angle KC_1P$ — искомый угол (см. рис. 301).

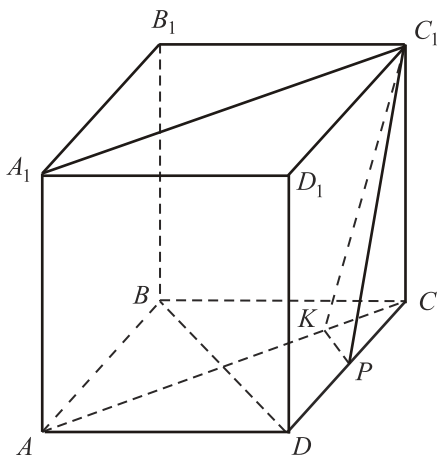


Рис. 301.

$$\sin \angle KC_1P = \frac{KP}{C_1P}.$$

Обозначим ребро куба через a .

$$KP = \frac{1}{4} BD = \frac{1}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}; C_1P = \sqrt{CC_1^2 + CP^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \sin \angle KC_1P = \frac{a\sqrt{2} \cdot 2}{4 \cdot a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

1274. Проведём $KQ \parallel BD$, $BD \perp AA_1C_1 \Rightarrow KQ \perp AA_1C_1$, тогда прямая C_1K — проекция прямой C_1Q на плоскость AA_1C_1 и $\angle KC_1Q$ — искомый угол (см. рис. 302). $\sin \angle KC_1Q = \frac{KQ}{C_1Q}$.

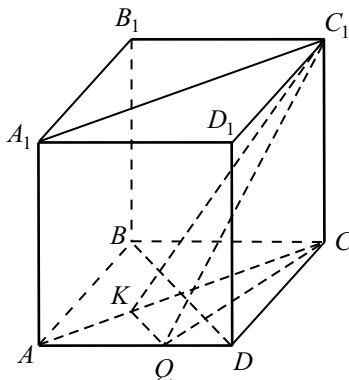


Рис. 302.

Обозначим ребро куба через a .

$$KQ = \frac{1}{4} BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}, C_1Q = \sqrt{C_1C^2 + CQ^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2},$$

$$\sin \angle KC_1Q = \frac{a\sqrt{2} \cdot 2}{4 \cdot 3a} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

1275. Построим чертёж (см. рис. 303),

По теореме Пифагора из $\triangle A_1B_1D_1$ имеем:

$B_1D_1 = \sqrt{B_1A_1^2 + A_1D_1^2} = 6$, аналогично $AB_1 = AD_1 = 6 \Rightarrow$ сечение — равносторонний треугольник со стороной 6, площадь которого равна $\frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Ответ: $9\sqrt{3}$.

1276. Так как полученный многогранник выпуклый, то рёбрами соедине-

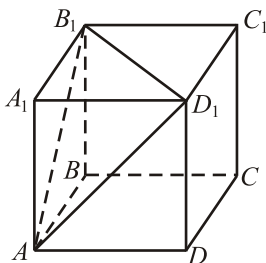


Рис. 303.

ны вершины, лежащие в центрах смежных граней куба. Расстояние между противоположными вершинами полученного октаэдра является расстоянием между центрами противоположных граней куба. Оно равно ребру куба, которое находим из длины диагонали $\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. Пусть $ABCDEF$ — полученный октаэдр, точка O — его центр (см. рис. 304).

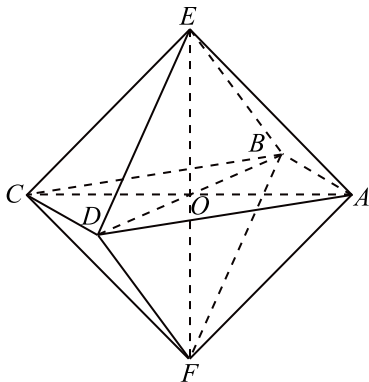


Рис. 304.

$$\begin{aligned} \text{Искомый объём равен } V &= 2V_{EABCD} = \frac{2}{3}EO \cdot S_{ABCD} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot EF \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{6} \cdot (2\sqrt{3})^3 = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

1277. Так как полученный многогранник выпуклый, то рёбрами соединены вершины, лежащие в центрах смежных граней куба. Расстояние между противоположными вершинами полученного октаэдра является расстоя-

нием между центрами противоположных граней куба. Оно равно ребру куба, обозначим его через x . Пусть $ABCDEF$ — полученный октаэдр, точка O — его центр (см. рис. 305). Тогда $AC = BD = EF = x$.

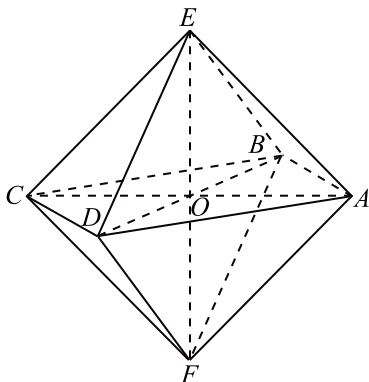


Рис. 305.

Объём октаэдра равен $V = 2V_{EABCD} = \frac{2}{3}EO \cdot S_{ABCD} =$
 $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot EF \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{6} \cdot x^3$. По условию $V = 4,5$, поэтому $\frac{1}{6} \cdot x^3 = 4,5$;
 $x^3 = 27$; $x = 3$. Площадь поверхности куба равна $6x^2 = 6 \cdot 3^2 = 54$.

Ответ: 54.

1278. Пусть $a = AB = AC = BC$. Тогда длина окружности основания конуса равна $2\pi \cdot OC = 2\pi \cdot \frac{a}{2} = \pi a$ (см. рис. 306).

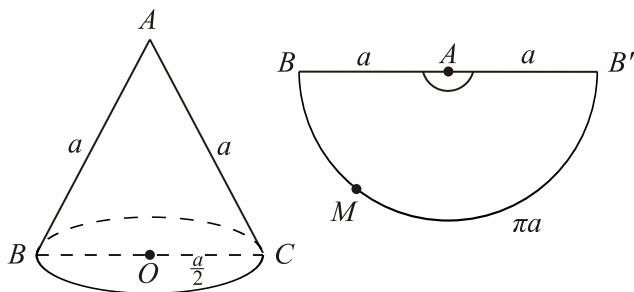


Рис. 306.

Так как длина дуги развёртки BMB' равна πa , а длина окружности с центром в точке A и радиусом a равна $2\pi a$, то видно, что длина дуги BMB' равна половине длины окружности. Значит, искомый угол равен 180° .

Ответ: 180° .

1279. Пусть r — радиус полукруга (см. рис. 307). Тогда длина окружности основания конуса равна $\frac{1}{2} \cdot (2\pi r) = \pi r$. Отсюда, $BO = \frac{r}{2}$ — радиус основания конуса. Значит, $\triangle ABC$ — равносторонний. Поэтому искомый угол равен 60° .

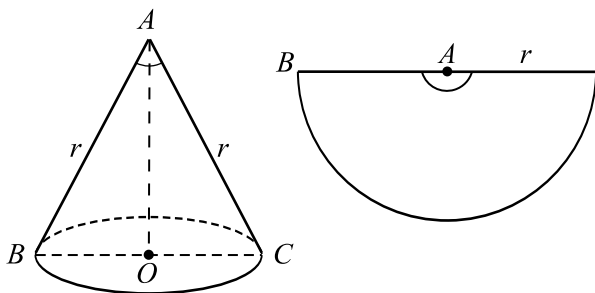


Рис. 307.

Ответ: 60° .

1280. Пусть O — центр окружности, тогда $R = OA = \frac{24}{2} = 12$,

$AC = \frac{AB}{2} = 8$ (см. рис. 308). $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{144 - 64} = \sqrt{80}$.

OS — высота конуса, значит, OC является проекцией OS на плоскость основания, тогда так как $OC \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах SC также перпендикулярна AB , следовательно, $\angle OCS$ — искомый.

$$\operatorname{tg} \angle OCS = \sqrt{\frac{125}{80}} = 1,25.$$

Ответ: 1,25.

1281. Пусть O — центр окружности, тогда $R = OA = \frac{26}{2} = 13$,

$AC = \frac{AB}{2} = 12$ (см. рис. 309). $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$.

$OS = R \cdot \operatorname{tg} \angle OKS = 13 \cdot 8 = 104$.

OS — высота конуса, тогда OC является проекцией CS на плоскость

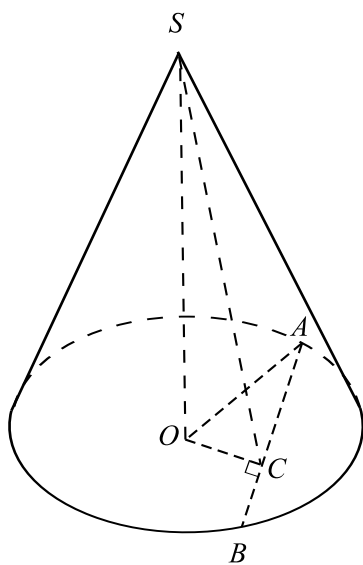


Рис. 308.

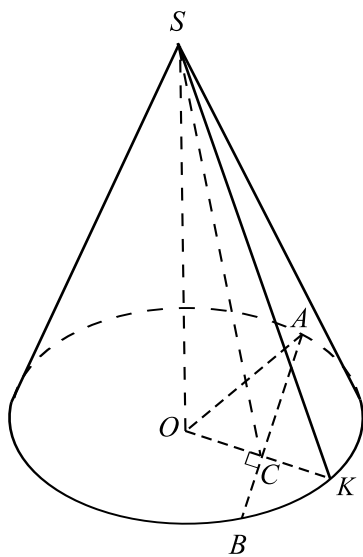


Рис. 309.

основания, значит, так как $OC \perp AB$, то по теореме о трёх перпендикулярах CS также перпендикулярна AB , следовательно, $\angle OCS$ — искомый.

$$\operatorname{tg} \angle OCS = \frac{104}{5} = 20,8.$$

Ответ: 20,8.

1282. Пусть точка O — вершина конуса (см. рис. 310). Так как радиус окружности основания конуса равен 4 и длина его образующей — 5, высота конуса $OO_1 = 3$ (по теореме Пифагора из $\triangle COO_1$).

Так как хорды AB и CD симметричны относительно центра окружности основания $AB = CD$. Искомый угол между плоскостями AOB и COD равен углу между высотами равных и равнобедренных треугольников $\triangle COD$ и $\triangle AOB$, проведёнными к основаниям. То есть угол $\angle HOH_1$

$$\text{является искомым. } \angle HOH_1 = 2\angle HOO_1. \operatorname{tg} \angle HOO_1 = \frac{O_1H}{OO_1} = \frac{O_1H}{3} = \\ = \frac{\sqrt{O_1C^2 - CH^2}}{3} = \frac{\sqrt{16 - 4}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Искомый угол } \angle HOH_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

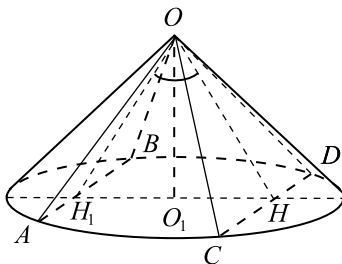


Рис. 310.

$$\text{Ответ: } 2 \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

1283. Так как хорды AB и BC равноотстоящие от центра окружности основания, $AB = BC$, и так как $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = r\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ (r — радиус основания конуса).

Угол между плоскостями AOB и BOC равен углу между высотами равных и равнобедренных треугольников AOB и COB , проведёнными к стороне OB . То есть искомый угол — $\angle AHC$ (см. рис. 311).

Пусть ON — высота треугольника COB , проведённая к основанию

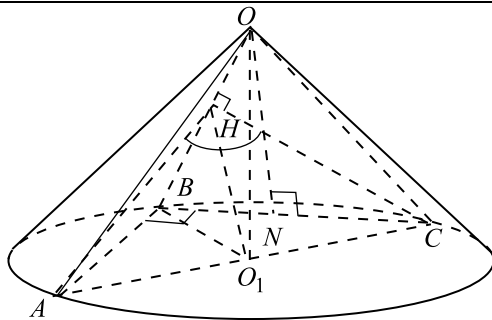


Рис. 311.

CB ; CH — высота, проведённая к стороне OB (см. рис. 312).

$$\begin{aligned}
 OC &= \sqrt{16+9} = 5; \sin \angle OBC = \frac{CH}{BC} = \frac{ON}{OB}; CH = \frac{CB \cdot ON}{OB} = \\
 &= \frac{3\sqrt{2} \cdot ON}{5} = \frac{3\sqrt{2} \sqrt{25 - \frac{9}{2}}}{5} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{41}}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{41}}{5}.
 \end{aligned}$$

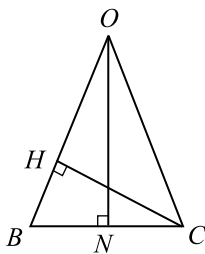


Рис. 312.

$$\angle AHC = 2\angle O_1HC; \sin \angle O_1HC = \frac{O_1C}{CH} = \frac{3 \cdot 5}{3\sqrt{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}};$$

$$\angle O_1HC = \arcsin \frac{5}{\sqrt{41}}; \angle AHC = 2 \arcsin \frac{5}{\sqrt{41}}.$$

$$\text{Ответ: } 2 \arcsin \frac{5}{\sqrt{41}}.$$

1284. Пусть O — центр нижнего основания цилиндра, CH — перпендикуляр, опущенный из точки C на плоскость нижнего основания (см. рис. 313). Тогда $HO \perp AB$ и $CO \perp AB$, так как $AB \perp CHO$. Следова-

тельно, $\angle COH$ — линейный угол искомого угла между плоскостями ABC и ABH . $BO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$. Из прямоугольного треугольника COB по теореме Пифагора имеем $CO = \sqrt{CB^2 - OB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Искомый косинус равен $\cos \angle COH = \frac{OH}{CO} = \frac{5}{12}$.

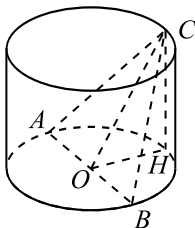


Рис. 313.

Ответ: $\frac{5}{12}$.

1285. Пусть O — центр нижнего основания цилиндра, CH — перпендикуляр, опущенный из точки C на плоскость нижнего основания (см. рис. 314). Тогда $HO \perp AB$ и $CO \perp AB$, так как $AB \perp CHO$. Следовательно, $\angle COH$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью ABC и плоскостью ABH основания цилиндра. Обозначим искомый радиус через r . Тогда из прямоугольного треугольника COB по теореме Пифагора имеем $CO^2 = CB^2 - OB^2 = 41^2 - r^2$. Из $\triangle CHO$ имеем

$$\frac{HO}{CO} = \cos \angle COH; \quad \frac{r}{\sqrt{41^2 - r^2}} = 0,225;$$

$$40r = 9\sqrt{41^2 - r^2}; \quad 40^2 r^2 + 9^2 r^2 = 9^2 \cdot 41^2; \quad 41^2 r^2 = 9^2 \cdot 41^2; \quad r = 9.$$

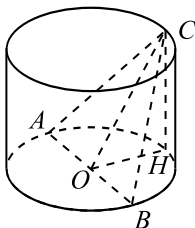


Рис. 314.

Ответ: 9.

1286. 1. Пусть AK — высота треугольника ABC , проведённая из вершины A к стороне BC (см. рис. 315). Так как по условию $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = AC = 10$) и A, B, C лежат на поверхности шара, то проекцией точки O на плоскость ABC является точка O_1 — центр описанной окружности треугольника ABC и $O_1 \in AK$. Следовательно, угол между прямой AO и плоскостью треугольника равен $\angle OAK$.

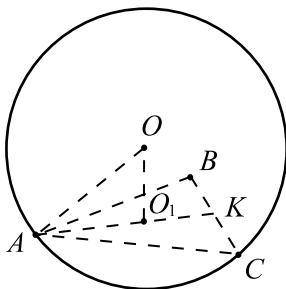


Рис. 315.

2. Рассмотрим $\triangle ABC$ (см. рис. 316). Пусть прямая l является средним перпендикуляром к стороне AC и $L = l \cap AC$. Тогда $AL = LC$, $O_1 \in l$, $\triangle ALO_1$ — прямоугольный.

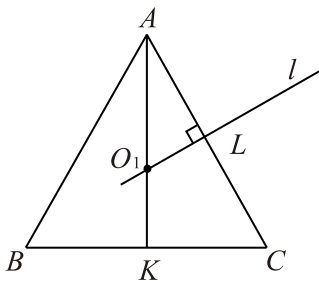


Рис. 316.

$\triangle AO_1L \sim \triangle KAC$ ($\angle A$ — общий, $\angle ALO_1 = \angle AKC = 90^\circ$).

$$\frac{AK}{AL} = \frac{AC}{AO_1} \Rightarrow$$

$$AO_1 = \frac{AC \cdot AL}{AK} = \frac{AC \cdot \frac{1}{2}AC}{\sqrt{AC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10}{\sqrt{10^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2}} = \frac{25}{4}.$$

3. Из $\triangle AOO_1$ находим $\cos \angle O_1AO = \frac{AO_1}{AO} = \frac{25}{4 \cdot 12,5} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle OAK = \angle O_1AO = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

1287. Пусть O_1 — проекция точки O на плоскость ABC (см. рис. 317). Тогда угол между прямой AO и плоскостью ABC равен $\angle OAO_1$.

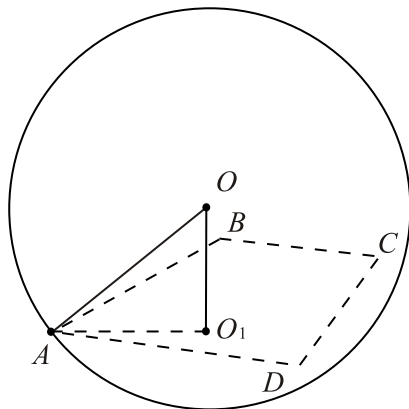


Рис. 317.

Так как $AO = BO = CO = OD$ (точки A, B, C, D лежат на поверхности шара), то $AO_1 = BO_1 = CO_1 = DO_1$. Следовательно, O_1 — центр описанной окружности около трапеции $ABCD$.

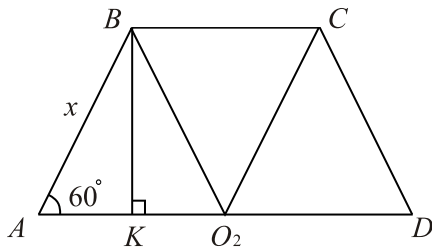


Рис. 318.

Пусть O_2 — середина стороны AD , $BK \perp AD$, $AB = BC = CD = x$ (см. рис. 318). Из $\triangle ABK$ находим $AK = AB \cos \angle BAK = x \cos 60^\circ = \frac{x}{2}$.

С другой стороны, $AK = \frac{AD - BC}{2} = \frac{2AO_2 - x}{2}$, значит, $\frac{2AO_2 - x}{2} = \frac{x}{2}$; $AO_2 = x$. Следовательно, $ABCO_2$ — ромб, $O_2C = x$; BO_2DC — ромб, $BO_2 = x$. Значит, $O_1 = O_2$ — центр описанной окружности.

По условию $AD = AO$. Тогда $AO = 2x$. Из $\triangle OAO_1$ (см. рис. 317) находим $\cos \angle OAO_1 = \frac{AO_1}{AO} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$; $\angle OAO_1 = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

1288. Пусть T — центр меньшего из кругов (см. рис. 319). Так как секущие плоскости параллельны, то искомый угол равен углу между прямой OA и плоскостью, отсекающей меньший круг. Кроме того, O — центр шара, поэтому отрезок OT перпендикулярен плоскости, отсекающей меньший круг. Следовательно, $\angle OAT$ — искомый.

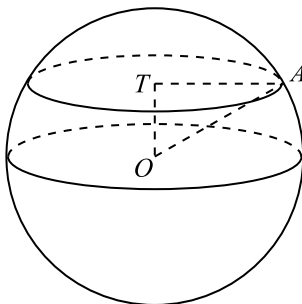


Рис. 319.

Радиус большего из отсечённых кругов равен радиусу шара и равен OA , поэтому площадь этого круга равна $\pi \cdot OA^2 = 16$; $OA = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$.

Площадь меньшего отсечённого круга равна $\pi \cdot TA^2 = 12$; $TA = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$.

Из прямоугольного $\triangle OAT$ имеем $\cos \angle OAT = \frac{TA}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $\angle OAT = 30^\circ$.

Ответ: 30.

1289. Точка O является центром большего из кругов, пусть T — центр меньшего из кругов (см. рис. 320). O — центр шара, поэтому отрезок OT перпендикулярен плоскости, отсекающей меньший круг. Следовательно, требуется найти длину отрезка OT .

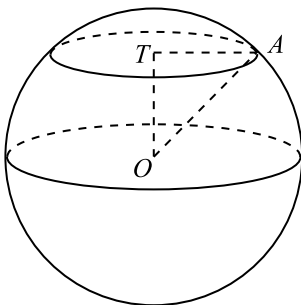


Рис. 320.

Радиус большего из отсечённых кругов равен радиусу шара и равен OA , поэтому площадь этого круга равна $\pi \cdot OA^2 = 200$; $OA^2 = \frac{200}{\pi}$. Площадь меньшего отсечённого круга равна $\pi \cdot TA^2 = 100$; $TA^2 = \frac{100}{\pi}$. Из прямоугольного $\triangle OAT$ по теореме Пифагора имеем $OT^2 = OA^2 - TA^2 = \frac{200}{\pi} - \frac{100}{\pi} = \frac{100}{\pi}$. Отсюда $OT = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$.

Ответ: $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$.

1290. Построим чертёж (см. рис. 321).

Рассмотрим сечение ABC :

$$O_1B = AB \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{10}{\sqrt{3}}; O_1A = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{20}{\sqrt{3}}.$$

$$S = \pi \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} \left(\frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}} \right) = 100\pi.$$

Ответ: 100π .

1291. Пусть AB — образующая, BK — перпендикуляр к плоскости большего основания, тогда AK — проекция AB на плоскость большего осно-

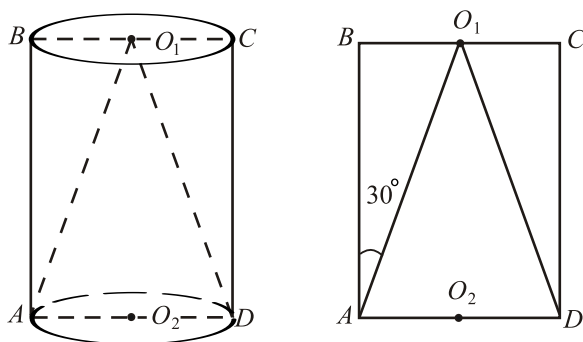


Рис. 321.

вания и $\angle BAK$ — искомый (см. рис. 322).

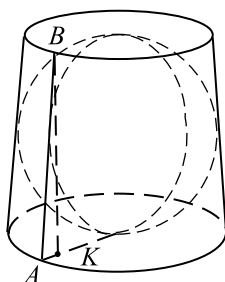


Рис. 322.

Рассмотрим осевое сечение $ABCD$ усечённого конуса (см. рис. 323), им будет равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 2R$ и $BC = 2r$.

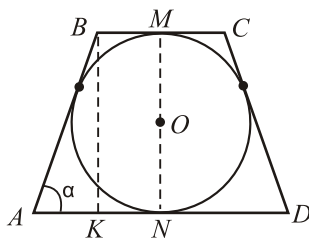


Рис. 323.

Вписанный шар в сечении даёт окружность, вписанную в трапецию,

тогда высоты трапеции BK и MN будут равны диаметру этой окружности.

Так как площади основания относятся как $1 : 4$, то $\pi R^2 = 4\pi r^2$, или $R = 2r$. По свойству касательных $AB = BM + AN$, $AB = r + R = 3r$, $AK = AN - KN = R - r = r$. Тогда из $\triangle ABK$:

$$\cos \alpha = \frac{AK}{BA} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}, \alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.

1292. Пусть высота боковой грани — CD (C и D — середины соответствующих сторон оснований), CK — перпендикуляр к большему основанию, тогда DK — проекция CD на большее основание, $\Rightarrow \angle CDK$ — искомый (см. рис. 324).

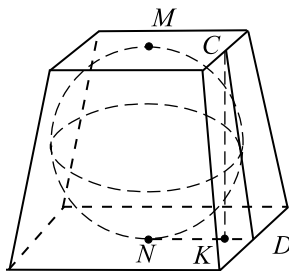


Рис. 324.

Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью $MCDN$ (см. рис. 325), оно является равнобедренной трапецией с основаниями $AD = 2b$ и $BC = 2a$. Вписанный шар в сечении даёт окружность, вписанную в трапецию, высота трапеции равна диаметру этой окружности.

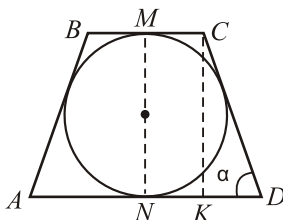


Рис. 325.

Так как основания пирамиды — квадраты и площадь большего основания в 9 раз больше площади меньшего, то $(2b)^2 = 9(2a)^2$ или $b = 3a$.

По свойству касательных $CD = CM + DN$, $CD = a + 3a = 4a$.

$DK = DN - NK = 3a - a = 2a$. Тогда из $\triangle CKD$:

$$\cos \alpha = \frac{KD}{CD} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

1293. Введём прямоугольную систему координат с началом в центре нижнего основания призмы и найдём координаты направляющих векторов прямых BD и AP (см. рис. 326, 327).

$A(0; 1; 0)$, $D_1(-\cos 45^\circ; -\sin 45^\circ; 2)$, $E(0; -1; 0)$, $P(0; -1; 1)$,

$B(-\cos 45^\circ; \sin 45^\circ; 0)$,

$D_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $\vec{BD}_1 \{0; -\sqrt{2}; 2\}$; $\vec{AP} \{0; -2; 1\}$;

$$|\vec{BD}_1| = \sqrt{0^2 + \sqrt{2}^2 + 2^2} = \sqrt{6}; |\vec{AP}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \varphi \text{ — искомый угол, тогда } \cos \varphi &= \frac{|\vec{BD}_1 \cdot \vec{AP}|}{|\vec{BD}_1| \cdot |\vec{AP}|} = \\ &= \frac{0 \cdot 0 + (-\sqrt{2}) \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{30}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{15}}. \end{aligned}$$

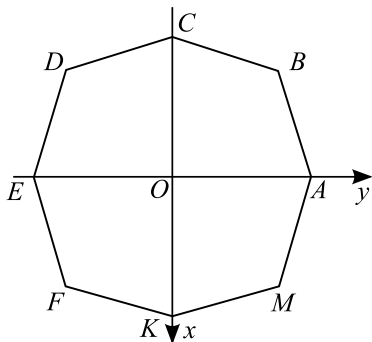


Рис. 326.

Ответ: $\arccos \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{15}}$.

1294. Область допустимых значений $|x| \leq 1$. Сделаем подстановку $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$. Заметим, что $\sin t \geq 0$ при таких t . Уравнение при-

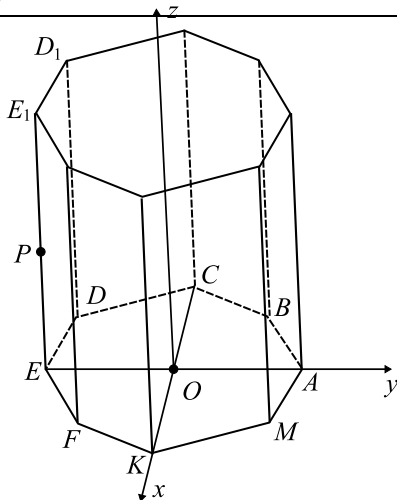


Рис. 327.

мет вид: $\cos t(1 - 2 \cos^2 t)\sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{1}{8}$, $-\cos t \cdot \cos 2t\sqrt{\sin^2 t} = \frac{1}{8}$;

$\cos t \cos 2t |\sin t| = -\frac{1}{8}$; $|\sin t| = \sin t$, т. к. $\sin t \geq 0$. $\sin t \cos t \cos 2t = -\frac{1}{8}$;

$$\sin 2t \cos 2t = -\frac{1}{4}; \sin 4t = -\frac{1}{2}; \begin{cases} 4t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 4t = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, \\ t = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}. \end{cases}$$

Учитывая, что $t \in [0; \pi]$, $t = \frac{11\pi}{24}; \frac{23\pi}{24}; \frac{7\pi}{24}; \frac{19\pi}{24}$. Вернёмся к исходной

переменной: $x = \cos t$, тогда корни уравнения $\cos \frac{11\pi}{24}; \cos \frac{23\pi}{24}; \cos \frac{7\pi}{24};$

$\cos \frac{19\pi}{24}$.

Ответ: $\cos \frac{11\pi}{24}; \cos \frac{23\pi}{24}; \cos \frac{7\pi}{24}; \cos \frac{19\pi}{24}$.

1295. Так как $|x| \leq 1$, сделаем замену $\sin x = t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$, так как $\cos t \geq 0$ при заданных значениях t . Уравнение примет вид: $3 \sin t - 4 \sin^3 t = \cos t(1 - 4 \sin^2 t)$; $\sin 3t = \cos t(1 - 4(1 - \cos^2 t))$; $\sin 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$; $\sin 3t = \cos 3t$; $\operatorname{tg} 3t = 1$; $3t = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$; так как $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $t = -\frac{\pi}{4}$; $t = \frac{\pi}{12}$; $t = \frac{5\pi}{12}$.

Вернёмся к исходной переменной. $x = \sin t$; $x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$x = \sin \frac{\pi}{12}; x = \sin \frac{5\pi}{12}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \frac{\pi}{12}; \sin \frac{5\pi}{12}$.

1296. Равенство $\log_b a = \log_c a$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a = 1, \\ b, c > 0, \\ b, c \neq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a > 0, \\ b = c, \\ b > 0, \\ b \neq 1. \end{cases}$$

$$1) \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2x + 2 > 0 \Rightarrow x > -1;$$

$$11 + 10x - x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 11.$$

$$\text{В этом случае имеем } x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{5\pi}{2}.$$

$$2) 2x + 2 = 11 + 10x - x^2;$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0;$$

$$x_1 = -1, x_2 = 9.$$

Так как $\sin(-1) < 0$, то $x = -1$ не принадлежит области определения. $\sin 9 > 0$, так как $2\pi < 9 < 3\pi$;

$2 \cdot 9 + 2 \neq 1 \Rightarrow x = 9$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $9; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

1297. Равенство $\log_b a = \log_c a$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1, \\ b, c > 0, \\ b, c \neq 1 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ b = c, \\ b > 0, \\ b \neq 1. \end{array} \right.$$

$$1) \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$3x + 14 > 0 \Rightarrow x > -\frac{14}{3};$$

$$20 + 8x - x^2 > 0 \Rightarrow -2 < x < 10.$$

В этом случае имеем $x_1 = 0, x_2 = 2\pi$.

$$2) 3x + 14 = 20 + 8x - x^2;$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0;$$

$$x_1 = -1, x_2 = 6.$$

$$\cos(-1) > 0, \text{ так как } -\frac{\pi}{2} < -1 < 0;$$

$$3 \cdot (-1) + 14 \neq 1 \Rightarrow x = -1 \text{ — корень.}$$

$$\cos(6) > 0, \text{ так как } \frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi;$$

$$3 \cdot 6 + 14 \neq 1 \Rightarrow x = 6 \text{ — корень.}$$

Ответ: $-1; 0; 6; 2\pi$.

1298. Если наименьшее из чисел $b = 2^{-6t} - 5 \cdot 2^{-2t} \cdot (2^{-t} + 2^{2t})$ и $c = -2^{6t} + 6 \cdot 2^{3t} + 7$ не меньше -9 , то справедливы оба неравенства $b \geq -9$ и $c \geq -9$. Тогда искомое значение параметра получим, решив

$$\text{систему неравенств: } \begin{cases} 2^{-6t} - 5 \cdot 2^{-2t} \cdot (2^{-t} + 2^{2t}) \geq -9, \\ -2^{6t} + 6 \cdot 2^{3t} + 7 \geq -9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{-6t} - 5 \cdot 2^{-3t} + 4 \geq 0, \\ 2^{6t} - 6 \cdot 2^{3t} - 16 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (2^{-3t} - 4)(2^{-3t} - 1) \geq 0, \\ (2^{3t} - 8)(2^{3t} + 2) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{-3t} \geq 4, 2^{-3t} \leq 1, \\ -2 \leq 2^{3t} \leq 8; \end{cases} \quad \text{зная, что функция } y = 2^x \text{ монотонно возрастает, и}$$

$$\text{ее значения положительны, имеем: } \begin{cases} -3t \geq 2, -3t \leq 0, \\ 3t \leq 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \leq -\frac{2}{3}, t \geq 0, \\ t \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq -\frac{2}{3}, t \geq 0, \\ 0 \leq t \leq 1; \end{cases} \quad (\text{см. рис. 328}).$$

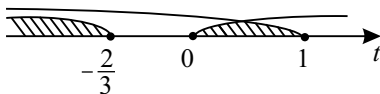


Рис. 328.

Ответ: $(-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [0; 1]$.

1299. 1. $\log_2(6x - 2x^2) + \log_{\frac{1}{4}}(x - 3)^2 > 1$.

ОДЗ. $\begin{cases} 6x - 2x^2 > 0, \\ x - 3 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 3$. Так как $x < 2$, то $0 < x < 2$.

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ \log_2(2x(3-x)) - \log_2(3-x) > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ \log_2(2x) > 1; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{1}{\log_4(5x + 6x^2)} > 1; &\Leftrightarrow \frac{1}{\log_4(5x + 6x^2)} - 1 > 0; \Leftrightarrow \\ \frac{1 - \log_4(5x + 6x^2)}{\log_4(5x + 6x^2)} > 0; &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \log_4(5x + 6x^2) > 0, \\ \log_4(5x + 6x^2) > 0, \\ 1 - \log_4(5x + 6x^2) < 0, \\ \log_4(5x + 6x^2) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 5x > 0, \\ 6x^2 + 5x < 4, \\ 6x^2 + 5x > 1, \\ 6x^2 + 5x > 0, \\ 6x^2 + 5x > 4, \\ 6x^2 + 5x < 1; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + \frac{4}{3})(x - \frac{1}{2}) < 0, \\ (x + 1)(x - \frac{1}{6}) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} -\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x > \frac{1}{6}; \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Объединим полученные решения: $\left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2)$.

Ответ: $\left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2)$.

1300. Согласно условию задачи нам необходимо найти значения x , которые удовлетворяют системам неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ b \leq 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a \leq 0, \\ b > 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Пусть $a > 0$, тогда

$$\lg x + \frac{7}{\ln x^3} + \log_x 7 > 0. \text{ ОДЗ. } x > 0, x \neq 1.$$

Пусть $t = \lg x$, тогда

$$t + \frac{7 \lg e}{3t} + \frac{\lg 7}{t} > 0;$$

$$\frac{3t^2 + 7 \lg e + 3 \lg 7}{3t} > 0.$$

Так как $3t^2 + 7 \lg e + 3 \lg 7 > 0$, то $3t > 0$; $t > 0$. Получаем $\lg x > 0$; $x > 1$.
Полученные значения x удовлетворяют ОДЗ. Итак, $a > 0$ при $x > 1$.

2. Пусть $a \leq 0$, тогда

$$\lg x + \frac{7}{\ln x^3} + \log_x 7 \leq 0. \text{ ОДЗ. } x > 0, x \neq 1.$$

Учитывая, что $a > 0$ при $x > 1$, с учётом ОДЗ получаем, что $a \leq 0$ при $0 < x < 1$.

3. Пусть $b > 0$, тогда

$$(2 \log_3 x - 1 - 3 \log_x 9)(\log_3 x + 3) > 0. \text{ ОДЗ. } x > 0, x \neq 1.$$

Пусть $t = \log_3 x$, тогда

$$\left(2t - 1 - \frac{3 \log_3 9}{t}\right)(t + 3) > 0; \left(2t - 1 - \frac{6}{t}\right)(t + 3) > 0;$$

$$\frac{(2t^2 - t - 6)(t + 3)}{t} > 0; \frac{(t - 2)\left(t + \frac{3}{2}\right)(t + 3)}{t} > 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов (см. рис. 329),

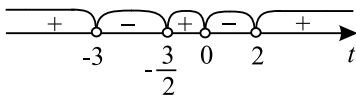


Рис. 329.

находим

$$\left[\begin{array}{l} t < -3, \\ -\frac{3}{2} < t < 0, \\ t > 2, \end{array} \right. \text{ откуда } \left\{ \begin{array}{l} \log_3 x < -3, \\ -\frac{3}{2} < \log_3 x < 0, \\ \log_3 x > 2, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{27}, \\ \frac{1}{\sqrt{27}} < x < 1, \\ x > 9. \end{array} \right.$$

4. Пусть $b \leq 0$, тогда учитывая найденные значения x , удовлетворяющие неравенству $b > 0$, с учётом ОДЗ получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{27} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{27}}, \\ 1 < x \leq 9. \end{array} \right.$$

5. Решением системы неравенств $\begin{cases} a > 0, \\ b \leq 0 \end{cases}$ являются значения

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 1, \\ \left[\begin{array}{l} \frac{1}{27} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{27}}, \\ 1 < x \leq 9; \end{array} \right. \Rightarrow 1 < x \leq 9. \end{array} \right.$$

6. Решением системы неравенств $\begin{cases} a \leq 0, \\ b > 0 \end{cases}$ являются значения

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{27}, \\ \frac{1}{\sqrt{27}} < x < 1, \\ x > 9; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{27}, \\ \frac{1}{\sqrt{27}} < x < 1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Значит, условию задачи удовлетворяют $x \in \left(0; \frac{1}{27}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{27}}; 1\right) \cup (1; 9]$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{27}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{27}}; 1\right) \cup (1; 9]$.

1301. Согласно условию задачи нам необходимо найти значения x , которые удовлетворяют системе неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 2, \\ \left[\begin{array}{l} a > -3, \\ b > -3. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1) Пусть $a > -3$, тогда

$2\log_x 27 - \log_3(81x) > -3$. ОДЗ. $x > 0, x \neq 1$.

$$\frac{2 \log_3 27}{\log_3 x} - (\log_3 81 + \log_3 x) > -3;$$

$$\frac{6}{\log_3 x} - 4 - \log_3 x > -3.$$

Пусть $t = \log_3 x$, $t \neq 0$, тогда

$$\frac{6}{t} - t - 1 > 0; \frac{t^2 + t - 6}{t} < 0; \frac{(t+3)(t-2)}{t} < 0;$$

$$\begin{cases} t < -3, \\ 0 < t < 2. \end{cases}$$

$$\text{Получаем: } \begin{cases} \log_3 x < -3, \\ \log_3 x < 2, \\ \log_3 x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_3 x < \log_3 3^{-3}, \\ \log_3 x < \log_3 3^2, \\ \log_3 x > \log_3 3^0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{27}, \\ 1 < x < 9. \end{cases}$$

С учётом ОДЗ $x \in \left(0; \frac{1}{27}\right) \cup (1; 9)$.

2) Пусть $b > -3$, тогда

$$\log_3^2 x^3 - 28 \log_3 x > -3. \text{ ОДЗ. } x > 0.$$

$$9 \log_3^2 x - 28 \log_3 x + 3 > 0.$$

Пусть $t = \log_3 x$, тогда

$$9t^2 - 28t + 3 > 0; (9t - 1)(t - 3) > 0; \begin{cases} t < \frac{1}{9}, \\ t > 3. \end{cases}$$

$$\text{Получаем: } \begin{cases} \log_3 x < \frac{1}{9}, \\ \log_3 x > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_3 x < \log_3 3^{\frac{1}{9}}, \\ \log_3 x > \log_3 3^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \sqrt[9]{3}, \\ x > 27. \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ, получаем: $x \in (0; \sqrt[9]{3}) \cup (27; +\infty)$.

3) Первоначальная система неравенств принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 2, \\ \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{27}, \\ 1 < x < 9, \\ 0 < x < \sqrt[9]{3}, \\ x > 27; \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 9, \\ x > 27. \end{array} \right.$$

Ответ: $(2; 9) \cup (27; +\infty)$.

1302. $\frac{1}{2} \log_{4+x}(x^2 + 2x + 1) + \log_{-x-1}(-x^2 - 5x - 4) \leq 3$.

$$\text{ОДЗ: } \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2x + 1 > 0, \\ -x^2 - 5x - 4 > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1, \\ -x - 1 > 0, \\ -x - 1 \neq 1, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > -4, \\ x \neq -3, \\ x < -1, \\ x \neq -2, \\ x \neq -1. \end{array} \right.$$

$$x \in (-4; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; -1).$$

На ОДЗ неравенство примет вид:

$$\log_{4+x}|x+1| + \log_{-x-1}((-x-1)(x+4)) \leq 3;$$

$$\log_{4+x}(-x-1) + \log_{-x-1}(-x-1) + \log_{-x-1}(x+4) \leq 3;$$

$$\log_{x+4}(-x-1) + \frac{1}{\log_{x+4}(-x-1)} - 2 \leq 0;$$

$$\frac{\log_{x+4}^2(-x-1) - 2\log_{x+4}(-x-1) + 1}{\log_{x+4}(-x-1)} \leq 0;$$

$$\frac{(\log_{x+4}(-x-1) - 1)^2}{\log_{x+4}(-x-1)} \leq 0; \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_{x+4}(-x-1) - 1 = 0, \\ \log_{x+4}(-x-1) < 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x-1 = x+4, \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < x+4 < 1, \\ -x-1 > 1, \\ x+4 > 1, \\ -x-1 < 1; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2,5, \\ \left\{ \begin{array}{l} -4 < x < -3, \\ x < -2, \\ x > -3, \\ x > -2; \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2,5, \\ -4 < x < -3, \\ x > -2. \end{array} \right.$$

С учётом ОДЗ получаем: $x \in (-4; -3) \cup \{-2,5\} \cup (-2; -1)$.

Ответ: $(-4; -3) \cup \{-2,5\} \cup (-2; -1)$.

$$1303. \log_{1-x}(1-x)(1+2x) + \frac{1}{4} \log_{1+2x}(x-1)^4 \geq -1.$$

$$\text{ОДЗ. } \begin{cases} 1-x > 0, \\ 1-x \neq 1, \\ 1+2x > 0, \\ 1+2x \neq 1 \end{cases} ; \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad x \in (-0,5; 0) \cup (0; 1).$$

$$1 + \log_{1-x}(1+2x) + \frac{1}{4} \cdot 4 \log_{1+2x}|x-1| \geq -1;$$

при $x \in (-0,5; 0) \cup (0; 1)$ $|x-1| = 1-x$, тогда имеем

$$\log_{1-x}(1+2x) + \log_{1+2x}(1-x) \geq -2; \log_{1-x}(1+2x) + \frac{1}{\log_{1-x}(1+2x)} \geq -2.$$

Пусть $\log_{1-x}(1+2x) = t$, тогда при $x \in (-0,5; 0) \cup (0; 1)$ $t < 0$ (при $x \in (-0,5; 0)$ $1-x > 1$, $0 < 1+2x < 1$, следовательно $\log_{1-x}(1+2x) < 0$; при $x \in (0; 1)$ $0 < 1-x < 1$, $1+2x > 1$, следовательно $\log_{1-x}(1+2x) < 0$).

$$t + \frac{1}{t} \geq -2; t^2 + 1 \leq -2t \text{ (так как } t < 0); t^2 + 2t + 1 \leq 0; (t+1)^2 \leq 0;$$

$$t = -1.$$

$$\text{Вернёмся к замене, получим: } \log_{1-x}(1+2x) = -1; 1+2x = \frac{1}{1-x};$$

$$(1+2x)(1-x) = 1; -2x^2 + x = 0; x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}. x = 0 \text{ не принадлежит}$$

$$\text{ОДЗ, поэтому решением исходного неравенства является } x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

$$1304. \log_{x-2} \log_3 \frac{x+3}{x-3} > \log_{\frac{1}{x-2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-3}{x+3}.$$

$$\text{ОДЗ. } \begin{cases} x-2 > 0, \\ x-2 \neq 1, \\ x \neq 3, \\ x \neq -3, \\ \frac{x+3}{x-3} > 0, \\ \log_3 \frac{x+3}{x-3} > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3.$$

С учётом ОДЗ исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_{x-2} \log_3 \frac{x+3}{x-3} > -\log_{x-2} \log_3 \frac{x+3}{x-3}, \\ x > 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3 \frac{x+3}{x-3} > \frac{1}{\log_3 \frac{x+3}{x-3}}, \\ x > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\log_3^2 \frac{x+3}{x-3} - 1}{\log_3 \frac{x+3}{x-3}} > 0, \\ x > 3; \end{cases}$$

Полученная система неравенств распадается на две.

$$1) \begin{cases} \log_3^2 \frac{x+3}{x-3} > 1, \\ \log_3 \frac{x+3}{x-3} > 0, \\ x > 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 \frac{x+3}{x-3} > 1, \\ x > 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{x-3} > 3, \\ x > 3; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 6, \\ x > 3. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \log_3^2 \frac{x+3}{x-3} < 1, \\ \log_3 \frac{x+3}{x-3} < 0, \\ x > 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 \frac{x+3}{x-3} > -1, \\ \log_3 \frac{x+3}{x-3} < 0, \\ x > 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{x-3} > \frac{1}{3}, \\ \frac{x+3}{x-3} < 1, \\ x > 3. \end{cases}$$

Последняя система не имеет решений.

Ответ: (3; 6).

$$1305. \log_{x+6} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-5}{x+5} < \log_{\frac{1}{x+6}} \log_2 \frac{x+5}{x-5}.$$

$$\text{ОДЗ. } \begin{cases} x+6 > 0, \\ x+6 \neq 1, \\ x \neq 5, \\ x \neq -5, \\ \frac{x-5}{x+5} > 0, \\ \log_2 \frac{x+5}{x-5} > 0; \end{cases} \Rightarrow x > 5.$$

С учётом ОДЗ исходное неравенство равносильно системе неравенств.

$$\begin{cases} \log_{x+6} \log_2 \frac{x+5}{x-5} < -\log_{x+6} \log_2 \frac{x+5}{x-5}, \\ x > 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 \frac{x+5}{x-5} < \frac{1}{\log_2 \frac{x+5}{x-5}}, \\ x > 5; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\log_2^2 \frac{x+5}{x-5} - 1}{\log_2 \frac{x+5}{x-5}} < 0, \\ x > 5. \end{cases}$$

Полученная система неравенств распадается на две.

$$1) \begin{cases} \log_2 \frac{x+5}{x-5} < 1, \\ \log_2 \frac{x+5}{x-5} > 0, \\ x > 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{x+5}{x-5} < 1, \\ \log_2 \frac{x+5}{x-5} > 0, \\ x > 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+5}{x-5} < 2, \\ \frac{x+5}{x-5} > 1, \\ x > 5; \end{cases} \Rightarrow x > 15.$$

$$2) \begin{cases} \log_2 \frac{x+5}{x-5} > 1, \\ \log_2 \frac{x+5}{x-5} < 0, \\ x > 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{x+5}{x-5} < -1, \\ x > 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+5}{x-5} < \frac{1}{2}, \\ x > 5; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -15, \\ x < 5, \\ x > 5. \end{cases}$$

Последняя система не имеет решений.

Ответ: $(15; +\infty)$.

$$1306. \text{ ОДЗ. } x > 0. \quad 3^{\log_3^2 x} < 6,$$

$$\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} < 6, \quad 2x^{\log_3 x} < 6, \quad x^{\log_3 x} < 3.$$

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 3. Учитывая, что функция $y = \log_3 t$ возрастающая, получим:

$$\log_3 x^{\log_3 x} < \log_3 3, \quad \log_3^2 < 1, \quad |\log_3 x| < 1,$$

$$\log_3 \frac{1}{3} < \log_3 x < \log_3 3, \quad \frac{1}{3} < x < 3.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

$$1307. \text{ ОДЗ. } x > 0.$$

$$7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} < 14,$$

$$\left(7^{\log_7 x}\right)^{\log_7 x} + x^{\log_7 x} < 14,$$

$$2x^{\log_7 x} < 14, \quad x^{\log_7 x} < 7.$$

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 7. Учитывая, что функция $y = \log_7 t$ возрастающая, получим:

$$\log_7 x^{\log_7 x} < \log_7 7, \log_7^2 x < 1, |\log_7 x| < 1, \log_7 \frac{1}{7} < \log_7 x < \log_7 7,$$

$$\frac{1}{7} < x < 7.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{7}; 7\right)$.

$$1308. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x < 0, \\ x \neq -\frac{1}{27}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{27}\right) \cup \left(-\frac{1}{27}; 0\right).$$

Преобразуем исходное неравенство к виду:

$$\frac{\frac{1}{x-1} \log_3 27}{\frac{1}{x-1} (\log_3 27 + \log_3(-x))} \leq \frac{1}{\log_3(-x \log_3 3)}.$$

$$\text{На ОДЗ имеем: } \frac{3}{3 + \log_3(-x)} \leq \frac{1}{\log_3(-x)}.$$

$$\text{Пусть } \log_3(-x) = t, t \neq -3; t \neq 0. \text{ Тогда } \frac{3}{3+t} - \frac{1}{t} \leq 0;$$

$$\frac{2t-3}{t(3+t)} \leq 0. \text{ Из рисунка 330 следует, что } t \in (-\infty; -3) \cup (0; 1,5]. \text{ Тогда}$$

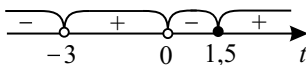


Рис. 330.

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(-x) < -3, \\ \log_3(-x) > 0, \\ \log_3(-x) \leq 1,5; \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(-x) < \log_3 \frac{1}{27}, \\ \log_3(-x) > \log_3 1, \\ \log_3(-x) \leq \log_3 3^{\frac{3}{2}}; \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -\frac{1}{27}, \\ x < -1, \\ x \geq -3\sqrt{3}; \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$x \in [-3\sqrt{3}; -1) \cup \left(-\frac{1}{27}; +\infty\right).$$

$$\text{Учитывая ОДЗ, получаем } x \in [-3\sqrt{3}; -1) \cup \left(-\frac{1}{27}; 0\right).$$

$$\text{Ответ: } [-3\sqrt{3}; -1) \cup \left(-\frac{1}{27}; 0\right).$$

$$1309. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x < 0, \\ x \neq -\frac{1}{4}, \\ x \neq -1, \\ x \neq -8; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty; -8) \cup (-8; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right).$$

Преобразуем исходное неравенство к виду:

$$\frac{\frac{1}{x+8} \log_2 4}{\frac{1}{x+8} (\log_2 4 + \log_2(-x))} \leq \frac{1}{\log_2(-x \log_2 2)}.$$

На ОДЗ имеем:

$$\frac{2}{2 + \log_2(-x)} \leq \frac{1}{\log_2(-x)}.$$

Пусть $\log_2(-x) = t, t \neq -2; t \neq 0$. Тогда $\frac{2}{2+t} - \frac{1}{t} \leq 0$;

$\frac{t-2}{t(2+t)} \leq 0$. Из рисунка 331 следует, что $t \in (-\infty; -2) \cup (0; 2]$. Тогда

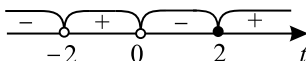


Рис. 331.

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(-x) < -2, \\ \log_2(-x) > 0; \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(-x) < \log_2 \frac{1}{4}, \\ \log_2(-x) > \log_2 1; \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -\frac{1}{4}, \\ x < -1; \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x \geq -4; \end{array} \right]$$

$$x \in [-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in [-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

Ответ: $[-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

1310. Пусть $t = 5^{-x^2}, 0 < t \leq 1$. Тогда неравенство принимает вид:

$$\log_3((t-7)(5^9 \cdot t - 1)) + \log_3 \frac{t-7}{5^9 \cdot t - 1} - \log_3(25t-1)^2 > 0. \text{ Так}$$

как $t - 7 < 0$, то $5^9 \cdot t - 1 < 0$; $0 < t < \frac{1}{5^9}$. То-

$$\text{гда } \begin{cases} \log_3(t-7)^2 > \log_3(25t-1)^2, \\ 0 < t < 5^{-9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-7)^2 > (25t-1)^2, \\ 0 < t < 5^{-9}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7-t > 1-25t, \\ 0 < t < 5^{-9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{1}{4} \\ 0 < t < 5^{-9}, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < 5^{-9}. \text{ Значит,}$$

$$5^{-x^2} < 5^{-9} \Leftrightarrow x^2 > 9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty).$$

Ответ: $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

1311. Пусть $t = 3^{-x^2}$, $0 < t \leq 1$. Тогда неравенство принимает вид:

$$\log_7 \frac{t-8}{3^{26} \cdot t - 3} + \log_7((t-8)(3^{26} \cdot t - 3)) > \log_7(27t-1)^2. \text{ Так как}$$

$t-8 < 0$, то $3^{26} \cdot t - 3 < 0$; $0 < t < \frac{1}{3^{25}}$. Тогда

$$\begin{cases} \log_7(8-t)^2 > \log_7(27t-1)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{3^{25}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (8-t)^2 > (27t-1)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{3^{25}}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 8-t > 1-27t, \\ 0 < t < \frac{1}{3^{25}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{7}{26}, \\ 0 < t < \frac{1}{3^{25}}; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{3^{25}}.$$

Значит, $3^{-x^2} < 3^{-25} \Leftrightarrow x^2 > 25 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

$$1312. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 4^{x-5} \neq 1 \\ -256x > 0 \\ -256x \neq 1 \\ \log_{\frac{1}{4}} 4^x > 0 \\ \log_{\frac{1}{4}} 4^x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x < 0 \\ x \neq -\frac{1}{256} \\ x < 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \neq -\frac{1}{256} \\ x \neq -1 \end{cases}$$

На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{1}{\log_{64}(-256x)} \leq \frac{1}{\log_4(-x)} \Leftrightarrow \frac{3}{\log_4(-256x)} \leq \frac{1}{\log_4(-x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4 + \log_4(-x)} \leq \frac{1}{\log_4(-x)}. \text{ Пусть } \log_4(-x) = t, \text{ тогда}$$

$$\frac{3}{4+t} \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{3t-t-4}{t(4+t)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2t-4}{t(t+4)} \leq 0$$

$$t < -4; 0 < t \leq 2$$

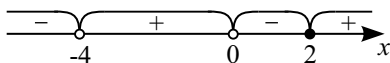


Рис. 332.

$$\log_4(-x) < -4; 0 < \log_4(-x) \leq 2$$

$$-x < 4^{-4}; 1 < -x \leq 16$$

$$x > -\frac{1}{256}; -16 \leq x < -1.$$

Учитывая ОДЗ, получаем:

$$x \in [-16; -1) \cup \left(-\frac{1}{256}; 0\right).$$

$$\text{Ответ: } [-16; -1) \cup \left(-\frac{1}{256}; 0\right).$$

$$1313. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 2^{x+4} \neq 1 \\ -16x > 0 \\ -16x \neq 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} 3^x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} 3^x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x < 0 \\ x \neq -\frac{1}{16} \\ x < 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \neq -\frac{1}{16} \\ x \neq -1 \\ x \neq -4. \end{cases}$$

На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{1}{\log_8(-16x)} \leq \frac{1}{\log_2(-x)} \Leftrightarrow \frac{3}{4 + \log_2(-x)} \leq \frac{1}{\log_2(-x)}.$$

$$\text{Пусть } \log_2(-x) = t, \text{ тогда } \frac{3}{4+t} \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{2t-4}{t(t+4)} \leq 0.$$

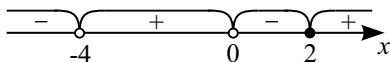


Рис. 333.

Из рисунка 333 следует, что $t < -4; 0 < t \leq 2$;

$$\log_2(-x) < -4; 0 < \log_2(-x) \leq 2;$$

$$-x < 2^{-4}; 1 < -x \leq 2^2;$$

$$x > -\frac{1}{16}; -4 \leq x < -1.$$

$$\text{Учитывая ОДЗ, получаем: } x \in (-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{16}; 0\right).$$

$$\text{Ответ: } (-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{16}; 0\right).$$

$$1314. \log_2 \left((2^{-x^2} - 4)(2^{-x^2+1} - 1) \right) - \log_2 \frac{2^{-x^2} - 4}{2^{-x^2+1} - 1} \geq \log_2 (2^{5-x^2} - 8)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{ОДЗ. } & \begin{cases} (2^{-x^2} - 4)(2^{-x^2+1} - 1) > 0, \\ 2^{5-x^2} - 8 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{-x^2+1} - 1 < 0, \\ 2^{5-x^2} \neq 2^3; \end{cases} \\ & \begin{cases} -x^2 + 1 < 0, \\ x^2 \neq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} |x| > 1, \\ |x| \neq \sqrt{2}. \end{cases} \\ & \log_2 \frac{(2^{-x^2} - 4)(2^{-x^2+1} - 1)(2^{-x^2+1} - 1)}{(2^{-x^2} - 4)} \geq \log_2 (32 \cdot 2^{-x^2} - 8)^2, \end{aligned}$$

$$\log_2 (2^{-x^2+1} - 1)^2 \geq \log_2 (32 \cdot 2^{-x^2} - 8)^2,$$

$$|2^{-x^2+1} - 1| \geq |32 \cdot 2^{-x^2} - 8|,$$

$$1 - 2 \cdot 2^{-x^2} \geq |32 \cdot 2^{-x^2} - 8|,$$

$$\left[\begin{cases} 32 \cdot 2^{-x^2} - 8 \geq 0, \\ 1 - 2 \cdot 2^{-x^2} \geq 32 \cdot 2^{-x^2} - 8, \\ 32 \cdot 2^{-x^2} - 8 < 0, \\ 1 - 2 \cdot 2^{-x^2} \geq 8 - 32 \cdot 2^{-x^2}; \end{cases} \right] \quad \left[\begin{cases} |x| \leq \sqrt{2}, \\ 2^{-x^2} \leq \frac{9}{34}, \\ |x| > \sqrt{2}, \\ 2^{-x^2} \geq \frac{7}{30}; \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{cases} |x| \leq \sqrt{2}, \\ -x^2 \leq \log_2 \frac{9}{34}, \\ |x| > \sqrt{2}, \\ -x^2 \geq \log_2 \frac{7}{30}; \end{cases} \right] \quad \left[\begin{cases} |x| \leq \sqrt{2}, \\ |x| \geq \sqrt{\log_2 \frac{34}{9}}, \\ |x| > \sqrt{2}, \\ |x| \leq \sqrt{\log_2 \frac{30}{7}}; \end{cases} \right]$$

$$\sqrt{\log_2 \frac{34}{9}} \leq |x| \leq \sqrt{\log_2 \frac{30}{7}}.$$

$$\text{Учитывая ОДЗ, получим } \sqrt{\log_2 \frac{34}{9}} \leq |x| < \sqrt{2}, \sqrt{2} < |x| \leq \sqrt{\log_2 \frac{30}{7}}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\log_2 \frac{34}{9}} \leq |x| \leq \sqrt{\log_2 \frac{30}{7}}, |x| \neq \sqrt{2}.$$

$$1315. \log_{0,5} \left((2^{-x^2} - 8)(2^{-x^2+2} - 1) \right) - \log_{0,5} \frac{2^{-x^2+2} - 1}{2^{-x^2} - 8} \geq \log_{0,5} (2^{1-x^2} - 2)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{ОДЗ. } & \begin{cases} (2^{-x^2} - 8)(2^{-x^2+2} - 1) > 0, \\ 2^{1-x^2} - 2 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{-x^2+2} - 1 < 0, \\ 2^{1-x^2} \neq 2^1; \end{cases} \\ & \begin{cases} -x^2 + 2 < 0, \\ x^2 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} |x| > \sqrt{2}, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad |x| > \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\log_{0,5} \frac{(2^{-x^2} - 8)(2^{-x^2+2} - 1)(2^{-x^2} - 8)}{(2^{-x^2+2} - 1)} \geq \log_{0,5} (2 \cdot 2^{-x^2} - 2)^2,$$

$$\log_{0,5} (2^{-x^2} - 8)^2 \geq \log_{0,5} (2 \cdot 2^{-x^2} - 2)^2,$$

$$|2^{-x^2} - 8| \leq |2 \cdot 2^{-x^2} - 2|,$$

$$8 - 2^{-x^2} \leq 2 - 2 \cdot 2^{-x^2},$$

$$2^{-x^2} \leq -6.$$

Последнее неравенство, а значит, и исходное, решений не имеет.

Ответ: решений нет.

1316. Решим неравенство методом интервалов. ОДЗ: $x > 8$.

Рассмотрим уравнение на промежутке $x > 8$:

$$\log_5^2(x - 8) - 6 \log_5 \sqrt{x - 8} - 4 + 25(x - 8) \cdot (\log_5(x - 8) - 4) = 0.$$

Замена $x - 8 = 5^t$ приводит к уравнению

$$t^2 - 3t - 4 + 25 \cdot 5^t \cdot (t - 4) = 0,$$

$$(t + 1)(t - 4) + 25 \cdot 5^t \cdot (t - 4) = 0,$$

$$(t - 4)(t + 1 + 25 \cdot 5^t) = 0,$$

$$\begin{cases} t = 4, \\ 25 \cdot 5^t = -t - 1. \end{cases}$$

Уравнение $5^t = -\frac{t+1}{25}$ имеет единственное решение. (Слева возрастающая функция, а справа убывающая, \Rightarrow не более одного решения.) Корень находим подбором: $t = -2$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} x - 8 = 5^4, \\ x - 8 = 5^{-2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 633, \\ x = 8\frac{1}{25}. \end{cases}$$

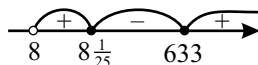


Рис. 334.

$$\text{Ответ: } \left(8; 8\frac{1}{25}\right] \cup [633; +\infty).$$

1317. ОДЗ: $x > 2$.

Решим неравенство методом интервалов. Рассмотрим уравнение $\log_3^2(x - 2) + 3(x - 2)(2 \log_3 \sqrt{x - 2} + 3) - 7 \log_3(x - 2) - 30 = 0$ на промежутке $x > 2$.

Замена $x - 2 = 3^t$ приводит к уравнению

$$t^2 - 7t - 30 + 3 \cdot 3^t(t + 3) = 0,$$

$$(t + 3)(t - 10) + 3 \cdot 3^t(t + 3) = 0,$$

$$(t+3)(t-10+3 \cdot 3^t) = 0.$$

$$\begin{cases} t = -3, \\ 3 \cdot 3^t = 10 - t. \end{cases}$$

Уравнение $3 \cdot 3^t = 10 - t$ имеет корень $t = 1$. Других корней нет, так как слева от знака равенства возрастающая функция, а справа — убывающая.

$$\text{Тогда } \begin{cases} x - 2 = 3^{-3}, \\ x - 2 = 3^1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{27}, \\ x = 5. \end{cases}$$



Рис. 335.

$$\text{Ответ: } \left(2; 2\frac{1}{27}\right] \cup [5; +\infty).$$

$$1318. 7^{18} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{5\sqrt{x}} > 1.$$

$$\text{ОДЗ: } x \geq 0.$$

$$\text{Преобразуем исходное неравенство к виду } 7^{18} \cdot 7^{-2x} \cdot 7^{-5\sqrt{x}} > 7^0; \\ 7^{18-2x-5\sqrt{x}} > 7^0; 18 - 2x - 5\sqrt{x} > 0.$$

Пусть $t = \sqrt{x}$, $t \geq 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2t^2 + 5t - 18 < 0, \\ t \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2} < t < 2, \\ t \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t < 2.$$

Возвращаясь к неизвестному x , получаем $0 \leq \sqrt{x} < 2$.

Отсюда $0 \leq x < 4$.

$$\text{Ответ: } [0; 4).$$

$$1319. 5^{33} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{x}} > 1. \text{ ОДЗ: } x \geq 0.$$

$$\text{Преобразуем исходное неравенство к виду } 5^{33} \cdot 5^{-3x} \cdot 5^{-2\sqrt{x}} > 1; \\ 5^{33-3x-2\sqrt{x}} > 5^0; 33 - 3x - 2\sqrt{x} > 0.$$

$$\text{Пусть } t = \sqrt{x}, t \geq 0. \text{ Тогда } \begin{cases} 33 - 3t^2 - 2t > 0, \\ t \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{11}{3} < t < 3, \\ t \geq 0; \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 0 \leq t < 3$. Возвращаясь к неизвестному x , получаем $0 \leq \sqrt{x} < 3$.

Отсюда $0 \leq x < 9$.

$$\text{Ответ: } [0; 9).$$

$$1320. \frac{2^{2|x-3|} + 4}{5} < 2^{|x-3|}.$$

Замена $2^{|x-3|} = t$.

$$\frac{t^2 + 4}{5} < t;$$

$$t^2 - 5t + 4 < 0;$$

$$(t-1)(t-4) < 0;$$

$$1 < t < 4;$$

$$2^0 < 2^{|x-3|} < 2^2;$$

$$0 < |x-3| < 2;$$

$$\begin{cases} x \neq 3, \\ -2 < x-3 < 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 3, \\ 1 < x < 5. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 3) \cup (3; 5)$.

$$1321. \frac{5^{2|x+1|} + 5}{6} < 5^{|x+1|}.$$

Замена $5^{|x+1|} = t$.

$$\frac{t^2 + 5}{6} < t;$$

$$t^2 - 6t + 5 < 0;$$

$$(t-1)(t-5) < 0;$$

$$1 < t < 5;$$

$$5^0 < 5^{|x+1|} < 5^1;$$

$$0 < |x+1| < 1;$$

$$\begin{cases} x \neq -1, \\ -1 < x+1 < 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ -2 < x < 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 0)$.

$$1322. \log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1}.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \log_4 \frac{4x-1}{x+1} > 0, \\ \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1} > 0, \\ \frac{4x-1}{x+1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} > 1, \\ \frac{x+1}{4x-1} < 1, \\ \frac{4x-1}{x+1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} > 1, \\ \frac{x+1}{4x-1} < 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3x-2}{x+1} > 0, \\ \frac{3x-2}{4x-1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решим исходное неравенство на ОДЗ

$$\log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < \log_3 \left(\log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1} \right)^{-1}, \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < \left(\log_4 \frac{4x-1}{x+1} \right)^{-1}.$$

Обозначим $\log_4 \frac{4x-1}{x+1} = t$. Неравенство примет вид:

$$t < \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t} < 0, \frac{(t-1)(t+1)}{t} < 0; t < -1; 0 < t < 1.$$

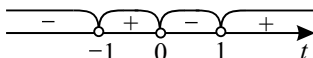


Рис. 336.

Вернёмся к исходным переменным.

$$1. \begin{cases} \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < -1, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x > \frac{2}{3}; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} < \frac{1}{4}, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x > \frac{2}{3}; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{1}{3}, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x > \frac{2}{3}. \end{cases} \end{cases}$$

Решений нет.

$$2. \begin{cases} \log_4 \frac{4x-1}{x+1} > 0, \\ \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < 1, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x > \frac{2}{3}; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} > 1, \\ \frac{4x-1}{x+1} < 4, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x > \frac{2}{3}; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x > \frac{2}{3}; \end{cases} \\ x > \frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

$$1323. \log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ 1 - \frac{x}{4} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

$$\frac{1}{4} \log_3^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}},$$

$$\log_3^2 x \geq \log_3^2 \left(1 - \frac{x}{4}\right),$$

$$\log_3^2 x - \log_3^2 \left(1 - \frac{x}{4}\right) \geq 0,$$

$$\left(\log_3 x - \log_3 \left(1 - \frac{x}{4}\right)\right) \left(\log_3 x + \log_3 \left(1 - \frac{x}{4}\right)\right) \geq 0,$$

$$\log_3 \frac{4x}{4-x} \cdot \log_3 \frac{x(4-x)}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \log_3 \frac{4x}{4-x} \geq 0, \\ \log_3 \frac{x(4-x)}{4} \geq 0, \\ 0 < x < 4, \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 \frac{4x}{4-x} \leq 0, \\ \log_3 \frac{x(4-x)}{4} \leq 0, \\ 0 < x < 4; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{4x}{4-x} \geq 1, \\ x(4-x) \geq 4, \\ 0 < x < 4, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{4x}{4-x} \leq 1, \\ x(4-x) \leq 4, \\ 0 < x < 4; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 0,8 \leq x \leq 4, \\ (x-2)^2 \leq 0, \\ 0 < x < 4, \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{cases} x \leq 0,8, \\ x \geq 4, \end{cases} \\ (x-2)^2 \geq 0, \\ 0 < x < 4; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ 0 < x \leq 0,8. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0,8] \cup \{2\}$.

$$\begin{aligned} 1324. \quad & 3^{2x} - 2^{x+\frac{3}{2}} \geq 2^{x+\frac{5}{2}} + 9^{x-1}, \quad 3^{2x} - 9^{x-1} \geq 2^{x+\frac{3}{2}} + 2^{x+\frac{5}{2}}, \\ & 9^x \left(1 - \frac{1}{9}\right) \geq 2^x (2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}), \quad 9^x \cdot \frac{8}{9} \geq 2^x \cdot 6\sqrt{2}, \quad \frac{9^x}{2^x} \geq \frac{9 \cdot 6\sqrt{2}}{8}, \\ & \frac{9^x}{2^x} \geq \frac{27}{2\sqrt{2}}, \quad \left(\frac{9}{2}\right)^x \geq \left(\frac{9}{2}\right)^{1,5}, \quad x \geq 1,5. \end{aligned}$$

Ответ: $[1,5; +\infty)$.

$$\begin{aligned} 1325. \quad & 5^{x+\frac{2}{3}} - 8^x \geq 2^x \cdot 4^{x-1} + 5^{x-\frac{1}{3}}, \quad 5^{x+\frac{2}{3}} - 5^{x-\frac{1}{3}} \geq 8^x + \frac{1}{4} \cdot 8^x, \\ & 5^x \left(5^{\frac{2}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}}\right) \geq \frac{5}{4} \cdot 8^x, \quad 5^x \cdot 5^{-\frac{1}{3}} \cdot (5-1) \geq \frac{5}{4} \cdot 8^x, \quad 5^x \cdot 4 \cdot 5^{-\frac{1}{3}} \geq \frac{5}{4} \cdot 8^x, \end{aligned}$$

$$\frac{8^x}{5^x} \leq 4 \cdot 4 \cdot 5^{-\frac{4}{3}}, \quad \left(\frac{8}{5}\right)^x \leq \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{4}{3}}, \quad x \leq \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$.

1326. $\log_{|2x+3|}(x^2 - 10x + 9) \geq 2$. Решим методом интервалов. Рассмотрим уравнение $\log_{|2x+3|}(x^2 - 10x + 9) = 2$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} |2x+3| \neq 0, \\ |2x+3| \neq 1, \\ x^2 - 10x + 9 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2, \\ x \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty). \end{cases}$$

На ОДЗ рассматриваемое уравнение равносильно уравнению

$$x^2 - 10x + 9 = (2x + 3)^2; \quad -3x^2 - 22x = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{22}{3}.$$

Пусть $f(x) = \log_{|2x+3|}(x^2 - 10x + 9) - 2$. Решение исходного неравенства составляют те значения x , при которых $f(x) \geq 0$ (см. рис. 337).

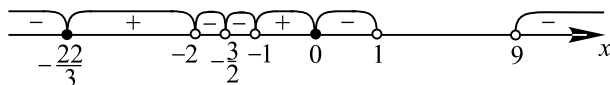


Рис. 337.

Ответ: $\left[-\frac{22}{3}; -2\right) \cup (-1; 0]$.

1327. Решим неравенство методом интервалов. Рассмотрим уравнение $\log_{|3x+2|}(x^2 - 5x + 4) = 2$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} |3x+2| \neq 0, \\ |3x+2| \neq 1, \\ x^2 - 5x + 4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{2}{3}, \\ x \neq -\frac{1}{3}, \\ x \neq -1, \\ x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty). \end{cases}$$

На ОДЗ рассматриваемое уравнение равносильно уравнению

$$x^2 - 5x + 4 = (3x + 2)^2; \quad -8x^2 - 17x = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{17}{8}.$$

Обозначим $f(x) = \log_{|3x+2|}(x^2 - 5x + 4) - 2$. Решение исходного неравенства составляют те значения x , при которых $f(x) \geq 0$ (см. рис. 338).

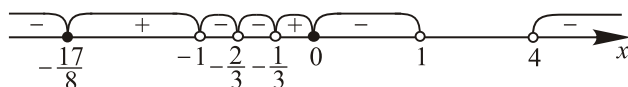


Рис. 338.

Ответ: $\left[-\frac{17}{8}; -1\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right]$.

1328. ОДЗ: $\begin{cases} 1 - x^2 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x < 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$

$$4\log_{x+1}(1 - x^2) - \frac{1}{4} \cdot 16\log_{x+1}^2 |x - 1| \geq 5;$$

$$4(\log_{x+1}(1 - x) + \log_{x+1}(x + 1) - \log_{x+1}^2 |x - 1|) \geq 5.$$

Учитывая ОДЗ, получим $|x - 1| = 1 - x$.

$$\log_{x+1}(1 - x) + 1 - \log_{x+1}^2(1 - x) \geq \frac{5}{4};$$

$$\log_{x+1}^2(1 - x) - \log_{x+1}(1 - x) + \frac{1}{4} \leq 0.$$

Пусть $\log_{x+1}(1 - x) = t$, тогда последнее неравенство примет вид

$$t^2 - t + \frac{1}{4} \leq 0; \quad 4t^2 - 4t + 1 \leq 0; \quad (2t - 1)^2 \leq 0; \quad t = \frac{1}{2}.$$

Вернёмся к исходной переменной: $\log_{x+1}(1 - x) = \frac{1}{2}$; $1 - x = \sqrt{x + 1}$;

$$1 - 2x + x^2 = x + 1; \quad x^2 - 3x = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3.$$

Ни одно из полученных решений не принадлежит ОДЗ, значит, исходное неравенство не имеет решений.

Ответ: нет решений.

1329. ОДЗ: $\begin{cases} 4 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < x < 2, \\ x \neq -1. \end{cases}$

$$2\log_{x+2}(4 - x^2) - \frac{1}{4} \cdot 4\log_{x+2}^2 |x - 2| \geq 3;$$

$$2\log_{x+2}(2 - x) + 2\log_{x+2}(x + 2) - \log_{x+2}^2 |x - 2| \geq 3.$$

Учитывая ОДЗ, получим $|x - 2| = 2 - x$.

$$2\log_{x+2}(2 - x) + 2 - \log_{x+2}^2(2 - x) \geq 3;$$

$$\log_{x+2}^2(2 - x) - 2\log_{x+2}(2 - x) + 1 \leq 0.$$

Пусть $\log_{x+2}(2 - x) = t$, тогда последнее неравенство примет вид

$$t^2 - 2t + 1 \leq 0; \quad (t - 1)^2 \leq 0, \quad t = 1.$$

Вернёмся к исходным переменным: $\log_{x+2}(2-x) = 1$; $x+2 = 2-x$; $x = 0$.

$x = 0$ удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 0.

$$1330. 5 \log_{11}(x^2 - x - 6) \leq 6 + \log_{11} \frac{(x-3)^5}{x+2}.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ \frac{(x-3)^5}{x+2} > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-3)(x+2) > 0, \\ \frac{(x-3)^5}{x+2} > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x < -2, \\ x > 3. \end{cases}$$

Решим неравенство на ОДЗ.

$$5 \log_{11}((x-3)(x+2)) - \log_{11} \frac{(x-3)^5}{x+2} \leq 6,$$

$$\log_{11} \frac{(x-3)^5(x+2)^5(x+2)}{(x-3)^5} \leq 6,$$

$$\log_{11}(x+2)^6 \leq 6,$$

$$6 \log_{11}|x+2| \leq 6,$$

$$\log_{11}|x+2| \leq 1,$$

$$|x+2| \leq 11,$$

$$-11 \leq x+2 \leq 11,$$

$$-13 \leq x \leq 9.$$

Учитывая ОДЗ, имеем $-13 \leq x < -2$, $3 < x \leq 9$ (см. рис. 339).

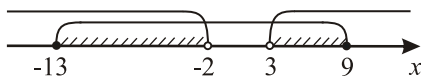


Рис. 339.

Ответ: $[-13; -2) \cup (3; 9]$.

$$1331. 7 \log_9(x^2 + 3x - 10) \leq 8 + \log_9 \frac{(x-2)^7}{x+5}.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 + 3x - 10 > 0, \\ \frac{(x-2)^7}{x+5} > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2)(x+5) > 0, \\ \frac{(x-2)^7}{x+5} > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x < -5, \\ x > 2. \end{cases}$$

Решим неравенство на ОДЗ.

$$7 \log_9(x+5)(x-2) - \log_9 \frac{(x-2)^7}{x+5} \leq 8,$$

$$\log_9 \frac{(x+5)^7(x-2)^7(x+5)}{(x-2)^7} \leq 8,$$

$$\begin{aligned}
 \log_9(x+5)^8 &\leq 8, \\
 8 \log_9|x+5| &\leq 8, \\
 \log_9|x+5| &\leq 1, \\
 |x+5| &\leq 9, \\
 -9 &\leq x+5 \leq 9, \\
 -14 &\leq x \leq 4.
 \end{aligned}$$

Учитывая ОДЗ, имеем $-14 \leq x < -5$, $2 < x \leq 4$ (см. рис. 340).

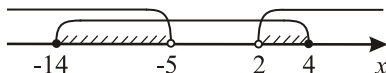


Рис. 340.

Ответ: $[-14; -5) \cup (2; 4]$.

1332. ОДЗ:
$$\begin{cases} x^2 - 5x > 0, \\ x^2 \neq 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (5; +\infty).$$

$$\frac{\log_2(x^2 - 5x)}{\log_2 x^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(x^2 - 5x) - \log_2 x^2}{\log_2 x^2} \leq 0.$$

Возможны два случая.

$$\begin{aligned}
 1) & \begin{cases} \log_2(x^2 - 5x) - \log_2 x^2 \leq 0, \\ \log_2 x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x \leq x^2, \\ x^2 > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 0, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x > 1; \end{cases} \Leftrightarrow x > 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x > 5$.

$$\begin{aligned}
 2) & \begin{cases} \log_2(x^2 - 5x) - \log_2 x^2 \geq 0, \\ \log_2 x^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x \geq x^2, \\ x^2 < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x \leq 0, \\ \begin{cases} x > -1, \\ x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 0]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in (-1; 0)$.

Следовательно, решением исходного неравенства являются значения $x \in (-1; 0) \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $(-1; 0) \cup (5; +\infty)$.

1333. ОДЗ:
$$\begin{cases} x^2 \neq 1, \\ (x-5)^2 \neq 1, \\ x^2 \neq 0, \\ (x-5)^2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq 6, \\ x \neq 4, \\ x \neq 0, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Преобразуем исходное неравенство к виду

$$\log_{x^2}(x-5)^2 + \frac{1}{\log_{x^2}(x-5)^2} \leq 2.$$

Пусть $t = \log_{x^2}(x-5)^2$, $t \neq 0$, тогда $t^2 + \frac{1}{t} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2t + 1 \leq 0, \\ t > 0, \\ t^2 - 2t + 1 \geq 0, \\ t < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t < 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходной переменной, на ОДЗ получаем

$$\begin{cases} \log_{x^2}(x-5)^2 = 1, \\ \log_{x^2}(x-5)^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 = x^2, \\ \begin{cases} (x-5)^2 < 1, \\ x^2 > 1, \\ (x-5)^2 > 1, \\ x^2 < 1; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{2}, \\ 4 < x < 6, \\ -1 < x < 1. \end{cases}$$

Так как $x \neq 0$ и $x \neq 5$, то $x \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup \{2, 5\} \cup (4; 5) \cup (5; 6)$.

Ответ: $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup \{2, 5\} \cup (4; 5) \cup (5; 6)$

$$1334. \log_{\frac{1}{5}} \left(7^{1+\log_{35} x} - \frac{1}{5^{1+\log_{35} x}} \right) \geq \log_{35} x - 1.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 7^{1+\log_{35} x} - \frac{1}{5^{1+\log_{35} x}} > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{35^{1+\log_{35} x} - 1}{5^{1+\log_{35} x}} > 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $5^{1+\log_{35} x} > 0$ при $x > 0$, последняя система равносильна системе $\begin{cases} 35x - 1 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{35}$.

Решим исходное неравенство на ОДЗ.

$$\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{35x-1}{5^{1+\log_{35} x}} \right) \geq \log_{35} x - 1; \frac{35x-1}{5^{1+\log_{35} x}} \leq \left(\frac{1}{5} \right)^{\log_{35} x - 1}. \text{ Умножив обе части неравенства на } 5^{1+\log_{35} x}, \text{ получим } 35x - 1 \leq 5^2; 35x - 1 \leq 25; 35x \leq 26; x \leq \frac{26}{35}.$$

$$\text{Учитывая ОДЗ, имеем } \frac{1}{35} < x \leq \frac{26}{35}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{35}; \frac{26}{35} \right].$$

$$1335. \log_{\frac{1}{2}} \left(3^{1+\log_6 x} - \frac{1}{2^{1+\log_6 x}} \right) \geq 1 + \log_6 x.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3^{1+\log_6 x} - \frac{1}{2^{1+\log_6 x}} > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6^{1+\log_6 x} - 1}{2^{1+\log_6 x}} > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{6 \cdot 6^{\log_6 x} - 1}{2^{1+\log_6 x}} > 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $2^{1+\log_6 x} > 0$ при $x > 0$, последняя система равносильна системе $\begin{cases} 6x - 1 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{6}$.

Решим исходное неравенство на ОДЗ.

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{6x-1}{2^{1+\log_6 x}} \right) \geq 1 + \log_6 x; \quad \frac{6x-1}{2^{1+\log_6 x}} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{1+\log_6 x}. \text{ Умножив обе ча-}$$

сти неравенства на $2^{1+\log_6 x}$, получим $6x - 1 \leq 2^{1+\log_6 x} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{1+\log_6 x};$

$$6x - 1 \leq 2^0; 6x - 1 \leq 1; 6x \leq 2; x \leq \frac{1}{3}.$$

Учитывая ОДЗ, имеем $\frac{1}{6} < x \leq \frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right]$.

$$1336. \begin{cases} 3^{2(x-2)} - 4 \cdot 3^{x-2} + 3 \geq 0, \\ \log_{16} 2^x < 1. \end{cases} \text{ Сделаем замену } t = 3^{x-2}.$$

$$\begin{cases} t^2 - 4t + 3 \geq 0, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 3, \\ t \leq 1, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 1, \\ x - 2 \leq 0, \\ x < 4. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; 2] \cup [3; 4).$$

Ответ: $(-\infty; 2] \cup [3; 4)$.

$$1337. \begin{cases} 2^{2(3-x)} + 3 \cdot 2^{3-x} - 4 \leq 0, \\ \log_{81} 3^x < 0. \end{cases}$$

Сделаем замену $t = 2^{3-x}, t > 0$.

$$\begin{cases} t^2 + 3t - 4 \leq 0, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq t \leq 1, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x < 4. \end{cases} \Rightarrow x \in [3; 4).$$

Ответ: $[3; 4)$.

$$1338. \log_{(x-4)}^3(x+4) - \frac{4}{9} \log_{(x-4)}^2(x+4)^3 + 5 \log_{(x-4)}(x^2 - 16) > 7. \text{ ОДЗ}$$

данного неравенства определяется системой $\begin{cases} x+4 > 0, \\ x^2 - 16 > 0, \\ x-4 \neq 1, \\ x-4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in (4; 5) \cup (5; +\infty).$$

Учитывая ОДЗ, преобразуем неравенство:

$$\log_{(x-4)}^3(x+4) - 4\log_{(x-4)}^2(x+4) + 5\log_{(x-4)}(x+4) + 5 > 7.$$

Производя замену $t = \log_{(x-4)}(x+4)$, получаем $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 > 0$;
 $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-1)(t^2 - 3t + 2) = (t-1)^2(t-2) > 0 \Leftrightarrow t > 2$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем

$$\log_{(x-4)}(x+4) > 2 \Leftrightarrow \log_{(x-4)}(x+4) > \log_{(x-4)}(x-4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 1, \\ x+4 > (x-4)^2; \\ 0 < x-4, \\ x-4 < 1, \\ x+4 < (x-4)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x^2 - 9x + 12 < 0; \\ 4 < x, \\ x < 5, \\ x^2 - 9x + 12 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ \left(x - \frac{9 - \sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{9 + \sqrt{33}}{2}\right) < 0; \\ 4 < x, \\ x < 5, \\ \left(x - \frac{9 - \sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{9 + \sqrt{33}}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

Решением первой системы неравенств из совокупности является множество $\left(5; \frac{9 + \sqrt{33}}{2}\right)$ (см. рис. 341).

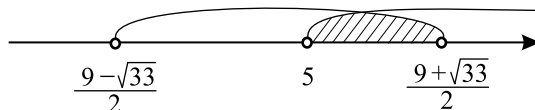


Рис. 341.

Решением второй системы является пустое множество (см. рис. 342).

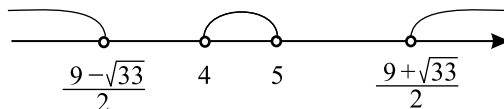


Рис. 342.

Таким образом, получаем, что $x \in \left(5; \frac{9 + \sqrt{33}}{2}\right)$.

Ответ: $\left(5, \frac{9 + \sqrt{33}}{2}\right)$.

$$1339. \frac{1}{27} \log_{(x+2)}^3(x-2)^3 - \frac{1}{5} \log_{(x+2)}^2(x-2)^5 + 8 \log_{(x+2)}(x^2-4) < 12.$$

ОДЗ данного неравенства определяется системой $\begin{cases} x-2 > 0, \\ x^2-4 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ x+2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (2; +\infty)$.

Учитывая ОДЗ, преобразуем неравенство:

$$\log_{(x+2)}^3(x-2) - 5 \log_{(x+2)}^2(x-2) + 8 \log_{(x+2)}(x-2) + 8 < 12.$$

Производя замену $t = \log_{(x+2)}(x-2)$, получаем $t^3 - 5t^2 + 8t - 4 < 0$;
 $t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = (t-1)(t^2 - 4t + 4) = (t-1)(t-2)^2 < 0 \Leftrightarrow t < 1$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем $\log_{(x+2)}(x-2) < 1$.
 Так как на ОДЗ $x+2 > 1$, это неравенство равносильно неравенству

$x-2 < x+2$, которое выполняется при любых значениях x , следовательно,
 $x \in (2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

1340. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_{x+2}(x-2) + 1}{\log_{x+2}^2(x-2) + 1} \cdot (\log_{x+2}(x-2) + \log_{x-2}(x+2)) \geq \log_{(x+2)(x-2)}(x+2)^2.$$

ОДЗ неравенства определяется системой $\begin{cases} x+2 \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \\ x-2 \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \\ x^2-4 \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \end{cases}$

решением которой является $x \in (2; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; 3) \cup (3; +\infty)$. На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_{x+2}(x-2) + 1}{\log_{x+2}^2(x-2) + 1} \cdot \left(\log_{x+2}(x-2) + \frac{1}{\log_{x+2}(x-2)} \right) \geq \frac{2}{\log_{x+2}(x+2)(x-2)}.$$

Сделав замену $\log_{x+2}(x-2) = t$, получаем неравенство

$$\frac{t+1}{t^2+1} \cdot \left(t + \frac{1}{t} \right) \geq \frac{2}{t+1}; \quad \frac{t+1}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{t} \geq \frac{2}{t+1}; \quad \frac{(t+1)^2 - 2t}{t(t+1)} \geq 0;$$

$$\frac{t^2+1}{t(t+1)} \geq 0. \text{ Решением неравенства является } t \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$$

Возвращаемся к исходной переменной: $\begin{cases} \log_{x+2}(x-2) < -1, \\ \log_{x+2}(x-2) > 0. \end{cases}$ Так как на ОДЗ выполняется $x+2 > 1$, то совокупность можно переписать в виде

$$\begin{cases} x-2 < \frac{1}{x+2}, \\ x-2 > 1. \end{cases} \quad \text{Так как на ОДЗ выполняется } x+2 > 0, \text{ то равно-}$$

сильной будет совокупность $\begin{cases} x^2 - 4 < 1, \\ x > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}, \\ x > 3. \end{cases}$ Учиты-
вая ОДЗ, получаем окончательное решение $x \in (2; \sqrt{5}) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(2; \sqrt{5}) \cup (3; +\infty)$.

1341. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_{x+3}(x-3)+2}{\log_{x+3}^2(x-3)+2} \cdot (\log_{x+3}(x-3)+2\log_{x-3}(x+3)) \geq \frac{3}{2} \log_{(x+3)(x-3)}(x+3)^2.$$

ОДЗ неравенства определяется системой $\begin{cases} x+3 \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \\ x-3 \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \\ x^2-9 \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \end{cases}$

решением которой является $x \in (3; \sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}; 4) \cup (4; +\infty)$. На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_{x+3}(x-3)+2}{\log_{x+3}^2(x-3)+2} \cdot \left(\log_{x+3}(x-3) + \frac{2}{\log_{x+3}(x-3)} \right) \geq \frac{3}{\log_{x+3}(x+3)(x-3)}.$$

Сделав замену $\log_{x+3}(x-3) = t$, получаем неравенство

$$\frac{t+2}{t^2+2} \cdot \left(t + \frac{2}{t} \right) \geq \frac{3}{t+1}; \quad \frac{t+2}{t^2+2} \cdot \frac{t^2+2}{t} \geq \frac{3}{t+1}; \quad \frac{(t+1)(t+2)-3t}{t(t+1)} \geq 0;$$

$$\frac{t^2+2}{t(t+1)} \geq 0. \quad \text{Решением неравенства является } t \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$$

Возвращаемся к исходной переменной: $\begin{cases} \log_{x+3}(x-3) < -1, \\ \log_{x+3}(x-3) > 0. \end{cases}$ Так как на

ОДЗ выполняется $x+3 > 1$, то совокупность можно переписать в виде

$$\begin{cases} x-3 < \frac{1}{x+3}, \\ x-3 > 1. \end{cases} \quad \text{Так как на ОДЗ выполняется } x+3 > 0, \text{ то равносиль-}$$

ной будет совокупность $\begin{cases} x^2 - 9 < 1, \\ x > 4; \end{cases} \quad \begin{cases} -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}, \\ x > 4. \end{cases}$ Учитывая

ОДЗ, получаем окончательное решение $x \in (3; \sqrt{10}) \cup (4; +\infty)$.

Ответ: $(3; \sqrt{10}) \cup (4; +\infty)$

1342. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x-1)(x-3)}{3 \cdot 5^{2x} + 5 \cdot 3^x - 5^{2x} \cdot 3^x - 5 \cdot 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{5^{2x}(3-3^x) - 5(3-3^x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{(5^{2x}-5)(3-3^x)} \geq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов. Нули числителя дроби:

$x_1 = 1$ и $x_2 = 3$; нули знаменателя находим из уравнений $5^{2x_3} = 5$ и $3^{x_4} = 3$: $x_3 = \frac{1}{2}$ и $x_4 = 1$. Расставим знаки на соответствующих интервалах (см. рис. 343).

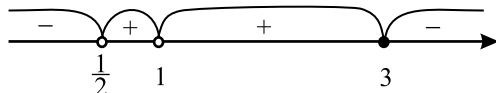


Рис. 343.

Таким образом, $x \in (0,5; 1) \cup (1; 3]$.

Ответ: $(0,5; 1) \cup (1; 3]$.

1343. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{2^x \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x - 2^{-1} \cdot 3^x + 2^{-1} \cdot 3}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2^x(3^x-3) - 2^{-1}(3^x-3)}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2^x-2^{-1})(3^x-3)}{(x+1)(x+2)} \leq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов. Нули числителя дроби находим из уравнений $2^{x_1} = 2^{-1}$ и $3^{x_2} = 3$: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$; нули знаменателя: $x_3 = -1$ и $x_4 = -2$. Расставим знаки на соответствующих интервалах (см. рис. 344).



Рис. 344.

Таким образом, $x \in (-2; -1) \cup (-1; 1]$.

Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 1]$.

1344. Преобразуем исходное неравенство:

$$3^{2x}(3^{x^2} - 3^4) - 2^x(3^{x^2} - 3^4) \geq 0, \\ (3^{2x} - 2^x)(3^{x^2} - 3^4) \geq 0,$$

$$(9^x - 2^x)(3^{x^2} - 3^4) \geq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов, для этого найдём нули левой части.

$$9^x - 2^x = 0 \Rightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0.$$

$$3^{x^2} = 3^4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Теперь найдём решение исходного неравенства (см. рис. 345).

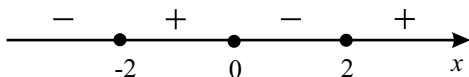


Рис. 345.

В результате $x \in [-2; 0] \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $x \in [-2; 0] \cup [2; +\infty)$.

1345. Преобразуем неравенство к виду

$$7^{x^2-2x+1} \cdot 7^{2x} - 7^{2x+1} - 5^x \cdot 7^{x^2-2x+1} + 7 \cdot 5^x \leq 0;$$

$$7^{2x}(7^{(x-1)^2} - 7) - 5^x(7^{(x-1)^2} - 7) \leq 0;$$

$$(7^{2x} - 5^x)(7^{(x-1)^2} - 7) \leq 0.$$

Решим уравнение $(7^{2x} - 5^x)(7^{(x-1)^2} - 7) = 0$.

Найдём нули левой части:

$$1) 7^{2x} - 5^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{49}{5}\right)^x = 1, \text{ откуда } x = 0.$$

$$2) 7^{(x-1)^2} = 7^1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ или } x = 0.$$

Решим исходное неравенство методом интервалов (см. рис. 346).

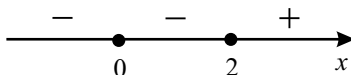


Рис. 346.

Получим в результате, что $x \in (-\infty; 2]$.

Ответ: $(-\infty; 2]$.

$$1346. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x-1 > 0, \\ x+1 > 0, \\ \frac{x+1}{x-1} > 0, \Leftrightarrow x > 1. \\ \frac{x+1}{x-1} \neq 1; \end{cases}$$

$$\log_2 \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{\log_2 \frac{x+1}{x-1}} > 0, t = \log_2 \frac{x-1}{x+1},$$

$$t - \frac{1}{t} > 0, \frac{(t-1)(t+1)}{t} > 0 \text{ (см. рис. 347).}$$

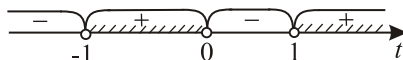


Рис. 347.

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} t > -1, \\ t < 0, \\ t > 1; \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \log_2 \frac{x-1}{x+1} > -1, \\ \log_2 \frac{x-1}{x+1} < 0, \\ \log_2 \frac{x-1}{x+1} > 1; \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{x+1} > \frac{1}{2}, \\ \frac{x-1}{x+1} < 1, \\ \frac{x-1}{x+1} > 2; \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-3}{x+1} > 0, \\ \frac{-2}{x+1} < 0, \\ \frac{-x-3}{x+1} > 0; \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

(см. рис. 348) (см. рис. 349)

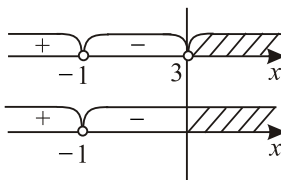


Рис. 348.

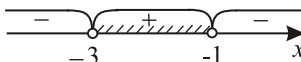


Рис. 349.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3, \\ -3 < x < -1. \end{array} \right]$$

С учётом ОДЗ: $x > 3$.

Ответ: $(3; +\infty)$.

$$1347. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x - 3 > 0, \\ x + 3 > 0, \\ \frac{x-3}{x+3} > 0, \Leftrightarrow x > 3. \\ \frac{x-3}{x+3} \neq 1, \end{cases}$$

$$\log_{0,5} \frac{x-3}{x+3} + \log_{\frac{x-3}{x+3}} 2 > 0,$$

$$-\log_2 \frac{x-3}{x+3} + \frac{1}{\log_2 \frac{x-3}{x+3}} > 0,$$

$$\log_2 \frac{x-3}{x+3} = t,$$

$$-t + \frac{1}{t} > 0, t - \frac{1}{t} < 0, \frac{(t-1)(t+1)}{t} < 0 \text{ (см. рис. 350),}$$

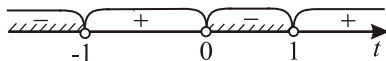


Рис. 350.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} t < -1, \\ 0 < t < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{x-3}{x+3} < -1, \\ 0 < \log_2 \frac{x-3}{x+3} < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x+3} < \frac{1}{2}, \\ 1 < \frac{x-3}{x+3} < 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-9}{x+3} < 0, \\ \begin{cases} \frac{-6}{x+3} > 0, \\ \frac{-x-9}{x+3} < 0. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Решим полученную совокупность методом интервалов (см. рис. 351, 352).

$$\text{Откуда получим } \begin{cases} -3 < x < 9, \\ x < -9. \end{cases}$$

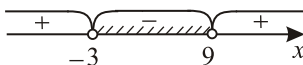


Рис. 351.

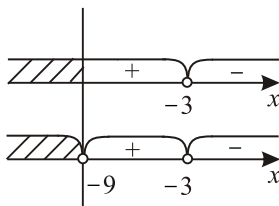


Рис. 352.

С учётом ОДЗ: $3 < x < 9$.

Ответ: $(3; 9)$.

$$1348. \frac{1}{4}x^{2+\log_2 x} - 2\log_2^2 x - 4\log_2 x + 4 \leq 0.$$

ОДЗ: $x > 0$.

Перепишем неравенство в виде

$$2^{-2} \cdot (2^{\log_2^2 x})^{2+\log_2 x} - 2(\log_2^2 x + 2\log_2 x - 2) \leq 0;$$

$$2^{\log_2^2 x + 2\log_2 x - 2} - 2(\log_2^2 x + 2\log_2 x - 2) \leq 0.$$

Сделаем замену $t = \log_2^2 x + 2\log_2 x - 2$. Тогда $2^t - 2t \leq 0$. Рассмотрим функцию $f(t) = 2^t - 2t$. Она определена при всех t и $f'(t) = 2^t \ln 2 - 2$;

$$f'(t_0) = 0 \text{ при } t_0 = \log_2 \frac{2}{\ln 2}. f'(t) < 0 \text{ при } t < t_0 \text{ и } f'(t) > 0 \text{ при } t > t_0.$$

Так как $f(1) = f(2) = 0$, то в силу убывания $f(t)$ при $t < t_0$ и возрастания $f(t)$ при $t > t_0$ получаем решение неравенства $2^t - 2t \leq 0$ — это отрезок $t \in [1; 2]$ (см. рис. 353). Отсюда $1 \leq \log_2^2 x + 2\log_2 x - 2 \leq 2$. Сделаем

$$\text{замену } \log_2 x = s. \text{ Тогда } 1 \leq s^2 + 2s - 2 \leq 2; \begin{cases} s^2 + 2s - 3 \geq 0, \\ s^2 + 2s - 4 \leq 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty), \\ s \in [-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}]; \end{cases} \Leftrightarrow s \in [-1 - \sqrt{5}; -3] \cup [1; -1 + \sqrt{5}];$$

$$\log_2 x \in [-1 - \sqrt{5}; -3] \cup [1; -1 + \sqrt{5}]; x \in \left[2^{-\sqrt{5}-1}; \frac{1}{8}\right] \cup [2; 2^{\sqrt{5}-1}].$$

$$\text{Ответ: } \left[2^{-\sqrt{5}-1}; \frac{1}{8}\right] \cup [2; 2^{\sqrt{5}-1}].$$

$$1349. \frac{1}{81}x^{3+\log_3 x} - 2\log_3^2 x - 6\log_3 x + 7 \leq 0.$$

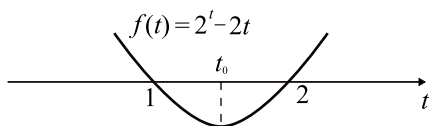


Рис. 353.

ОДЗ: $x > 0$.

Перепишем неравенство в виде

$$3^{-4} \cdot (3^{\log_3 x})^{3+\log_3 x} - 2(\log_3^2 x + 3 \log_3 x - 4) - 1 \leq 0;$$

$$3^{\log_3^2 x + 3 \log_3 x - 4} - 2(\log_3^2 x + 3 \log_3 x - 4) - 1 \leq 0.$$

Сделаем замену $t = \log_3^2 x + 3 \log_3 x - 4$. $3^t - 2t - 1 \leq 0$. Рассмотрим функцию $f(t) = 3^t - 2t - 1$. Она определена при всех t и $f'(t) = 3^t \ln 3 - 2$;

$$f'(t_0) = 0 \text{ при } t_0 = \log_3 \frac{2}{\ln 3}; f'(t) < 0 \text{ при } t < t_0 \text{ и } f'(t) > 0 \text{ при } t > t_0.$$

Так как $f(0) = f(1) = 0$, то в силу убывания $f(t)$ при $t < t_0$ и возрастания $f(t)$ при $t > t_0$ получаем решение неравенства $3^t - 2t - 1 \leq 0$ — это отрезок $t \in [0; 1]$ (см. рис. 354). Отсюда $0 \leq \log_3^2 x + 3 \log_3 x - 4 \leq 1$.

Сделаем замену $\log_3 x = s$. Тогда $0 \leq s^2 + 3s - 4 \leq 1$; $\begin{cases} s^2 + 3s - 4 \geq 0, \\ s^2 + 3s - 5 \leq 0; \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty), \\ s \in \left[\frac{-3 - \sqrt{29}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} \right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s \in \left[\frac{-3 - \sqrt{29}}{2}; -4 \right] \cup \left[1; \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} \right]. \text{ Так как } x = 3^s, \text{ то}$$

$$x \in \left[3^{\frac{-3 - \sqrt{29}}{2}}; \frac{1}{81} \right] \cup \left[3; 3^{\frac{-3 + \sqrt{29}}{2}} \right].$$

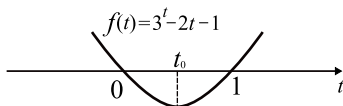


Рис. 354.

Ответ: $\left[3^{\frac{-3 - \sqrt{29}}{2}}; \frac{1}{81} \right] \cup \left[3; 3^{\frac{-3 + \sqrt{29}}{2}} \right]$.

1350. Так как при любых значениях $x \neq 0$ справедливо $2 \cdot 2^{x^2} - 1 > 0$ и $3^{2x^2} - 1 > 0$, то исходное неравенство равносильно следующему:

$$\log_5(3^{4x^2} - 2 \cdot 3^{2x^2} + 4) - \frac{1}{3^{2x^2} - 1} > \log_5(2^{2(x^2+1)} - 2 \cdot 2^{x^2+1} + 4) - \frac{1}{2^{x^2+1} - 1},$$

$$\log_5((3^{2x^2} - 1)^2 + 3) - \frac{1}{3^{2x^2} - 1} > \log_5((2^{x^2+1} - 1)^2 + 3) - \frac{1}{2^{x^2+1} - 1}.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \log_5((t-1)^2 + 3) - \frac{1}{t-1}$.

Так как $f(t)$ возрастает при $t > 1$, то для любых $t_1 > 1$, $t_2 > 1$, $f(t_1) > f(t_2)$ тогда и только тогда, когда $t_1 > t_2$.

Имеем $f(3^{2x^2}) > f(2^{x^2+1})$, $3^{2x^2} > 3^0 = 1$, $2^{x^2+1} > 2^1 = 2$, тогда $3^{2x^2} > 2^{x^2+1}$, $9^{x^2} > 2 \cdot 2^{x^2}$, $4,5^{x^2} > 2$, $x^2 > \log_{4,5} 2$, откуда $x \in (-\infty; -\sqrt{\log_{4,5} 2}) \cup (\sqrt{\log_{4,5} 2}; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt{\log_{4,5} 2}) \cup (\sqrt{\log_{4,5} 2}; +\infty)$.

1351. Исходное неравенство равносильно следующему:

$$\log_{0,5}((2^{|x|+1} - 2)^2 + 1) + \frac{1}{2^{|x|+1} - 1} > \log_{0,5}((2^{\sqrt{x}+3} - 2)^2 + 1) + \frac{1}{2^{\sqrt{x}+3} - 1}.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \log_{0,5}((t-2)^2 + 1) + \frac{1}{t-1}$.

При $t \geq 2$ функция $f(t)$ убывает как сумма двух убывающих функций, значит, для любых $t_1 \geq 2$, $t_2 \geq 2$ имеем $f(t_1) > f(t_2)$ равносильно $t_1 < t_2$.

Имеем:

$$f(2^{|x|+1}) > f(2^{\sqrt{x}+3});$$

$$2^{|x|+1} \geq 2^1 = 2, 2^{\sqrt{x}+3} \geq 2^3 = 8, \text{ тогда}$$

$$2^{|x|+1} < 2^{\sqrt{x}+3}; |x| - \sqrt{x} - 2 < 0, (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) < 0, \sqrt{x} < 2; x \in [0; 4).$$

Ответ: $x \in [0; 4)$.

$$\begin{aligned} \text{1352. ОДЗ: } \begin{cases} (x+2)(x+4) > 0, \\ x+4 > 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0, \\ x+4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x > -4; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x > -2. \end{aligned}$$

Решим исходное неравенство на ОДЗ.

$$-\log_3((x+2)(x+4)) + \log_3(x+4) > -\log_3 13,$$

$$\log_3 \frac{x+4}{(x+2)(x+4)} > \log_3 \frac{1}{13}, \frac{x+4}{(x+2)(x+4)} > \frac{1}{13}, \frac{1}{x+2} > \frac{1}{13},$$

$$13 > x+2, x < 11.$$

Учитывая ОДЗ, получаем окончательное решение $x \in (-2; 11)$

Ответ: $(-2; 11)$.

$$\text{1353. ОДЗ: } \begin{cases} x-5 \neq 0, \\ 15-3x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x < 5.$$

1) Решим первое неравенство системы.

$$\log_3^2(x-5)^2 - 4\log_3(15-3x) \leq 4; \quad 4\log_3^2|x-5| - 4\log_3(3(5-x)) \leq 4;$$

$$4\log_3^2(5-x) - 4\log_3(5-x) - 8 \leq 0. \quad \text{Пусть } t = \log_3(5-x). \text{ Тогда}$$

$$4t^2 - 4t - 8 \leq 0; \quad t^2 - t - 2 \leq 0; \quad -1 \leq t \leq 2; \quad -1 \leq \log_3(5-x) \leq 2;$$

$$\frac{1}{3} \leq 5-x \leq 9; \quad -4 \leq x \leq \frac{14}{3}.$$

2) Решим второе неравенство системы: $4^x - 2^{x+4} \leq 6 \cdot 2^x + 75$;
 $2^{2x} - 16 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^x - 75 \leq 0$; $(2^x)^2 - 22 \cdot 2^x - 75 \leq 0$. Пусть $t = 2^x$, $t > 0$.
 Тогда $t^2 - 22t - 75 \leq 0$; $-3 \leq t \leq 25$; $0 < 2^x \leq 25$; $x \leq \log_2 25$.

3) Сравним числа $\frac{14}{3}$ и $\log_2 25$, записав цепочку равносильных преобразований, $\frac{14}{3} > \log_2 25$; $\frac{7}{3} > \log_2 5$; $7 > \log_2 125$; $2^7 > 125$; $128 > 125$.
 Неравенство $\log_2 25 > -4$ очевидно.

Итак, решением системы неравенств является отрезок $[-4; \log_2 25]$.

Ответ: $[-4; \log_2 25]$.

$$1354. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 8 - x^2 > 0, \\ 10 - x > 0, \\ (x - 10)^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 8, \\ x < 10; \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{8} < x < \sqrt{8}.$$

1) Решим первое неравенство системы: $4^x - 2^{x+1} \leq 2^x + 10$;
 $2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 2^x - 10 \leq 0$; $(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 10 \leq 0$. Пусть $t = 2^x$, $t > 0$.
 Тогда $t^2 - 3t - 10 \leq 0$; $-2 \leq t \leq 5$; $0 < 2^x \leq 5$; $x \leq \log_2 5$.

2) Решим второе неравенство системы:
 $\log_2(8 - x^2) + \log_2(x^2 - 20x + 100) \geq 2\log_2(10 - x)$.
 $\log_2(8 - x^2) + \log_2(x - 10)^2 - \log_2(10 - x)^2 \geq 0$;
 $\log_2(8 - x^2) \geq 0$; $8 - x^2 \geq 1$; $x^2 \leq 7$. Учитывая ОДЗ, получим решение этого неравенства $-\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}$.

3) Докажем, что $\sqrt{7} > \log_2 5$. Это неравенство равносильно неравенству $2^{\sqrt{7}} > 5$, которое верно ввиду $2^{\sqrt{7}} > 2^{2.5} = 4\sqrt{2} > 5$.

Итак, решением системы неравенств является отрезок $[-\sqrt{7}; \log_2 5]$.

Ответ: $[-\sqrt{7}; \log_2 5]$.

$$1355. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Запишем неравенство в виде $\frac{1}{1 + \log_3 x} + \frac{3}{\log_3 x} \geq \frac{11}{6}$.

Пусть $t = \log_3 x$. Тогда получаем неравенство $\frac{1}{1+t} + \frac{3}{t} \geq \frac{11}{6}$;

$$\frac{24t+18}{t(t+1)} \geq 11; \quad \frac{11t^2-13t-18}{t(t+1)} \leq 0; \quad \frac{(11t+9)(t-2)}{t(t+1)} \leq 0.$$

Отсюда $t \in \left(-1; -\frac{9}{11}\right] \cup (0; 2]$.

Вернёмся к исходной переменной.

$$1) -1 < \log_3 x \leq -\frac{9}{11}, \quad \log_3 3^{-1} < \log_3 x \leq \log_3 3^{-\frac{9}{11}}, \quad 3^{-1} < x \leq 3^{-\frac{9}{11}},$$

$$\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{\sqrt[11]{3^9}}.$$

$$2) 0 < \log_3 x \leq 2, \quad \log_3 1 < \log_3 x \leq \log_3 9, \quad 1 < x \leq 9.$$

$$\text{Отсюда } x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt[11]{3^9}}\right] \cup (1; 9].$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt[11]{3^9}}\right] \cup (1; 9].$$

1356. Перепишем исходное неравенство в виде

$$\log_{5-2x}((5-2x)(2x+1)) + \log_{2x+1}((5-2x)^2) \leq 4.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 5-2x > 0, \\ 5-2x \neq 1, \\ 2x+1 > 0, \\ 2x+1 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2,5, \\ x \neq 2, \\ x > -0,5, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad x \in (-0,5; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 2,5).$$

На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$1 + \log_{5-2x}(2x+1) + 2\log_{2x+1}(5-2x) \leq 4;$$

$$\log_{5-2x}(2x+1) + \frac{2}{\log_{5-2x}(2x+1)} \leq 3.$$

$$\text{Обозначим } \log_{5-2x}(2x+1) = t, \text{ тогда } t + \frac{2}{t} \leq 3; \quad \frac{t^2 - 3t + 2}{t} \leq 0;$$

$$\frac{(t-1)(t-2)}{t} \leq 0; \quad t \in (-\infty; 0) \cup [1; 2].$$

Возвращаясь к переменной x , получаем $\log_{5-2x}(2x+1) \in (-\infty; 0) \cup [1; 2]$.

$$\begin{cases} \log_{5-2x}(2x+1) < 0, \\ 1 \leq \log_{5-2x}(2x+1) \leq 2. \end{cases}$$

1) Если $x \in (-0,5; 0) \cup (0; 2)$, то $5 - 2x > 1$ и совокупность равносильна

$$\left[\begin{array}{l} 2x + 1 < 1, \\ \left\{ \begin{array}{l} 5 - 2x \leq 2x + 1, \\ 2x + 1 \leq (5 - 2x)^2; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1, \\ 2x^2 - 11x + 12 \geq 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Решением квадратного неравенства является $x \in (-\infty; 1,5] \cup [4; +\infty)$, решением системы неравенств является $x \in [1; 1,5] \cup [4; +\infty)$, решением совокупности будет $x \in (-\infty; 0) \cup [1; 1,5] \cup [4; +\infty)$. Учитывая $x \in (-0,5; 0) \cup (0; 2)$, получаем решение $x \in (-0,5; 0) \cup [1; 1,5]$.

2) Если $x \in (2; 2,5)$, то $5 - 2x < 1$, $2x + 1 > 1$, поэтому $\log_{5-2x}(2x + 1) < 0$. Следовательно, $x \in (2; 2,5)$ является решением, так как при этих значениях x выполняется $\log_{5-2x}(2x + 1) \in (-\infty; 0) \cup [1; 2]$. Объединяя найденные в пунктах 1 и 2 решения, окончательно получаем $x \in (-0,5; 0) \cup [1; 1,5] \cup (2; 2,5)$.

Ответ: $(-0,5; 0) \cup [1; 1,5] \cup (2; 2,5)$.

$$1357. \begin{cases} 9^x \geq \sqrt{3} \cdot 3^x + 18, \\ \log_2(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) \leq 1 + \log_2(x - 1); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3^x)^2 - \sqrt{3} \cdot 3^x - 18 \geq 0, \\ \log_2((x - 1)(x^2 - 6x + 8)) \leq 1 + \log_2(x - 1); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3^x + 2\sqrt{3})(3^x - 3\sqrt{3}) \geq 0, \\ \log_2((x - 1)(x^2 - 6x + 8)) \leq \log_2(2(x - 1)); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 3\sqrt{3}, \\ \log_2((x - 1)(x^2 - 6x + 8)) \leq \log_2(2(x - 1)); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1,5, \\ \log_2(x^2 - 6x + 8) \leq \log_2 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1,5, \\ x^2 - 6x + 8 > 0, \\ x^2 - 6x + 8 - 2 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1,5, \\ (x - 2)(x - 4) > 0, \\ (x - (3 + \sqrt{3}))(x - (3 - \sqrt{3})) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [1,5; 2) \cup (4; 3 + \sqrt{3}] \text{ (см. рис. 355).}$$

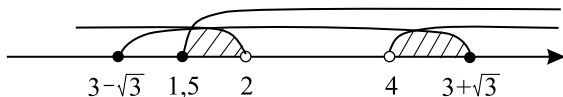


Рис. 355.

Ответ: $[1; 5; 2) \cup (4; 3 + \sqrt{3}]$.

$$1358. \begin{cases} 12^x \cdot 4^x + \frac{1}{12} > 4^{2x-1} + 3^{x-1}, & \Leftrightarrow \\ \log_{1-x}(x^2 - 5x + 4) \geq 2; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 4^{2x} - 3^{x-1} > 4^{2x-1} - \frac{1}{12}, \\ 1-x > 0, \\ 1-x \neq 1, \\ x^2 - 5x + 4 > 0, \\ (1-x-1)((x^2 - 5x + 4) - (1-x)^2) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \left(4^{2x} - \frac{1}{3}\right) > \frac{1}{4} \left(4^{2x} - \frac{1}{3}\right), \\ x < 1, \\ x \neq 0, \\ (x-1)(x-4) > 0, \\ x(x-1) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(3^x - \frac{1}{4}\right) \left(4^{2x} - \frac{1}{3}\right) > 0, \\ x < 0; \end{cases}$$

$\log_3 4 > 1$, $\log_4 3 < 1 \Rightarrow x \in (-\infty; -\log_3 4) \cup \left(-\frac{1}{2} \log_4 3; 0\right)$ (см. рис. 356).

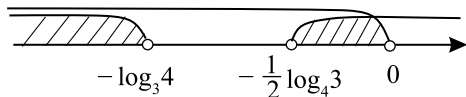


Рис. 356.

Ответ: $(-\infty; -\log_3 4) \cup \left(-\frac{1}{2} \log_4 3; 0\right)$.

1359. Решим каждое неравенство системы по отдельности. Первое неравенство системы: $9^x \leq 3^{x+2} - 20$; $(3^x)^2 - 9 \cdot 3^x + 20 \leq 0$; $(3^x - 4)(3^x - 5) \leq 0$; $4 \leq 3^x \leq 5$; $\log_3 4 \leq x \leq \log_3 5$.

Второе неравенство системы: $3 \cdot 2^{1+x\sqrt{2}} \geq 4^{x\sqrt{2}} + 8$;
 $(2^{x\sqrt{2}})^2 - 6 \cdot 2^{x\sqrt{2}} + 8 \leq 0$; $(2^{x\sqrt{2}} - 2)(2^{x\sqrt{2}} - 4) \leq 0$; $2 \leq 2^{x\sqrt{2}} \leq 4$;

$$1 \leq x\sqrt{2} \leq 2; \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Для нахождения пересечения найденных по отдельности решений неравенств необходимо выяснить, в каком порядке на координатной прямой располагаются числа $\log_3 4$, $\log_3 5$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}$. Так как $\log_3 4 > 1$, а $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, то $\frac{\sqrt{2}}{2} < \log_3 4$. Докажем, что $\log_3 4 < \sqrt{2} < \log_3 5$.

Неравенство $\log_3 4 < \sqrt{2}$ равносильно неравенству $4 < 3^{\sqrt{2}}$. Докажем его, используя неравенства $\sqrt{2} > 1,4$ (следует из $1,4^2 = 1,96 < 2$) и $\sqrt[3]{3} > 1,4$ (следует из $1,4^3 = 2,744 < 3$). Имеем $3^{\sqrt{2}} > 3^{1,4} > 3^{1\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{3} > 3 \cdot 1,4 > 4$.

Теперь докажем второе неравенство: $\log_3 5 > \sqrt{2} \Leftrightarrow 5 > 3^{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 5^{\sqrt{2}} > 9 \Leftrightarrow 5^{5\sqrt{2}} > 9^5$. Имеем $5^{5\sqrt{2}} > 5^{5 \cdot 1,4} = 5^7 > 9^5$. Последнее следует из того, что $5^7 = 625 \cdot 125 = 78\,125$, а $9^5 = 729 \cdot 81 = 59\,049$.

Доказано, что $\frac{\sqrt{2}}{2} < \log_3 4 < \sqrt{2} < \log_3 5$, поэтому пересечением найденных по отдельности решений неравенств исходной системы является $[\log_3 4; \sqrt{2}]$.

Ответ: $[\log_3 4; \sqrt{2}]$.

1360. Решим каждое неравенство системы по отдельности. Первое неравенство системы: $4^{x-0,5} + 15 < 11 \cdot 2^{x-1}$; $(2^x)^2 - 11 \cdot 2^x + 30 < 0$; $(2^x - 5)(2^x - 6) < 0$; $5 < 2^x < 6$; $\log_2 5 < x < \log_2 6$.

Второе неравенство системы: $5^{\frac{x\sqrt{6}}{3}} + 125 < 30 \cdot 5^{\frac{x\sqrt{6}}{6}}$. Сделаем замену $t = 5^{\frac{x\sqrt{6}}{6}}$. Тогда $t^2 - 30t + 125 < 0$; $(t - 5)(t - 25) < 0$; $5 < t < 25$. Делаем обратную замену: $5 < 5^{\frac{x\sqrt{6}}{6}} < 25$; $1 < \frac{x\sqrt{6}}{6} < 2$; $\sqrt{6} < x < 2\sqrt{6}$.

Для нахождения пересечения найденных по отдельности решений неравенств необходимо выяснить, в каком порядке на координатной прямой располагаются числа $\log_2 5$, $\log_2 6$, $\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$. Так как $\log_2 6 < 3$, а $2\sqrt{6} > 3$, то $\log_2 6 < 2\sqrt{6}$. Докажем, что $\log_2 5 < \sqrt{6} < \log_2 6$.

Докажем первое неравенство, используя неравенство $\sqrt{6} > 2,4$ (следует из $2,4^2 = 5,76 < 6$). Выполним преобразования: $\log_2 5 < \sqrt{6} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{6}} > 5 \Leftrightarrow 2^{5\sqrt{6}} > 5^5$. Имеем $2^{5\sqrt{6}} > 2^{5 \cdot 2,4} = 2^{12} = 4096 > 5^5$, так

как $5^5 = 3125$.

Неравенство $\sqrt{6} < \log_2 6$ равносильно неравенству $2^{\sqrt{6}} < 6$. Докажем его, используя неравенства $\sqrt{6} < 2,5$ (следует из $2,5^2 = 6,25 > 6$) и $\sqrt{2} < 1,5$ (следует из $1,5^2 = 2,25 > 2$). Имеем $2^{\sqrt{6}} < 2^{2,5} = 4\sqrt{2} < 4 \cdot 1,5 = 6$.

Доказано, что $\log_2 5 < \sqrt{6} < \log_2 6 < 2\sqrt{6}$, поэтому пересечением найденных по отдельности решений неравенств исходной системы является $(\sqrt{6}; \log_2 6)$.

Ответ: $(\sqrt{6}; \log_2 6)$.

$$1361. 3x(x-1) + 9 \geq \frac{8}{x+1} - \frac{5}{x-2};$$

$$\frac{3(x^2 - x + 3)(x^2 - x - 2) - 8(x-2) + 5(x+1)}{(x+1)(x-2)} \geq 0;$$

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x^2 - x^3 + x^2 + 2x + 3x^2 - 3x - 6 - x + 7}{(x+1)(x-2)} \geq 0;$$

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{(x-2)(x+1)} \geq 0;$$

$$\frac{x^2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1)}{(x-2)(x+1)} \geq 0;$$

$$\frac{(x^2 + 1)(x-1)^2}{(x-2)(x+1)} \geq 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов (см. рис. 357).

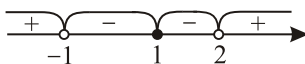


Рис. 357.

Решением неравенства является $(-\infty; -1) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$.

$$1362. x(x+1) + 4 < \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x-1};$$

$$\frac{(x^2 + x + 4)(x^2 + x - 2) - 2(x-1) + 4(x+2)}{(x+2)(x-1)} < 0;$$

$$\frac{x^4 + x^3 - 2x^2 + x^3 + x^2 - 2x + 4x^2 + 4x - 8 - 2x + 2 + 4x + 8}{(x+2)(x-1)} < 0;$$

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{(x-1)(x+2)} < 0;$$

$$\frac{x^2(x^2 + 2x + 1) + 2(x^2 + 2x + 1)}{(x-1)(x+2)} < 0;$$

$$\frac{(x^2 + 2)(x+1)^2}{(x-1)(x+2)} < 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов (см. рис. 358).

Решением неравенства является $(-2; -1) \cup (-1; 1)$.

Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 1)$.

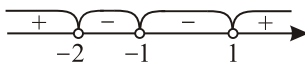


Рис. 358.

$$1363. \frac{\sqrt{x^2 + 0,5x} + 2x}{x} + \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x} \leq 0;$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 0,5x} + 2x + |x-1|}{x} \leq 0;$$

$$\text{ОДЗ. } \begin{cases} x \leq -0,5, \\ x > 0. \end{cases}$$

$$1) x \geq 1; \frac{\sqrt{x^2 + 0,5x} + 3x - 1}{x} \leq 0.$$

$\sqrt{x^2 + 0,5x} \geq 0$, $3x - 1 \geq 0$ при $x \geq 1$, значит вся дробь больше нуля и при $x \geq 1$ неравенство решений не имеет.

$$2) x < 1; \frac{\sqrt{x^2 + 0,5x} + x + 1}{x} \leq 0.$$

При $0 < x < 1$ аналогично неравенство решений не имеет.

При $-1 \leq x \leq -0,5$ числитель больше нуля, знаменатель меньше нуля, значит $-1 \leq x \leq -0,5$ — решение.

При $x < -1$: $\sqrt{x^2 + 0,5x} + x + 1 > 0$. Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + 0,5x > 0, \\ -x - 1 \geq 0, \\ x^2 + 0,5x > (-x - 1)^2; \\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty), \\ x \leq -1, \\ x < -\frac{2}{3}; \end{cases}$$

отсюда следует, что при $x < -1$ числитель исходной дроби больше 0, знаменатель меньше 0, значит вся дробь меньше 0 и $x < -1$ — решение. Объединив решения $-1 \leq x \leq -0,5$ и $x < -1$, получим $x \leq -0,5$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

$$1364. \frac{\sqrt{x^2 + 3x} + 3x}{2x} + \frac{\sqrt{(2x - 1)^2}}{2x} \leq 0;$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 3x} + 3x + |2x - 1|}{2x} \leq 0;$$

$$\text{ОДЗ. } \begin{cases} x \leq -3, \\ x > 0. \end{cases}$$

1) При $x > 0$ неравенство решений не имеет, так как и числитель, и знаменатель дроби больше нуля.

2) При $x \leq -3$ знаменатель дроби меньше нуля, значит, чтобы решения существовали, числитель должен быть неотрицательным:

$$\sqrt{x^2 + 3x} + 3x + 1 - 2x \geq 0;$$

$$\sqrt{x^2 + 3x} \geq -x - 1;$$

$$x^2 + 3x \geq x^2 + 2x + 1;$$

$x \geq 1$ — не удовлетворяет условию $x \leq -3$, значит, и при $x \leq -3$ неравенство решений не имеет.

Ответ: решений нет.

$$1365. \text{ ОДЗ. } \frac{x^3 + 8}{x} \geq 0; \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x} \geq 0; \begin{cases} x \leq -2, \\ x > 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{x^3 + 8}{x}} - x \geq 2; \begin{cases} \frac{x^3 + 8}{x} \geq (x + 2)^2, \\ x + 2 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x} \geq (x + 2)^2, \\ x \leq -2. \end{cases}$$

Решаем первое неравенство совокупности:

$$\frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x + 2)^2}{x} \geq 0;$$

$$\frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4 - x(x + 2))}{x} \geq 0; \frac{(x + 2)(-4x + 4)}{x} \geq 0;$$

$$\frac{(x + 2)(x - 1)}{x} \leq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получим

$x \in (-\infty; -2] \cup (0; 1]$ (см. рис. 359). Найденные значения x удовлетворяют ОДЗ.

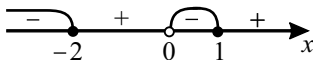


Рис. 359.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (0; 1]$.

1366. ОДЗ. $(x-1)^2 + \frac{8}{x-1} \geq 0$; $\frac{(x-1)^3 + 8}{x-1} \geq 0$;

$$\frac{(x-1+2)\left((x-1)^2 - 2(x-1) + 4\right)}{x-1} \geq 0; \frac{(x+1)(x^2 - 4x + 7)}{x-1} \geq 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения $x^2 - 4x + 7$ меньше нуля, поэтому для любых значений x выполняется $x^2 - 4x + 7 > 0$. Тогда $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$.

$$\begin{cases} x > 1, \\ x \leq -1, \end{cases} \quad \sqrt{(x-1)^2 + \frac{8}{x-1}} \leq x+1;$$

$$\begin{cases} \frac{(x+1)(x^2 - 4x + 7)}{x-1} \leq (x+1)^2, \\ x+1 \geq 0. \end{cases}$$

Так как $x = -1$ удовлетворяет последней системе, то осталось решить неравенство $\frac{x^2 - 4x + 7}{x-1} \leq x+1$ при $x > -1$.

$$\frac{x^2 - 4x + 7 - (x^2 - 1)}{x-1} \leq 0;$$

$$\frac{-4x + 8}{x-1} \leq 0;$$

$$\frac{x-2}{x-1} \geq 0. \text{ Так как } x > -1, \text{ то } x \in (-1; 1) \cup [2; +\infty).$$

С учётом ОДЗ получаем: $x \in \{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.

1367. $\begin{cases} \frac{1}{|(x-1)(x-2)|} + \frac{1}{|(x-2)(x-3)|} + \frac{1}{|(x-3)(x-4)|} \geq 0,3, \\ |2x-5| \geq 3. \end{cases}$

ОДЗ: $x \neq 1$; $x \neq 2$; $x \neq 3$; $x \neq 4$.

Решим второе неравенство системы.

$$|2x - 5| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 \geq 3, \\ 2x - 5 \leq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 8, \\ 2x \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. Будем решать первое неравенство системы в этой области. Замечаем, что здесь выражения $x - 1, x - 2, x - 3, x - 4$ имеют одинаковый знак, поэтому первое неравенство системы можно записать в виде:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} \geq 0,3;$$

$$\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) + \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) + \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}\right) \geq 0,3;$$

$$\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1} \geq 0,3. \text{ Так как } x-1 \text{ и } x-4 \text{ имеют одинаковый знак, то}$$

можно домножить обе части на $(x-1)(x-4) > 0$.

$$x - 1 - x + 4 \geq 0,3(x-1)(x-4);$$

$$0,3(x-1)(x-4) \leq 3;$$

$$(x-1)(x-4) \leq 10;$$

$$x^2 - 5x - 6 \leq 0;$$

$$(x+1)(x-6) \leq 0;$$

$$x \in [-1; 6].$$

Так как решали в области $x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$, то

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty), \\ x \in [-1; 6]. \end{cases}$$

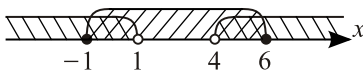


Рис. 360.

Ответ: $[-1; 1) \cup (4; 6]$.

$$1368. \begin{cases} \frac{1}{|(x-2)(x-3)|} + \frac{1}{|(x-3)(x-4)|} + \frac{1}{|(x-4)(x-5)|} \geq \frac{3}{40}, \\ |2x - 7| \geq 3. \end{cases}$$

ОДЗ: $x \neq 2; x \neq 3; x \neq 4; x \neq 5$.

Решим второе неравенство системы.

$$|2x - 7| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 \geq 3, \\ 2x - 7 \leq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 10, \\ 2x \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$. Будем решать первое неравенство системы в этой области. Замечаем, что здесь выражения $x - 2, x - 3, x - 4, x - 5$ имеют одинаковый знак, поэтому первое неравенство системы можно записать в виде:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} \geq \frac{3}{40};$$

$$\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) + \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}\right) + \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4}\right) \geq \frac{3}{40};$$

$$\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2} \geq \frac{3}{40}. \text{ Так как } x-5 \text{ и } x-2 \text{ имеют одинаковый знак, то}$$

можно домножить обе части на $(x-2)(x-5) > 0$.

$$x-2-x+5 \geq \frac{3}{40}(x-2)(x-5);$$

$$\frac{3}{40}(x-2)(x-5) \leq 3;$$

$$x^2 - 7x + 10 \leq 40;$$

$$x^2 - 7x - 30 \leq 0;$$

$$(x-10)(x+3) \leq 0;$$

$x \in [-3; 10]$. Так как решали в области $x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$, то

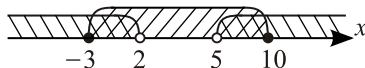
$$\begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty), \\ x \in [-3; 10]. \end{cases}$$


Рис. 361.

Ответ: $[-3; 2) \cup (5; 10]$.

1369. ОДЗ: $|x+2| - 2 \neq 0$, $|x+2| \neq 2$, отсюда $x \neq 0$ и $x \neq -4$.

$$\frac{4}{|x+2| - 2} \geq |x| \Leftrightarrow \frac{4 - |x| \cdot (|x+2| - 2)}{|x+2| - 2} \geq 0.$$

а) $x > 0$

$$\frac{4 - x \cdot x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{x} \leq 0.$$

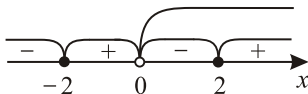


Рис. 362.

$$x \in (0; 2].$$

б) $-2 \leq x < 0$

$$\frac{4+x \cdot x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x} \geq 0. \text{ Нет решений при } -2 \leq x < 0.$$

в) $x < -2$

$$\frac{4+x(-x-4)}{-x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x-4}{x+4} \geq 0. x \in [-2-2\sqrt{2}; -4).$$

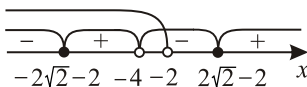


Рис. 363.

Ответ: $[-2-2\sqrt{2}; -4) \cup (0, 2]$.

1370. ОДЗ: $|x+2| - 1 \neq 0$, $|x+2| \neq 1$, отсюда $x \neq -1$ и $x \neq -3$.

$$\frac{3}{|x+2|-1} \geq |x+1| \Leftrightarrow \frac{3-|x+1| \cdot (|x+2|-1)}{|x+2|-1} \geq 0.$$

В зависимости от значений x раскрываем модули в соответствии с определением, откуда имеем три случая.

а) $x > -1$

$$\frac{3-(x+1)(x+1)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-2}{x+1} \leq 0.$$

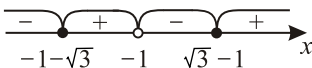


Рис. 364.

$$x \in (-1; \sqrt{3}-1] \text{ (см. рис. 364).}$$

б) $-2 \leq x < -1$

$$\frac{3+(x+1)(x+1)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2+3}{x+1} \geq 0. \text{ Нет решений при } -2 \leq x < -1.$$

в) $x < -2$

$$\frac{3+(x+1)(-x-3)}{-x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+4)}{x+3} \geq 0. x \in [-4; -3) \text{ (см. рис. 365).}$$

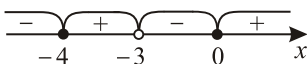


Рис. 365.

Ответ: $[-4; -3) \cup (-1; \sqrt{3} - 1]$.

1371. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{(\sin x - 2)\sqrt{16 - x^2}}{\log_2(x + 1) - 4} > 0, \\ \frac{\log_3^2(x + 2) - 2\log_3(x + 2)}{3\sqrt{x - 2} - x} \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ. } \begin{cases} 16 - x^2 \geq 0, \\ x + 1 > 0, \\ \log_2(x + 1) - 4 \neq 0, \\ x + 2 > 0, \\ x - 2 \geq 0, \\ 3\sqrt{x - 2} - x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4, \\ x > -1, \\ x \neq 15, \\ x > -2, \\ x \geq 2, \\ \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 6; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4.$$

Заметим, что первое неравенство системы строгое, значит $x \neq 4$, то есть $x \in [2; 4)$.

$$\begin{cases} \frac{(\sin x - 2)\sqrt{16 - x^2}}{\log_2(x + 1) - 4} > 0, \\ \frac{\log_3(x + 2)(\log_3(x + 2) - 2)}{3\sqrt{x - 2} - x} \leq 0, \\ 2 \leq x < 4. \end{cases}$$

Так как $|\sin x| \leq 1$, то $\sin x - 2 < 0$. При $2 \leq x < 4$ имеем: $\sqrt{16 - x^2} > 0$, $1 < \log_3(x + 2) < 2$, $-1 < \log_3(x + 2) - 2 < 0$. Тогда $(\sin x - 2) \cdot \sqrt{16 - x^2} < 0$, $\log_3(x + 2)(\log_3(x + 2) - 2) < 0$.

Исходная система равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} \log_2(x + 1) - 4 < 0, \\ 3\sqrt{x - 2} - x > 0, \\ 2 \leq x < 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 15, \\ 9(x - 2) > x^2, \\ 2 \leq x < 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 18 < 0, \\ 2 \leq x < 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)(x - 6) < 0, \\ 2 \leq x < 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 6, \\ 2 \leq x < 4; \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4.$$

Учитывая условие, что все найденные значения x удовлетворяют неравенству $2x^2 - 21x + 40 \leq 0$, имеем: $\begin{cases} 2(x - 2,5)(x - 8) \leq 0, \\ 3 < x < 4; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2,5 \leq x \leq 8, \\ 3 < x < 4; \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4.$$

Ответ: (3; 4).

1372. 1. $\frac{\log_3(3^x - 1)}{x - 1} \geq 1,$

$$\frac{\log_3(3^x - 1) - x + 1}{x - 1} \geq 0,$$

$$\left[\begin{cases} \begin{cases} 3^x - 1 > 0, \\ \log_3(3^x - 1) - x + 1 \geq 0, \\ x - 1 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x - 1 > 0, \\ \log_3(3^x - 1) - x + 1 \leq 0, \\ x - 1 < 0; \end{cases} \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \begin{cases} 3^x - 1 \geq 3^{x-1}, \\ x > 1, \\ 3^x - 1 \leq 3^{x-1}, \\ x > 0, \\ x < 1; \end{cases} \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{cases} \begin{cases} 3^x \geq \frac{3}{2}, \\ x > 1, \\ 3^x < \frac{3}{2}, \\ x > 0, \\ x < 1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 0 < x < \log_3 \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$2. 27^{2x} - 3 \cdot 9^{\frac{3x^2+2}{x}} + 1 \geq 1,$$

$$3^{6x} - 3 \cdot 3^{6x + \frac{4}{x}} \geq 0,$$

$$3^{6x} (1 - 3^{1 + \frac{4}{x}}) \geq 0,$$

$$1 - 3^{1 + \frac{4}{x}} \geq 0,$$

$$3^{1 + \frac{4}{x}} \leq 3^0,$$

$$1 + \frac{4}{x} \leq 0,$$

$$\frac{x+4}{x} \leq 0, -4 \leq x < 0.$$

3. Для ответа на вопрос задачи объединим полученные решения:

$$[-4; 0) \cup \left(0; \log_3 \frac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty).$$

Ответ: $[-4; 0) \cup \left(0; \log_3 \frac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty).$

$$1373. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 1, \\ x > 0, \\ |x+1| - |x-13| \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ |x+1| - |x-13| \neq 0. \end{cases}$$

$3^{\log \frac{1}{3} \frac{x}{4}} = 3^{-\log_3 \frac{x}{4}} = 3^{\log_3 \frac{4}{x}} = \frac{4}{x}$; $|x+1| = x+1$ при $x \geq 1$, тогда исходное неравенство примет вид:

$$\frac{2^{\sqrt{x-1}} - \frac{4}{x}}{x+1 - |x-13|} \geq 0.$$

1) Рассмотрим неравенство $2^{\sqrt{x-1}} - \frac{4}{x} \geq 0$. Функция $f(x) = 2^{\sqrt{x-1}} - \frac{4}{x}$ возрастает при $x \geq 1$ и $f(2) = 0$, следовательно $2^{\sqrt{x-1}} - \frac{4}{x} \geq 0$ при $x \geq 2$

и $2^{\sqrt{x-1}} - \frac{4}{x} \leq 0$ при $1 \leq x \leq 2$.

2) Решим неравенство $x+1 - |x-13| > 0$:

$$\left[\begin{cases} x+1 - (x-13) > 0, \\ x-13 \geq 0, \\ x+1 + (x-13) > 0, \\ x-13 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 \cdot x > -14, \\ x \geq 13, \\ x > 6, \\ x < 13; \end{cases} \quad x \in (6; +\infty). \right.$$

Решением исходного неравенства являются те значения x , при которых выражения $2^{\sqrt{x-1}} - \frac{4}{x}$ и $x+1 - |x-13|$ имеют одинаковые знаки. Получаем $x \in [1; 2] \cup (6; +\infty)$.

Ответ: $[1; 2] \cup (6; +\infty)$.

$$1374. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 3, \\ x > 0, \\ |x+2| - |2x-23| \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ |x+2| - |2x-23| \neq 0. \end{cases}$$

$5^{\log_{25} x} = 5^{\frac{1}{2} \log_5 x} = 5^{\log_5 \sqrt{x}} = \sqrt{x}$; $|x+2| = x+2$ при $x \geq 3$, тогда исходное неравенство примет вид:

$$\frac{\sqrt{x} - 2^{\sqrt{x-3}}}{x+2 - |2x-23|} \leq 0.$$

1) Рассмотрим неравенство $\sqrt{x} - 2^{\sqrt{x-3}} \geq 0$. Функция $f(x) = \sqrt{x} - 2^{\sqrt{x-3}}$ возрастает при $x \geq 3$ и $f(4) = 0$, следовательно, $\sqrt{x} - 2^{\sqrt{x-3}} \geq 0$ при $3 \leq x \leq 4$ и $\sqrt{x} - 2^{\sqrt{x-3}} \leq 0$ при $x \geq 4$.

2) Решим неравенство $x+2 - |2x-23| > 0$:

$$\left[\begin{cases} x + 2 - (2x - 23) > 0, \\ 2x - 23 \geq 0, \\ x + 2 + (2x - 23) > 0, \\ 2x - 23 < 0; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} 11,5 \leq x < 25, \\ 7 < x < 11,5; \end{cases} \quad x \in (7; 25).$$

Решением исходного неравенства являются те значения x , при которых выражения $\sqrt{x} - 2\sqrt{x-3}$ и $x + 2 - |2x - 23| > 0$ имеют разные знаки. Получаем $x \in [3; 4] \cup (7; 25)$.

Ответ: $[3; 4] \cup (7; 25)$.

$$1375. \left\{ \begin{aligned} & \frac{|3x + 175|(x - 22)(5 - x)}{\sqrt[4]{17x - x^2 - 42}} \geq 0, \\ & \frac{\sqrt{11 - x} \cdot \sqrt[6]{(11 - x)^3}}{|11 - x|} \geq 0. \end{aligned} \right.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 17x - x^2 - 42 > 0, \\ 11 - x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 17x + 42 < 0, \\ x < 11; \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 11.$$

Решим систему на ОДЗ.

$$|3x + 175| = 3x + 175, |11 - x| = 11 - x.$$

Заметим, что второе неравенство выполняется при всех значениях x из промежутка $(3; 11)$.

Учитывая, что $\sqrt[4]{17x - x^2 - 42} > 0$, система равносильна системе неравенств:

$$\begin{cases} (3x + 175)(x - 22)(5 - x) \geq 0, \\ x > 3, \\ x < 11; \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x < 11.$$

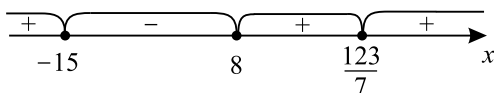
Ответ: $[5; 11)$.

$$1376. \left\{ \begin{aligned} & \frac{|7x - 123|(x + 15)(x - 8)}{-\sqrt[4]{x^2 + 3x - 28}} \geq 0, \\ & \frac{\sqrt{x + 9} \sqrt[6]{(x + 9)^3}}{|x + 9|} \geq 0. \end{aligned} \right.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 + 3x - 28 > 0, \\ x + 9 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -7, \\ x > 4, \end{cases} \\ x > -9; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-9; -7) \cup (4; +\infty).$$

Заметим, что второе неравенство выполняется при всех значениях x , принадлежащих ОДЗ. Учитывая, что $-\sqrt[4]{x^2 + 3x - 28} < 0$, первое неравенство исходной системы равносильно на ОДЗ неравенству

$|7x - 123|(x + 15)(x - 8) \leq 0$. Из рисунка видно, что его решение есть множество $x \in [-15; 8] \cup \left\{ \frac{123}{7} \right\}$.



Учитывая ОДЗ, получим ответ $x \in (-9; -7) \cup (4; 8] \cup \left\{ \frac{123}{7} \right\}$.

Ответ: $(-9; -7) \cup (4; 8] \cup \left\{ 17\frac{4}{7} \right\}$.

1377. $\sqrt{x-2} \cdot \log_{|x-3|}(x^2 + x - 5) \leq 0$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ |x-3| \neq 0, \\ |x-3| \neq 1, \\ x^2 + x - 5 > 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 2, \\ x \neq 4, x \neq 2, x \neq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x < \frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \\ x > \frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \end{array} \right. \end{cases} \begin{cases} x \geq 2, \\ x \neq 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Так как $\sqrt{x-2} \geq 0$, то достаточно найти решения неравенства $\log_{|x-3|}(x^2 + x - 5) \leq 0$, которое равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-3| < 1, \\ x^2 + x - 5 \geq 1, \\ |x-3| > 1, \\ x^2 + x - 5 \leq 1; \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 < x < 4, \\ x \leq -3, \\ x \geq 2, \\ x > 4, \\ x < 2, \\ -3 \leq x \leq 2; \end{cases} \end{array} \right] \begin{cases} 2 < x < 4, \\ -3 \leq x < 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Учитывая ОДЗ, получим $x \in (2; 3) \cup (3; 4)$.

Ответ: $(2; 3) \cup (3; 4)$.

1378. $\frac{\log_{|x-2|}(3x+3-x^2)}{\sqrt{3x-x^2}} \leq 0$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x-x^2 > 0, \\ 3x+3-x^2 > 0, \\ |x-2| \neq 0, \\ |x-2| \neq 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x < 3, \\ \frac{3-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{21}}{2}, \\ x \neq 2, x \neq 3, x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 3, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Так как на ОДЗ $\sqrt{3x-x^2} > 0$, то достаточно найти решения неравенства $\log_{|x-2|}(3x+3-x^2) \leq 0$, которое равносильно совокупности:

$$\left[\begin{cases} |x-2| < 1, \\ 3x+3-x^2 \geq 1, \\ |x-2| > 1, \\ 3x+3-x^2 \leq 1; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} 1 < x < 3, \\ x^2-3x-2 \leq 0, \\ \begin{cases} x < 1, \\ x > 3, \end{cases} \\ x^2-3x-2 \geq 0; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} 1 < x < 3, \\ \begin{cases} x \leq \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \\ x \geq \frac{3+\sqrt{17}}{2}. \end{cases} \end{cases} \right]$$

Учитывая ОДЗ, получим $x \in (1; 2) \cup (2; 3)$.

Ответ: $(1; 2) \cup (2; 3)$.

1379. 1) Найдём ОДЗ:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 - 17x + 67 > 0, \\ \log_{11}(x^2 - 17x + 67) \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 17x + 67 \geq 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 17x + 66 \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x-11) \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x \geq 11, \\ x \leq 6, \end{bmatrix} \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x \in (0; 6] \cup [11; +\infty). \end{aligned}$$

При этом $x = 6$ и $x = 11$ входят в множество решений исходного неравенства.

2) При $x \in (0; 6) \cup (11; +\infty)$ множитель $\sqrt{\log_{11}(x^2 - 17x + 67)} > 0$, следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству

$$17^x(\log_{17} x - 1) - 17(\log_{17} x - 1) \leq 0,$$

$$(\log_{17} x - 1)(17^x - 17) \leq 0.$$

Решая методом интервалов, получим $1 \leq x \leq 17$.

С учётом ОДЗ $x \in [1; 6] \cup [11; 17]$.

Ответ: $[1; 6] \cup [11; 17]$.

$$1380. 1) \text{ Найдём ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 5x + 7 > 0, \\ \log_5(x^2 - 5x + 7) \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 7 \geq 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x \geq 3, \\ x \leq 2, \end{bmatrix} \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 2] \cup [3; +\infty). \text{ При этом } x = 2 \text{ и } x = 3 \text{ входят}$$

во множество решений исходного неравенства.

2) При $x \in (0; 2) \cup (3; +\infty)$ множитель $\sqrt{\log_5(x^2 - 5x + 7)} > 0$, следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству

$$9^x \log_9 x + 9 - 9 \log_9 x - 9^x \leq 0,$$

$$9^x(\log_9 x - 1) - 9(\log_9 x - 1) \leq 0,$$

$$(\log_9 x - 1)(9^x - 9) \leq 0.$$

Решая методом интервалов, получим: $1 \leq x \leq 9$.

С учётом ОДЗ, $x \in [1; 2] \cup [3; 9]$.

Ответ: $[1; 2] \cup [3; 9]$.

$$1381. \frac{\log_7(2x+15)}{\log_7(x+6)} \geq \frac{2 \log_{3^{x-2}} |x|}{\log_{3^{x-2}}(x+6)}.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x+15 > 0, \\ x+6 > 0, \\ x+6 \neq 1, \\ x \neq 0, \\ 3^{x-2} \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -7,5, \\ x > -6, \\ x \neq -5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-6; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty).$$

При допустимых значениях переменной по свойствам логарифма получаем $\frac{\log_7(2x+15)}{\log_7(x+6)} = \log_{x+6}(2x+15)$, $\frac{\log_{3^{x-2}} |x|}{\log_{3^{x-2}}(x+6)} = \log_{x+6} |x|$.

Исходное неравенство примет вид $\log_{x+6}(2x+15) \geq 2 \log_{x+6} |x|$, $\log_{x+6}(2x+15) \geq \log_{x+6} x^2$.

$$1) \begin{cases} 0 < x+6 < 1, \\ 2x+15 \leq x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x < -5, \\ x^2 - 2x - 15 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x < -5, \\ (x-5)(x+3) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x < -5, \\ \begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq 5; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -6 < x < -5.$$

$$2) \begin{cases} x+6 > 1, \\ 2x+15 \geq x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5, \\ x^2 - 2x - 15 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5, \\ (x-5)(x+3) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5, \\ -3 \leq x \leq 5; \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5.$$

Из 1) и 2) получаем $x \in (-6; -5) \cup [-3; 5]$.

С учётом ОДЗ $x \in (-6; -5) \cup [-3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 5]$.

Ответ: $(-6; -5) \cup [-3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 5]$.

$$1382. 9^{(x+5)^2(x-7)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-35)^3}} \leq 1.$$

$$\text{ОДЗ: } x^2 - 2x - 35 \geq 0, (x+5)(x-7) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5, \\ x \geq 7; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [7; +\infty).$$

При допустимых значениях переменной получаем

$$\frac{(9^{x^2-2x-35})^{x+5}}{(2^{x^2-2x-35})^{\sqrt{x^2-2x-35}}} \leq 1;$$

$$\frac{1}{(2^{x^2-2x-35})^{\sqrt{x^2-2x-35}} (9^{x^2-2x-35})^{-x-5}} \leq 1. \quad (1)$$

1) При $x \leq -5$ верно каждое из неравенств: $-x-5 \geq 0$,

$\sqrt{x^2-2x-35} \geq 0$, $2^{x^2-2x-35} \geq 1$, $9^{x^2-2x-35} \geq 1$, значит,

$(2^{x^2-2x-35})^{\sqrt{x^2-2x-35}} \cdot (9^{x^2-2x-35})^{-x-5} \geq 1$, следовательно, неравенство (1) выполняется для любого значения x из промежутка $(-\infty; -5]$.

2) Пусть $x \geq 7$. Заметим, что на заданном промежутке выполняется неравенство $x+5 > \sqrt{x^2-2x-35}$ (так как $x^2+10x+25 > x^2-2x-35$, $12x > -60$, $x > -5$).

Учитывая, что $9^{x^2-2x-35} \geq 2^{x^2-2x-35} \geq 1$, $x+5 > \sqrt{x^2-2x-35}$

и $x+5 > 0$, получаем $\frac{(9^{x^2-2x-35})^{x+5}}{(2^{x^2-2x-35})^{\sqrt{x^2-2x-35}}} \geq \frac{(9^{x^2-2x-35})^{x+5}}{(2^{x^2-2x-35})^{(x+5)}} \geq 1$.

Причём равенство 1 достигается только при $x = 7$. При всех $x > 7$ справедливо строгое неравенство. Значит, исходное неравенство на промежутке $[7; +\infty)$ выполняется только при $x = 7$.

Объединим решения 1) и 2), получим $x \in (-\infty; -5] \cup \{7\}$.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup \{7\}$.

1383. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 19^x \log_{19} x + 19 - 19 \log_{19} x - 19^x \leq 0, \\ \log_{13}(x^2 - 19x + 49) > 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_{19} x - 1)(19^x - 19) \leq 0, \\ (x - 3)(x - 16) > 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 19, \\ \begin{cases} x > 16, \\ x < 3, \end{cases} \\ x > 0. \end{cases}$$

Применяя метод интервалов, получаем решение $x \in [1; 3) \cup (16; 19]$ (см. рис. 366).



Рис. 366.

Ответ: $[1; 3) \cup (16; 19]$.

1384. $\frac{3^x + 7 \cdot 3^{2-x} - 16}{\sqrt{16^x - 121}} > 0$. Умножим обе части неравен-

ства на 3^x ($3^x > 0$), получим $\frac{(3^x)^2 - 16 \cdot 3^x + 7 \cdot 9}{\sqrt{16^x - 121}} > 0$,

$$\begin{cases} (3^x)^2 - 16 \cdot 3^x + 7 \cdot 9 > 0, \\ 16^x - 121 > 0; \\ (3^x - 7)(3^x - 9) > 0, & \begin{cases} x \in (-\infty; \log_3 7) \cup (2; +\infty), \\ 16^x > 121; & x > \log_4 11. \end{cases} \end{cases}$$

Докажем, что $\log_3 7 > \log_4 11$. Это неравенство равносильно неравенству $\log_3(7^4) > \log_4(11^4)$, то есть $\log_3 2401 > \log_4 14641$. Так как

$3^7 = 2187$, $4^7 = 16384$, то $\log_3 2401 > 7 > \log_4 14641$ и неравенство $\log_3 7 > \log_4 11$ доказано.

Решением системы являются $x \in (\log_4 11; \log_3 7) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(\log_4 11; \log_3 7) \cup (2; +\infty)$.

1385. $\frac{4^x - 7 - 2^{3+x} + 7 \cdot 2^{3-x}}{\sqrt{3^x - 4}} \leq 0$; $\frac{2^{2x} - 7 - 8 \cdot 2^x + 7 \cdot 8 \cdot 2^{-x}}{\sqrt{3^x - 4}} \leq 0$.

Умножим обе части неравенства на 2^x ($2^x > 0$), получим $\frac{2^{3x} - 8 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 7 \cdot 8}{\sqrt{3^x - 4}} \leq 0$; $\begin{cases} 2^{2x}(2^x - 8) - 7(2^x - 8) \leq 0, \\ 3^x - 4 > 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} (2^{2x} - 7)(2^x - 8) \leq 0, & \begin{cases} x \in [\log_4 7; 3], \\ 3^x > 4; & x > \log_3 4. \end{cases} \end{cases}$$

Докажем, что $\log_4 7 > \log_3 4$. Это неравенство равносильно неравенству $\log_4(7^3) > \log_3(4^3)$, то есть $\log_4 343 > \log_3 64$. Так как $4^4 = 256$, $3^4 = 81$, то $\log_4 343 > 4 > \log_3 64$ и неравенство $\log_4 7 > \log_3 4$ доказано.

Решением системы являются $x \in [\log_4 7; 3]$.

Ответ: $[\log_4 7; 3]$.

1386. Решим отдельно каждое из неравенств системы.

$$1) \frac{x^{\frac{1}{2} \log_2 x}}{4} \geq 2^{\frac{1}{4}(\log_2 x)^2}, \text{ ОДЗ: } x > 0.$$

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2.

$$\log_2 x \cdot \frac{1}{2} \log_2 x - 2 \geq \frac{1}{4}(\log_2 x)^2; \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)(\log_2 x)^2 \geq 2; (\log_2 x)^2 \geq 8;$$

$$\log_2 x \geq 2\sqrt{2} \text{ или } \log_2 x \leq -2\sqrt{2}; x \in (0; 2^{-2\sqrt{2}}] \cup [2^{2\sqrt{2}}; +\infty).$$

$$2) \frac{27x^2 + 6x - 1}{3x - 8} > 0, \text{ ОДЗ: } x \neq \frac{8}{3}.$$

$$27x^2 + 6x - 1 = 0; x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 27}}{27} = \frac{-3 \pm 6}{27}; x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{9};$$

$$\frac{\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{9}\right)}{\left(x - \frac{8}{3}\right)} > 0;$$

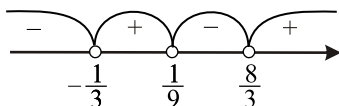


Рис. 367.

Из рисунка 367 видно, что $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$.

$$\begin{cases} x \in (0; 2^{-2\sqrt{2}}] \cup [2^{2\sqrt{2}}; +\infty), \\ x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right); \end{cases} \quad \text{откуда } x \in \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup [2^{2\sqrt{2}}; +\infty), \text{ так}$$

$$\text{как } 2^{-2\sqrt{2}} > 2^{-3} = \frac{1}{8} > \frac{1}{9}, 2^{2\sqrt{2}} > 2^2 = 4 > \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{9}\right) \cup [2^{2\sqrt{2}}; +\infty)$.

1387. Решим отдельно каждое из неравенств системы.

$$1) \frac{3x^2 - 2,6x + \frac{23}{150}}{x\sqrt{2} - \sqrt{3}} \geq 0, \text{ ОДЗ: } x \neq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$3x^2 - 2,6x + \frac{23}{150} = 0; x_{1,2} = \frac{1,3 \pm \sqrt{1,69 - 0,46}}{3} = \frac{1,3 \pm \sqrt{1,23}}{3};$$

$x_1 = \frac{1,3 - \sqrt{1,23}}{3}, x_2 = \frac{1,3 + \sqrt{1,23}}{3}$. Воспользуемся методом интервалов для решения первого неравенства системы.

Из рисунка 368 видно, что $x \in \left[\frac{1,3 - \sqrt{1,23}}{3}; \frac{1,3 + \sqrt{1,23}}{3}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$.

$$2) \text{ ОДЗ второго неравенства } x^2 > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

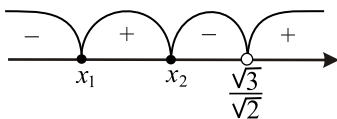


Рис. 368.

$$(x^2 - 1)^{2+x} > (x^2 - 1)^{5x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 1, \\ 2 + x > 5x - 3, \\ 0 < x^2 - 1 < 1, \\ 2 + x < 5x - 3. \end{cases}$$

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 1 > 1, \\ 2 + x > 5x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty), \\ x < \frac{5}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \text{ (см. рис. 369).}$$

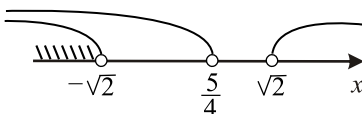


Рис. 369.

$$\text{б) } \begin{cases} 0 < x^2 - 1 < 1 \\ 2 + x < 5x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \\ x > \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{4}; \sqrt{2}\right)$$

(см. рис. 370).

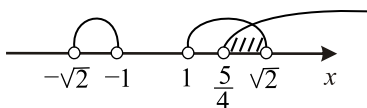


Рис. 370.

$$\text{Так как } \sqrt{2} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{16}} > \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4};$$

$$\frac{5}{4} = \sqrt{\frac{25}{16}} > \sqrt{\frac{24}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1 > \frac{1,3 + \sqrt{1,23}}{3} > \frac{1,3 - \sqrt{1,23}}{3} > 0,$$

окончательно имеем $x \in \left(\frac{5}{4}; \sqrt{2}\right)$ (см. рис. 371).

Ответ: $\left(\frac{5}{4}; \sqrt{2}\right)$.

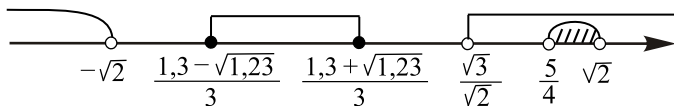


Рис. 371.

1388. 1) Неравенство $\operatorname{arctg} 4x > 1$ имеет смысл при всех $x \in R$. Перепишем это неравенство в виде $\operatorname{arctg} 4x > \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1)$. Так как $y = \operatorname{arctg} x$ — возрастающая функция, то $4x > \operatorname{tg} 1$ и $x > \frac{1}{4} \operatorname{tg} 1$.

2) Неравенство $\log_2(7^x + 5) + \log_{7^x+5} 8 \leq 4$ определено для любых $x \in R$, так как $7^x + 5 > 5 > 1$. Преобразуем это неравенство к виду $\log_2(7^x + 5) + 3 \log_{7^x+5} 2 \leq 4$, затем к виду $\log_2(7^x + 5) + \frac{3}{\log_2(7^x + 5)} - 4 \leq 0$.

Так как $7^x + 5 > 2$ при всех значениях x , то $\log_2(7^x + 5) > 0$, и неравенство равносильно $\log_2^2(7^x + 5) - 4 \log_2(7^x + 5) + 3 \leq 0$.

Выполним замену переменной. Пусть $t = \log_2(7^x + 5)$, тогда неравенство примет вид $t^2 - 4t + 3 \leq 0$, откуда $(t - 1)(t - 3) \leq 0$; $1 \leq t \leq 3$.

Возвращаясь к исходной переменной, получим $1 \leq \log_2(7^x + 5) \leq 3$, $2 \leq 7^x + 5 \leq 8$; $-3 \leq 7^x \leq 3$; но $7^x > 0$ для всех $x \in R$, поэтому следует только учесть, что $x \leq \log_7 3$.

3) Сравним числа $\log_7 3$ и $\frac{1}{4} \operatorname{tg} 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \operatorname{tg} 1 &< \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} \sqrt{3} < \frac{1}{4} \sqrt{3,24} = \frac{1}{4} \cdot 1,8 = 0,45 < \frac{1}{2} = \\ &= \log_7 \sqrt{7} < \log_7 \sqrt{9} = \log_7 3, \text{ следовательно, } \frac{1}{4} \operatorname{tg} 1 < \log_7 3. \end{aligned}$$

Решение системы неравенств: $\left(\frac{1}{4} \operatorname{tg} 1; \log_7 3\right]$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4} \operatorname{tg} 1; \log_7 3\right]$.

1389. 1) Неравенство $10 \operatorname{arcsctg} \frac{4\sqrt{5}x}{15} \geq 7$ имеет смысл при всех $x \in R$.

Перепишем это неравенство в виде $\operatorname{arcsctg} \frac{4\sqrt{5}x}{15} \geq \operatorname{arcsctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{7}{10}\right)$.

Так как $y = \operatorname{arcsctg} x$ — убывающая функция, то $\frac{4\sqrt{5}x}{15} \leq \operatorname{ctg} 0,7$;

$$x \leq \frac{3\sqrt{5}}{4} \operatorname{ctg} 0,7.$$

2) Неравенство $\log_3(5^x + 16) - 6 \log_{5^x+16} 3 > 1$ имеет смысл для любых $x \in R$, так как $5^x + 16 > 16 > 1$. Преобразуем это неравенство к виду $\log_3(5^x + 16) - \frac{6}{\log_3(5^x + 16)} - 1 > 0$. Так как $5^x + 16 > 1$ для всех x , то $\log_3(5^x + 16) > 0$ и рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $\log_3^2(5^x + 16) - \log_3(5^x + 16) - 6 > 0$.

Выполним замену переменной. Пусть $t = \log_3(5^x + 16)$, где $t > 0$, тогда неравенство примет вид $t^2 - t - 6 > 0$, $(t - 3)(t + 2) > 0$, $t > 3$ или $t < -2$. Учитывая, что $t > 0$, имеем $t > 3$.

Возвращаясь к исходной переменной, получим $\log_3(5^x + 16) > 3$, то есть $5^x + 16 > 27$, откуда $5^x > 11$, а значит, $x > \log_5 11$.

3) Сравним числа $\frac{3\sqrt{5}}{4} \operatorname{ctg} 0,7$ и $\log_5 11$. Так как $0,7 < \frac{\pi}{4}$, то $\frac{3\sqrt{5}}{4} \operatorname{ctg} 0,7 > \frac{3\sqrt{5}}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{4} > \frac{3\sqrt{4,84}}{4} > \frac{6,6}{4} > \frac{3}{2} = \log_5 5\sqrt{5} > \log_5(5 \cdot 2,2) = \log_5 11$, следовательно, $\frac{3\sqrt{5}}{4} \operatorname{ctg} 0,7 > \log_5 11$.

Решение системы неравенств: $\left(\log_5 11; \frac{3\sqrt{5}}{4} \operatorname{ctg} 0,7\right]$.

Ответ: $\left(\log_5 11; \frac{3\sqrt{5}}{4} \operatorname{ctg} 0,7\right]$.

1390. $k \log_3 x^2 + 3k \log_x 3 + \log_x 9 = 2k + 8$.

ОДЗ. $x > 0$, $x \neq 1$.

Преобразуем уравнение к виду

$$2k \log_3 x + 3k \frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 x} = 2k + 8.$$

1. Пусть $t = \log_3 x$, тогда $t \neq 0$,

$$2kt + \frac{3k}{t} + \frac{2}{t} - 2k - 8 = 0;$$

$$2kt^2 - (2k + 8)t + 3k + 2 = 0. (*)$$

$k \neq 0$, так как в противном случае уравнение линейно и имеет один корень.

2. Пусть x_1, x_2 — корни исходного уравнения и $x_2 = 3x_1$, тогда $\log_3 x_2 = \log_3 3x_1$, $\log_3 x_2 = 1 + \log_3 x_1$. Для $t = \log_3 x$ получаем $t_2 = 1 + t_1$.

Из уравнения (*) по теореме Виета

$$\begin{cases} t_2 \cdot t_1 = \frac{3k+2}{2k}, \\ t_2 + t_1 = \frac{2k+8}{2k}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1(1+t_1) = \frac{3k+2}{2k}, \\ t_1 + 1 + t_1 = \frac{2k+8}{2k}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t_1^2 + t_1 = \frac{3k+2}{2k}, \\ 2t_1 + 1 = \frac{2k+8}{2k}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем два случая.

$$1) t = -\frac{3}{2}, k = -\frac{4}{3}. \text{ Тогда } \log_3 x_1 = -\frac{3}{2}; x_1 = 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3^3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9};$$

$$x_2 = 3x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$2) t = 1; k = 2. \text{ Тогда } \log_3 x_1 = 1; x_1 = 3; x_2 = 3x_1 = 9.$$

Проверка. При подстановке значений $k = -\frac{4}{3}$ и $k = 2$ в уравнение (*)

в обоих случаях оно имеет два корня.

$$\text{Ответ: } k = -\frac{4}{3}, x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}; k = 2, x_1 = 3, x_2 = 9.$$

1391. ОДЗ. $x > 0, x \neq 1; p \geq \frac{1}{5}$.

Преобразуем исходное уравнение к виду

$$\sqrt{5p-1} \log_3 x + \frac{2p}{\log_3 x} - \frac{5}{\log_3 x} - 7 + 5p = 0.$$

$$\text{Пусть } t = \log_3 x. \text{ Тогда } \sqrt{5p-1}t + \frac{2p-5}{t} - 7 + 5p = 0;$$

$\sqrt{5p-1}t^2 - (7-5p)t + 2p-5 = 0$. (*) Это уравнение является квадратным и, следовательно, имеет не более двух корней, а значит и исходное уравнение имеет не более двух корней.

1. Пусть исходное уравнение не имеет корней. Тогда должно выполняться $5p^2 - 6p + 2 = 0$. $D = 36 - 40 < 0$, следовательно в этом случае нет значений p , удовлетворяющих условию.

2. Пусть исходное уравнение имеет один корень. Тогда

$$5p^2 - 6p + 2 = 1; 5p^2 - 6p + 1 = 0; p_1 = 1; p_2 = \frac{1}{5}.$$

При $p = 1$ уравнение (*) принимает вид $2t^2 - 2t - 3 = 0$;

$D = 4 + 24 = 28 > 0$, следовательно это уравнение, а значит, и исходное

имеет два различных корня. Пришли к противоречию.

При $p = \frac{1}{5}$ уравнение (*) принимает вид $-6t + \frac{2}{5} - 5 = 0$. Это уравнение, а значит и исходное, имеет один корень. Следовательно $p = \frac{1}{5}$ — удовлетворяет условию задачи.

3. Пусть исходное уравнение имеет два корня. Тогда $5p^2 - 6p + 2 = 2$; $p(5p - 6) = 0$; $p_1 = 0$; $p_2 = \frac{6}{5}$.

Значение $p = 0$ не удовлетворяет условию $p \geq \frac{1}{5}$.

При $p = \frac{6}{5}$ уравнение (*) принимает вид $\sqrt{5}t^2 - t + \frac{12}{5} - 5 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot \frac{13}{5} \sqrt{5} > 0$, следовательно это уравнение, а значит, и исходное имеет два различных корня. Таким образом, $p = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $\frac{1}{5}; 1\frac{1}{5}$.

1392. $\sin^2 x + 2m \sin^2 x = 5m + 4$; $(1 + 2m) \sin^2 x = 5m + 4$.

1) $1 + 2m = 0$, $m = -\frac{1}{2}$ — не является целым числом.

2) $1 + 2m \neq 0$, $m \neq -\frac{1}{2}$, $\sin^2 x = \frac{5m + 4}{2m + 1}$.

Так как $\sin^2 x \in [0; 1]$, то $0 \leq \frac{5m + 4}{2m + 1} \leq 1$, и для того, чтобы уравнение не имело решений, надо, чтобы $\frac{5m + 4}{2m + 1} > 1$ или $\frac{5m + 4}{2m + 1} < 0$.

а) $\frac{5m + 4}{2m + 1} > 1$, $\frac{5m + 4 - 2m - 1}{2m + 1} > 0$, $\frac{3m + 3}{2m + 1} > 0$, $\frac{m + 1}{2m + 1} > 0$, $m < -1$, $m > -\frac{1}{2}$.

б) $\frac{5m + 4}{2m + 1} < 0$, $-\frac{4}{5} < m < -\frac{1}{2}$ (см. рис. 372).

Объединим полученные решения:

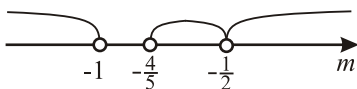


Рис. 372.

$m \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{4}{5}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Наибольшее целое отрицательное значение m равно -2 .

Ответ: -2 .

1393. Для того, чтобы графики функций $y = x^{10} - px^2 + 4x + p$ и $y = x^{10} - 4x^2 + px$, имели ровно две точки пересечения, необходимо, чтобы уравнение $x^{10} - px^2 + 4x + p = x^{10} - 4x^2 + px$, имело два корня. $x^{10} - px^2 + 4x + p - px + p = 0$; $(4 - p)x^2 + (4 - p)x + p = 0$.

Полученное уравнение имеет два корня если $\begin{cases} 4 - p \neq 0, \\ D > 0; \end{cases}$

$$D = (4 - p)^2 - 4(4 - p) \cdot p = 16 - 8p + p^2 - 16p + 4p^2 = 5p^2 - 24p + 16;$$

$$5p^2 - 24p + 16 > 0; 5p^2 - 24p + 16 = 0; p_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{5};$$

$$p_1 = \frac{12 + 8}{5} = 4, p_2 = \frac{12 - 8}{5} = \frac{4}{5} = 0,8;$$

$$5(p - 4)(p - 0,8) > 0; p < 0,8, p > 4 \text{ (см. рис.373)}.$$

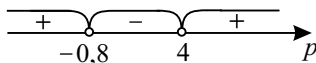


Рис. 373.

Ответ: $(-\infty; 0,8) \cup (4; +\infty)$.

1394. Найдём количество корней уравнения $\frac{3a + 8 - (a - 1)x}{x + 1} =$

$= a^2 + 2a + 3$ (1) и уравнения $(a - 3)x^2 - (a - 2)x - 1 = 0$ (2) при различных значениях a и выберем те, при которых это количество совпадает.

1. При $a = 3$ уравнения примут вид:

а) $\frac{17 - 2x}{x + 1} = 18, 20x = -1, x = -\frac{1}{20};$

б) $-x - 1 = 0, x = -1.$

Уравнение (1) и уравнение (2) имеют только по одному корню, что удовлетворяет условию задачи.

2. При $a \neq 3$. Рассмотрим каждое уравнение.

$$a) \frac{3a + 8 - (a - 1)x}{x + 1} = a^2 + 2a + 3.$$

ОДЗ. $x \neq -1$.

$$3a + 8 - (a - 1)x = (a^2 + 2a + 3)x + a^2 + 2a + 3,$$

$$x(a^2 + 3a + 2) = a + 5 - a^2.$$

Если $a^2 + 3a + 2 = 0$, то $a = -1$, $a = -2$ — уравнение корней не имеет.

$$\text{Если } a^2 + 3a + 2 \neq 0, \text{ то } x = \frac{a + 5 - a^2}{a^2 + 3a + 2}.$$

$$\text{Найдём значения } a, \text{ при которых } x = -1. -1 = \frac{a + 5 - a^2}{a^2 + 3a + 2},$$

$-a^2 - 3a - 2 = a + 5 - a^2$, $a = -\frac{7}{4}$. При $a = -\frac{7}{4}$ уравнение корней не имеет.

Получаем: при $a = -2$, $a = -\frac{7}{4}$, $a = -1$ уравнение (1) не имеет корней.

При $a \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{7}{4}\right) \cup \left(-\frac{7}{4}; -1\right) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$ уравнение (1) имеет только один корень.

$$б) (a - 3)x^2 - (a - 2)x - 1 = 0.$$

$$D = b^2 - 4ac = (a - 2)^2 + 4(a - 3) = a^2 - 4a + 4 + 4a - 12 = a^2 - 8.$$

$D < 0$: $a^2 - 8 < 0$, $a \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, уравнение корней не имеет.

$D = 0$: $a^2 - 8 = 0$, $a = \pm 2\sqrt{2}$, уравнение имеет один корень.

$D > 0$: $a^2 - 8 > 0$, $a \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$, уравнение имеет два различных корня.

Вывод: учитывая 1) и 2) число различных корней уравнения

$$\frac{3a + 8 - (a - 1)x}{x + 1} = a^2 + 2a + 3 \text{ равно числу различных корней уравнения}$$

$$(a - 3)x^2 - (a - 2)x - 1 = 0 \text{ при } a = -2, a = -\frac{7}{4}, a = -1, a = \pm 2\sqrt{2}, a = 3.$$

$$\text{Ответ: } -2, -\frac{7}{4}, -1, \pm 2\sqrt{2}, 3.$$

1395. Из заданного уравнения следует $a \neq 0$. ОДЗ. $x \neq 3$; $x \neq -3$. Учитывая ОДЗ, преобразуем исходное уравнение к виду

$$a(6 + a)(3 - x) - a(6 - a)(3 + x) = 6(3 + x)(3 - x); 6a^2 - 12ax = 54 - 6x^2;$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - 9 = 0. \text{ Полученное уравнение имеет два различных корня:}$$

$$x_1 = a + 3 \text{ и } x_2 = a - 3.$$

Для того чтобы исходное уравнение имело ровно один корень, необходи-

мо, чтобы один из полученных корней не принадлежал ОДЗ.

1) Пусть $x_1 = 3$, тогда $a + 3 = 3$; $a = 0$ — не удовлетворяет условию $a \neq 0$.

Если $x_1 = -3$, тогда $a + 3 = -3$; $a = -6$. В этом случае $x_2 = -6 - 3 = -9$ — принадлежит ОДЗ.

2) Пусть $x_2 = 3$, тогда $a - 3 = 3$; $a = 6$. Тогда $x_1 = 6 + 3 = 9$ — принадлежит ОДЗ.

Если $x_2 = -3$, тогда $a - 3 = -3$; $a = 0$ — не удовлетворяет условию $a \neq 0$.

Значит, исходное уравнение имеет единственное решение при $a = -6$ и $a = 6$.

Ответ: -6 ; 6 .

1396. Пусть u и v — корни уравнения $x^3 - 5x^2 + 7x - a = 0$, $u \neq v$. Тогда $x^3 - 5x^2 + 7x - a = (x - u)^2(x - v)$. Раскрывая скобки и приводя подобные, получим: $-(v + 2u)x^2 + (2uv + u^2)x - u^2v = -5x^2 + 7x - a$. Приравнявая коэффициенты многочленов при одинаковых степенях, получим систему

$$\begin{cases} v + 2u = 5, \\ 2uv + u^2 = 7, \\ u^2v = a. \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем $v = 5 - 2u$ и подставляем это выражение во второе уравнение системы: $2u(5 - 2u) + u^2 = 7$; $3u^2 - 10u + 7 = 0$;

$u_1 = 1$, $u_2 = \frac{7}{3}$. Соответствующими значениями v будут $v_1 = 3$, $v_2 = \frac{1}{3}$.

Кроме того, каждое из чисел пары (u, v) должно быть решением уравнения $x^3 - 13x + b = 0$ при некотором b . Для этого необходимо выполнение $b = 13u - u^3 = 13v - v^3$. Проверим для пары (u_1, v_1) : $13 \cdot 1 - 1^3 = 13 \cdot 3 - 3^3$ соответствующие значения параметров: $b = 12$, $a = 1^3 \cdot 3 = 3$. Теперь проверим для пары (u_2, v_2) : $13 \cdot \frac{7}{3} - \left(\frac{7}{3}\right)^3 \neq 13 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Поэтому u_2 и v_2 не могут одновременно быть корнями уравнения $x^3 - 13x + b = 0$.

Ответ: $a = 3$, $b = 12$.

1397.
$$\begin{cases} x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a \leq 0, \\ ax = 1. \end{cases}$$

Разложим на множители левую часть неравенства

$$x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{3a - 1 \pm \sqrt{9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 + 4a}}{2} = \frac{3a - 1 \pm (a - 1)}{2};$$

$$x_1 = 2a - 1, x_2 = a.$$

Таким образом, система принимает вид:
$$\begin{cases} (x-a)(x-2a+1) \leq 0, \\ ax = 1. \end{cases}$$

В прямоугольной системе координат Oax построим прямые $x = a$, $x = 2a - 1$ и гиперболу $x = \frac{1}{a}$. Заштрихуем множество точек (a, x) , которые удовлетворяют неравенству $(x-a)(x-2a+1) \leq 0$. Из рисунка 374 видно, что система имеет решения, если $a \in [a_1; a_2] \cup \{a_3\}$. Найдём a_1 и a_3 из уравнения $a = \frac{1}{a}$: $a^2 = 1$, $a_1 = -1$, $a_3 = 1$. Найдём a_2 из уравнения

$$a(2a - 1) = 1, 2a^2 - a - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ a = -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{Так как } a_2 < 0, a_2 = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $a \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$.

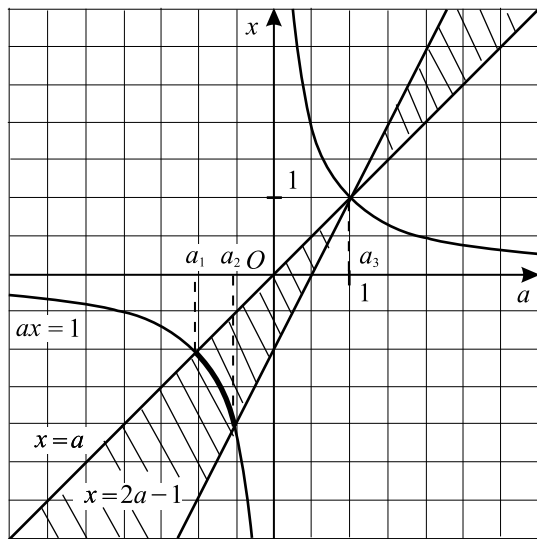


Рис. 374.

Ответ: $\left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$.

1398.
$$\begin{cases} x^2 - (4a - 1)x + 3a^2 - a < 0, \\ ax = 4. \end{cases}$$

Разложим на множители левую часть неравенства.

$$x^2 - (4a - 1)x + 3a^2 - a = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{4a - 1 \pm \sqrt{16a^2 - 8a + 1 - 12a^2 + 4a}}{2} = \frac{4a - 1 \pm (2a - 1)}{2};$$

$$x_1 = 3a - 1, x_2 = a.$$

Система принимает вид:
$$\begin{cases} (x - a)(x - 3a + 1) < 0, \\ ax = 4. \end{cases}$$

В прямоугольной системе координат Oax построим прямые $x = a$, $x = 3a - 1$ и гиперболу $x = \frac{4}{a}$. Заштрихуем множество точек (a, x) , кото-

рые удовлетворяют неравенству $(x - a)(x - 3a + 1) < 0$. Из рисунка 375 видно, что система имеет решения, если $a \in (a_1; a_2) \cup (a_3; a_4)$. Найдём a_1 и a_4 из уравнения $a^2 = 4$: $a_1 = -2$, $a_4 = 2$. Найдём a_2 и a_3 из уравнения

$$a(3a - 1) = 4. \quad 3a^2 - a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ a = 1\frac{1}{3}; \end{cases} \Rightarrow a_2 = -1, a_3 = 1\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $a \in (-2; -1) \cup (1\frac{1}{3}; 2)$.

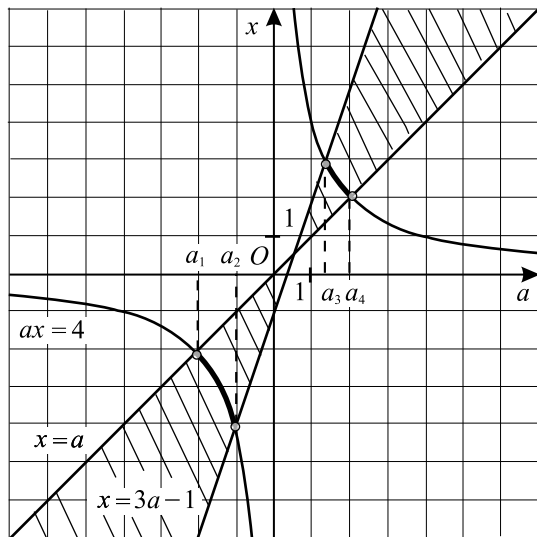


Рис. 375.

Ответ: $(-2; -1) \cup \left(1\frac{1}{3}; 2\right)$.

1399. $f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x - 3 = 0$. Найдём производную функции: $f'(x) = 3x^2 - 4ax + a^2$. Из уравнения $f'(x) = 0$ находим точки экстремума:

$$x_1 = a \text{ и } x_2 = \frac{a}{3}.$$

$$f(a) = a^3 - 2a^3 + a^3 - 3 = -3;$$

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27} - \frac{2a^3}{9} + \frac{a^3}{3} - 3 = \frac{4a^3}{27} - 3.$$

Уравнение $f(x) = 0$ будет иметь ровно 2 корня лишь в том случае, когда

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{4a^3}{27} = 3, a^3 = \frac{27 \cdot 3}{4} = \frac{27 \cdot 6}{8}; a = 1,5 \sqrt[3]{6}.$$

Ответ: $1,5 \sqrt[3]{6}$.

1400. $f(x) = \frac{x^3}{a^2} - \frac{2x^2}{a} + x - 3 = 0$. Найдём производную данной функции:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{a^2} - \frac{4x}{a} + 1. \text{ Из уравнения } f'(x) = 0 \text{ находим точки экстремума}$$

$$x_1 = a, x_2 = \frac{a}{3}.$$

$$f(a) = a - 2a + a - 3 = -3;$$

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a}{27} - \frac{2a}{9} + \frac{a}{3} - 3 = \frac{4a}{27} - 3.$$

Уравнение $f(x) = 0$ будет иметь ровно 2 корня лишь в том случае, если

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{4a}{27} = 3, a = 20,25.$$

Ответ: 20,25.

$$1401. \begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ y^2 = (x-3)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ y = x-3, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ y = 3-x. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим отдельно каждую из этих систем:

$$1) \begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ y = x-3. \end{cases}$$

$$\text{Откуда } (x-a)^2 + (x-3-a)^2 = a^2,$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + x^2 + 9 + a^2 - 6x + 6a - 2ax = a^2,$$

$$2x^2 - 4ax - 6x + a^2 + 6a + 9 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = (2a+3)^2 - 2(a^2+6a+9) = 4a^2 + 12a + 9 - 2a^2 - 12a - 18 = 2a^2 - 9,$$

значит, $D = 0$ при $a = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $D < 0$ при $a \in \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$2) \begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ y = 3-x. \end{cases}$$

Откуда $(x-a)^2 + (3-x-a)^2 = a^2$,

$$x^2 - 2ax + a^2 + 9 + x^2 + a^2 - 6x + 2ax - 6a = a^2,$$

$$2x^2 - 6x + a^2 - 6a + 9 = 0,$$

значит, $\frac{D}{4} = 9 - 2(a^2 - 6a + 9) = -2a^2 + 12a - 9$; $\frac{D}{4} = 0$ при $a = 3 \pm 1,5\sqrt{2}$,

$D < 0$ при $a \in (-\infty; 3 - 1,5\sqrt{2}) \cup (3 + 1,5\sqrt{2}; +\infty)$.

3) Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$-\frac{3\sqrt{2}}{2} < 3 - 1,5\sqrt{2} < \frac{3\sqrt{2}}{2} < 3 + 1,5\sqrt{2}.$$

Исходная система имеет решение, когда одна из систем совокупности (1) имеет единственное решение, а другая — ни одного.

При $a = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ вторая система не имеет решений, при $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ — имеет

решение, отличное от решений первой.

При $a = 3 - 1,5\sqrt{2}$ первая система не имеет решений,

при $a = 3 + 1,5\sqrt{2}$ — имеет решение, причём отличное от решения второй системы.

Значит, в результате получим:

$$a = 3 - 1,5\sqrt{2}, a = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Замечание. Решения систем могут совпадать только в том случае, если $y = 0$, но тогда $x = 3$, $a = 3$, а этот случай не несёт единственность корня.

$$\text{Ответ: } 3 - 1,5\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$1402. \begin{cases} \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \\ y^2 = (x-3)^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \\ y = x - 3, \\ \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \\ y = 3 - x. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим отдельно каждую из этих систем:

$$1) \begin{cases} \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \\ y = x - 3. \end{cases}$$

$$\text{Откуда } \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(x - 3 + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2},$$

$$x^2 + \frac{2x}{a} + \frac{1}{a^2} + x^2 - 6x + 9 + \frac{1}{a^2} - \frac{6}{a} + \frac{2x}{a} = \frac{1}{a^2},$$

$$2x^2 + \frac{4x}{a} - 6x + \frac{1}{a^2} - \frac{6}{a} + 9 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{2}{a} - 3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{6}{a} + 9\right) = \frac{4}{a^2} - \frac{12}{a} + 9 - \frac{2}{a^2} + \frac{12}{a} - 18 = \frac{2}{a^2} - 9,$$

значит, $D = 0$ при $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$; $D < 0$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{3}; +\infty\right)$.

$$2) \begin{cases} \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \\ y = 3 - x. \end{cases}$$

$$\text{Откуда } \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(3 - x + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2},$$

$$x^2 + \frac{2x}{a} + \frac{1}{a^2} + 9 + x^2 + \frac{1}{a^2} - 6x - \frac{2x}{a} + \frac{6}{a} = \frac{1}{a^2},$$

$$2x^2 - 6x + \frac{1}{a^2} + \frac{6}{a} + 9 = 0,$$

значит, $\frac{D}{4} = 9 - 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{6}{a} + 9\right) = -\frac{2}{a^2} - \frac{12}{a} - 9$; $\frac{D}{4} = 0$ при $a = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{3}$,

$D < 0$ при $a \in \left(-\infty; \frac{-2 - \sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(\frac{-2 + \sqrt{2}}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

3) Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\frac{-2 - \sqrt{2}}{3} < -\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{-2 + \sqrt{2}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Исходная система имеет решение, когда одна система из совокупности (1) имеет единственное решение, а другая — ни одного.

При $a = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ вторая система имеет решение, отличное от решений пер-

вой, при $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ — не имеет решений.

При $a = \frac{-2 - \sqrt{2}}{3}$ первая система не имеет решений,

при $a = \frac{-2 + \sqrt{2}}{3}$ — имеет, причём отличное от второй системы.

Значит, в результате получим: $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $a = \frac{-2 - \sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{-2 - \sqrt{2}}{3}$.

1403. Из заданного уравнения следует $16 + a \geq 0$; $a \geq -16$. Преобразуем исходное уравнение к виду $\sqrt{16 - x} = 16 + a - \sqrt{a^2 - x}$.

Пусть $g(x) = \sqrt{16 - x}$, $f(x) = 16 + a - \sqrt{a^2 - x}$. Рассмотрим графики функций $y = g(x)$ и $y = f(x)$ (см. рис. 376).

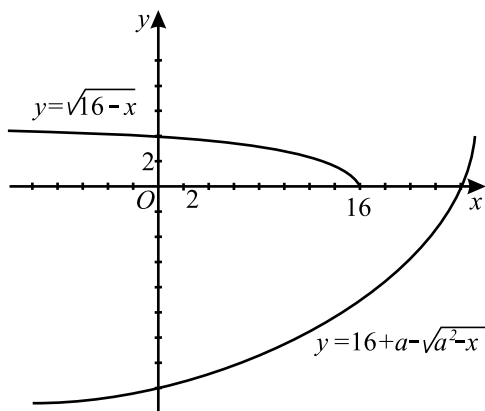


Рис. 376.

1) Областью определения функции $y = g(x)$ является промежуток $(-\infty; 16]$. На всей области определения функция убывает.

2) Областью определения функции $y = f(x)$ является промежуток $(-\infty; a^2]$. На этом промежутке функция возрастает.

График функции $y = f(x)$ должен пересекать ось Ox в точке с абсциссой $x = a^2 - (16 + a)^2 = -32a - 16^2$. Поскольку $-32a - 16^2 \leq a^2$ для всех $a \in \mathbb{R}$, то такое пересечение графика с осью Ox всегда имеет место.

3) Заданное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики рассматриваемых функций имеют единственную точку пересечения. Это возможно лишь в том случае, когда абсцисса точки пересечения функции $y = f(x)$ с осью Ox принадлежит области определе-

ния функции $y = g(x)$, то есть $-32a - 16^2 \leq 16$, откуда $a \geq -8,5$.

Ответ: $[-8,5; +\infty)$.

$$1404. \begin{cases} x + 4 \geq 0, \\ 4(1 - m(x + 2)) = x^2 + 8x + 16; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq -4, \\ 4 - 4mx - 8m = x^2 + 8x + 16; \\ x^2 + x(8 + 4m) + 8m + 12 = 0; \end{cases}$$

$$\frac{D}{4} = (4 + 2m)^2 - 8m - 12 = 4(m + 1)^2.$$

При $m = -1$ уравнение имеет единственный корень $x = -2$, что удовлетворяет условию $x \geq -4$.

При $m \neq -1$, $x_{1,2} = -2m - 4 \pm \sqrt{4(m + 1)^2}$; $x_1 = -2$, $x_2 = -4m - 6$.

Чтобы исходное уравнение имело один корень, необходимо выполнение условия $x_2 < -4$, следовательно, $m > -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\{-1\} \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$.

1405. Обозначим $y = \sqrt{2x + p} \geq 0$, тогда $x = \frac{y^2 - p}{2}$. Уравнение примет вид $3y^2 - 6y + 2 = 3p$.

Построим графики $z = 3y^2 - 6y + 2$, $y \geq 0$ и $z = 3p$ (см. рис. 377).

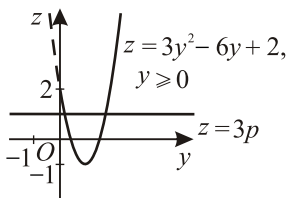


Рис. 377.

Находим ординату вершины параболы: $z_0 = -1$. Очевидно, искомые p должны удовлетворять условию $-1 < 3p \leq 2$, откуда $-\frac{1}{3} < p \leq \frac{2}{3}$.

Ответ: $(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$.

1406. Найдём все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{8x^2 - 9a} = a - 3x$ имеет ровно один корень.

Возведём обе части уравнения в квадрат при условии $a - 3x \geq 0$, или

$x \leq \frac{a}{3}$ (1). Получим $8x^2 - 9a = (a - 3x)^2$; $8x^2 - 9a = a^2 - 6ax + 9x^2$;
 $x^2 - 6ax + a^2 + 9a = 0$.

1) Исходное уравнение будет иметь единственное решение, в случае если полученное квадратное уравнение имеет единственный вещественный корень, для которого при этом выполняется условие (1). Квадратное уравнение имеет единственный корень $x = 3a$, если дискриминант $D = 4(8a^2 - 9a) = 0$, то есть при $a = 0$ или $a = \frac{9}{8}$. При $a = 0$ условие (1) выполняется, при $a = \frac{9}{8}$ — нет.

2) Исходное уравнение будет иметь единственный корень в том случае, если полученное квадратное уравнение будет иметь два корня, один из которых не удовлетворяет условию (1).

Пусть $D = 4(8a^2 - 9a) > 0$, $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{9}{8}; +\infty\right)$,

$$x_{1,2} = 3a \pm \sqrt{8a^2 - 9a}.$$

При $a \in (-\infty; 0)$ $x_1 = 3a - \sqrt{8a^2 - 9a} \leq \frac{a}{3}$, так как

$$8a - 3\sqrt{8a^2 - 9a} < 0. \text{ Найдём, при каких } a \in (-\infty; 0)$$

$$x_2 = 3a + \sqrt{8a^2 - 9a} > \frac{a}{3}. \text{ Преобразуем неравенство и получаем}$$

$$3\sqrt{8a^2 - 9a} > -8a, 8a^2 - 81a > 0, \text{ что верно для любого } a \in (-\infty; 0).$$

При $a \in \left(\frac{9}{8}; +\infty\right)$ x_2 не удовлетворяет условию (1), так как

$$-8a < 3\sqrt{8a^2 - 9a}. \text{ Найдём } a \in \left(\frac{9}{8}; +\infty\right), \text{ при которых } x_1 \leq \frac{a}{3}.$$

$$8a \leq 3\sqrt{8a^2 - 9a}; 64a^2 \leq 72a^2 - 81a; 8a^2 - 81a \geq 0; 8a\left(a - \frac{81}{8}\right) \geq 0,$$

откуда $a \in [10,125; +\infty)$.

Из 1) и 2) следует, что исходное уравнение имеет единственное решение при $a \in (-\infty; 0] \cup [10,125; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [10,125; +\infty)$.

1407. По условию график функции $y = -px^4 + |p - 4|x^2$ и линия $y = 0$ пересекаются в трёх точках, следовательно, уравнение $-px^4 + |p - 4|x^2 = 0$ должно иметь три различных корня.

$x^2(-px^2 + |p - 4|) = 0$; $x_1 = 0$, $-px^2 + |p - 4| = 0$. Последнее уравнение должно иметь два различных корня, и ни один из них не должен быть равен 0:

$$\begin{cases} p \neq 0, \\ p < 7, \\ p \neq 4, \\ x^2 = \frac{|p - 4|}{p}. \end{cases} \quad \text{Так как } |p - 4| > 0, \text{ то } \frac{|p - 4|}{p} > 0 \text{ при } p > 0,$$

то есть $\begin{cases} 0 < p < 7, \\ p \neq 4. \end{cases}$ Тогда $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{\frac{|p - 4|}{p}}$; $x_3 = -\sqrt{\frac{|p - 4|}{p}}$.

$p = 1, 2, 3, 5, 6$; $1 + 2 + 3 + 5 + 6 = 17$.

Ответ: 17.

1408. $\sqrt{a}x^3 - |a^3 + 2 - |2a^2 + a||x = 0$ (1).

Заметим, что при $a = 0$ уравнение имеет вид $-2x = 0$, то есть имеет ровно один корень. При любом значении параметра $a > 0$ исходное уравнение имеет корень $x = 0$.

При $x \neq 0$ получим уравнение $\sqrt{a}x^2 - |a^3 + 2 - |2a^2 + a|| = 0$ (2).

Уравнение (1) имеет ровно один корень тогда и только тогда, когда уравнение (2) не имеет корней, отличных от нуля, то есть тогда и только тогда, когда $a^3 + 2 - |2a^2 + a| = 0$, $a > 0$.

При $a > 0$ $|2a^2 + a| = 2a^2 + a$, тогда имеем: $a^3 - 2a^2 - a + 2 = 0$; $a^2(a - 2) - (a - 2) = 0$; $(a^2 - 1)(a - 2) = 0$; $(a + 1)(a - 1)(a - 2) = 0$; $a = -1$ — не удовлетворяет условию $a > 0$; $a = 1$, $a = 2$.

Ответ: 0; 1; 2.

1409. $\sqrt{a}x^6 - |a^3 + 4 - |4a + a^2||x^4 = 0$ (1).

Заметим, что при $a = 0$ уравнение (1) имеет вид $-4x^4 = 0$, то есть имеет ровно один корень. Рассмотрим уравнение (1) при $a > 0$.

При любом значении $a > 0$ уравнение (1) имеет корень $x = 0$. При $x \neq 0$ получим уравнение $\sqrt{a}x^2 - |a^3 + 4 - |4a + a^2|| = 0$ (2).

Уравнение (1) имеет один корень тогда и только тогда, когда уравнение (2) не имеет корней, отличных от нуля, то есть тогда и только тогда, когда $a^3 + 4 - |4a + a^2| = 0$. При $a > 0$ $|4a + a^2| = 4a + a^2$, тогда имеем: $a^3 - a^2 - 4a + 4 = 0$; $a^2(a - 1) - 4(a - 1) = 0$; $(a - 1)(a^2 - 4) = 0$; $(a - 1)(a - 2)(a + 2) = 0$; $a = -2$ — не удовлетворяет условию $a > 0$; $a = 1$, $a = 2$.

Ответ: 0; 1; 2.

1410. Преобразуем данное уравнение.

$(a + 3)(a + 8x - x^2 - 10) - |x - 4|(a + 8x - x^2 - 10) = 10$,

$$\begin{cases} (a + 8x - x^2 - 10)(a + 3 - |x - 4|) = 0, \\ x^2 - 8x + 10 = a, \\ |x - 4| - 3 = a. \end{cases}$$

Построим графики функций $y = x^2 - 8x + 10$ и $y = |x - 4| - 3$ (см. рис. 378).

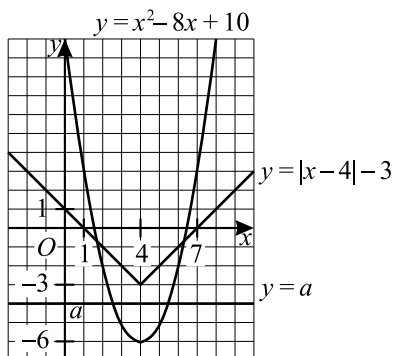


Рис. 378.

По графику определяем: исходное уравнение имеет ровно два корня при $-6 < a < -3$ и при тех значениях x , при которых выполняется равенство $x^2 - 8x + 10 = |x - 4| - 3$,

$$\begin{aligned} (x^2 - 8x + 16) - 16 + 10 - |x - 4| + 3 &= 0, \\ (x - 4)^2 - |x - 4| - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим $|x - 4| = t, t \geq 0$. Уравнение примет вид:

$$t^2 - t - 3 = 0,$$

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2},$$

$$t_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \text{ — не удовлетворяет условию } t \geq 0.$$

Вернёмся к замене.

$$|x - 4| = \frac{1 + \sqrt{13}}{2},$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} + 4, x_2 = -\frac{1 + \sqrt{13}}{2} + 4.$$

Функции $y = x^2 - 8x + 10$ и $y = |x - 4| - 3$ симметричны относительно прямой $x = 4$, поэтому для каждой из них справедливо $y(x_1) = y(x_2)$.

Найдём $y(x_2) = y\left(-\frac{1+\sqrt{13}}{2} + 4\right)$ функции $y = |x - 4| - 3$.

$$\left| -\frac{1+\sqrt{13}}{2} + 4 - 4 \right| - 3 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} - 3 = \frac{\sqrt{13}-5}{2}.$$

Следовательно, $a = \frac{\sqrt{13}-5}{2}$.

Ответ: $(-3; -6) \cup \left\{ \frac{\sqrt{13}-5}{2} \right\}$.

1411. Преобразуем данные уравнение

$$(a+2)(a+4x-x^2-1) - |x-2|(a+4x-x^2-1) = 0,$$

$$(a+4x-x^2-1)(a+2-|x-2|) = 0,$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 1 = a, \\ |x-2| - 2 = a. \end{cases}$$

Построим графики функций $y = x^2 - 4x + 1$ и $y = |x - 2| - 2$ (см. рис. 379).

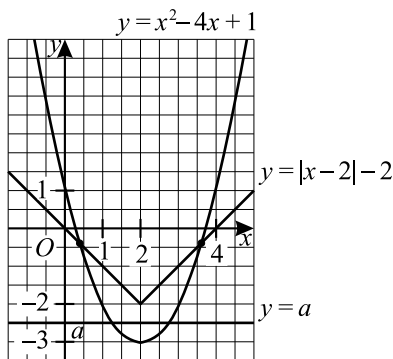


Рис. 379.

По графику определяем: исходное уравнение имеет ровно два корня при $-3 < a < -2$ и при тех значениях x , при которых выполняется равенство $x^2 - 4x + 1 = |x - 2| - 2$,

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + 1 - |x - 2| + 2 = 0,$$

$$(x - 2)^2 - |x - 2| - 1 = 0.$$

Обозначим $|x - 2| = t$, $t \geq 0$. Уравнение примет вид $t^2 - t - 1 = 0$,

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ — не удовлетворяет условию $t \geq 0$.

Вернёмся к замене:

$$|x - 2| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 2, x_2 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 2.$$

Функции $y = x^2 - 4x + 1$ и $y = |x - 2| - 2$ симметричны относительно прямой $x = 2$, поэтому для каждой из них справедливо $y(x_1) = y(x_2)$.

Найдём $y(x_1) = y\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 2\right)$ функции $y = |x - 2| - 2$:

$$\left|\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 2 - 2\right| - 2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}.$$

Следовательно, $a = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$.

Ответ: $(-3; -2) \cup \left\{\frac{\sqrt{5} - 3}{2}\right\}$.

1412. $|x + a| + ||x - 3| - 4| = 1$; $||x - 3| - 4| - 1 = -|x + a|$.

Данное уравнение имеет два корня тогда и только тогда, когда графики функций $f(x) = ||x - 3| - 4| - 1$ и $g(x) = -|x + a|$ имеют две общие точки.

Построим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ (см. рис. 380).

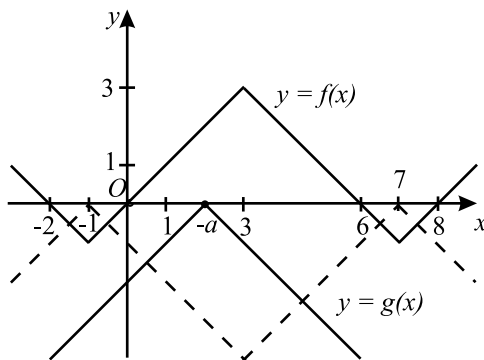


Рис. 380.

При изменении параметра a график функции $y = g(x)$ движется вдоль оси Ox . Из рисунка видно, что графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют ровно две точки пересечения, когда график функции $y = g(x)$ рас-

положен так, как показано пунктирными линиями, то есть $-a \in (-2; 0)$ и $-a \in (6; 8)$. Таким образом, $a \in (-8; -6) \cup (0; 2)$.

Ответ: $(-8; -6) \cup (0; 2)$.

1413. $|x - b| + ||x + 2| - 5| = 2$; $||x + 2| - 5| - 2 = -|x - b|$.

Данное уравнение имеет два корня тогда и только тогда, когда графики функций $f(x) = ||x + 2| - 5| - 2$ и $g(x) = -|x - b|$ имеют две общие точки.

Построим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ (см. рис. 381).

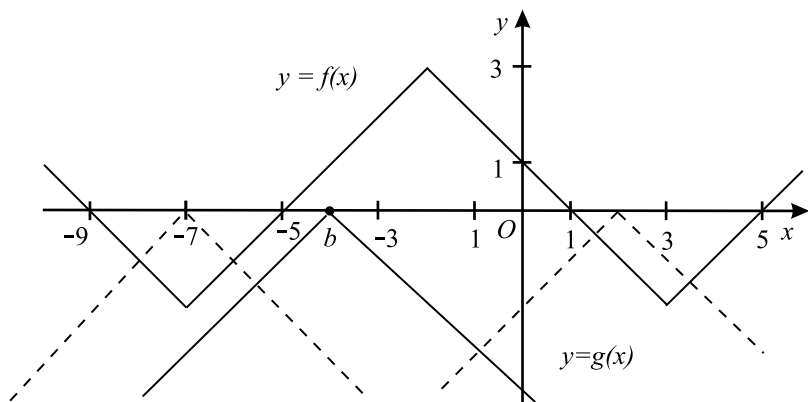


Рис. 381.

При изменении параметра b график функции $y = g(x)$ движется вдоль оси Ox . Из рисунка видно, что графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют две точки пересечения, когда график функции $y = g(x)$ расположен так, как показано пунктирными линиями, то есть $b \in (-9; -5)$ и $b \in (1; 5)$.

Таким образом, $b \in (-9; -5)$ и $b \in (1; 5)$.

Ответ: $(-9; -5) \cup (1; 5)$.

1414. Запишем исходное уравнение в виде $16|x - 3| - 8x + |6x - |x + a|| = 0$.

Функция $f(x) = 16|x - 3| - 8x + |6x - |x + a||$ непрерывна и неограниченно возрастает при $x \geq 3$, так как при любом раскрытии модулей будем иметь: $f(x) = 16x - 48 - 8x \pm 6x \pm x \pm a = kx + l$, где $k \geq 16 - 8 - 6 - 1 > 0$. Функция $f(x)$ убывает при $x \leq 3$, так как при любом раскрытии модулей будем иметь:

$f(x) = -16x + 48 - 8x \pm 6x \pm x \pm a = kx + l$, где $k \leq -16 - 8 + 6 + 1 < 0$. Следовательно, наименьшее значение $f(x)$ принимает при $x = 3$, а уравнение $f(x) = 0$ будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(3) \leq 0$.

Решим это неравенство: $|18 - |3 + a|| \leq 24$; $-24 \leq |3 + a| - 18 \leq 24$;
 $|3 + a| \leq 42$; $-45 \leq a \leq 39$.

Ответ: $a \in [-45; 39]$.

1415. Запишем исходное уравнение в виде $13|x - 2| - 5x + |4x + |3x - a|| = 0$. Функция

$f(x) = 13|x - 2| - 5x + |4x + |3x - a||$ непрерывна и неограниченно возрастает при $x \geq 2$, так как при любом раскрытии модулей будем иметь: $f(x) = 13x - 26 - 5x \pm 4x \pm 3x \pm a = kx + l$, где $k \geq 13 - 5 - 4 - 3 > 0$. Функция $f(x)$ убывает при $x \leq 2$, так как при любом раскрытии модулей будем иметь:

$f(x) = -13x + 26 - 5x \pm 4x \pm 3x \pm a = kx + l$, где $k \leq -13 - 5 + 4 + 3 < 0$.

Следовательно, наименьшее значение $f(x)$ принимает при $x = 2$, а уравнение $f(x) = 0$ будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(2) \leq 0$. Решим это неравенство: $|8 + |6 - a|| \leq 10$; $8 + |6 - a| \leq 10$;
 $|6 - a| \leq 2$; $4 \leq a \leq 8$.

Ответ: $a \in [4; 8]$.

1416. Пусть система имеет решение $(x; y)$. Если $x \neq 0$, то система имеет второе решение $(-x; y)$. Значит, система имеет нечётное число решений, когда абсцисса одного из решений равна нулю, то есть $x = 0$.

При $x = 0$ система примет вид $\begin{cases} a(y - 1) = 2, \\ y^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2+a}{a}, \\ |y| = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2+a}{a} = 3, \\ \frac{2+a}{a} = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ a = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

1) $a = -0,5$.

$$\begin{cases} -0,5(y - 1) = 2 - 2|x|, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4|x| - 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

График функции $y = 4|x| - 3$ и окружность $x^2 + y^2 = 9$ имеют ровно три общие точки (см. рис. 382). Значит, при $a = -0,5$ исходная система имеет ровно три решения.

2) $a = 1$.

$$\begin{cases} y - 1 = 2 - 2|x|, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2|x| + 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

График функции $y = -2|x| + 3$ и окружность $x^2 + y^2 = 9$ имеют ровно

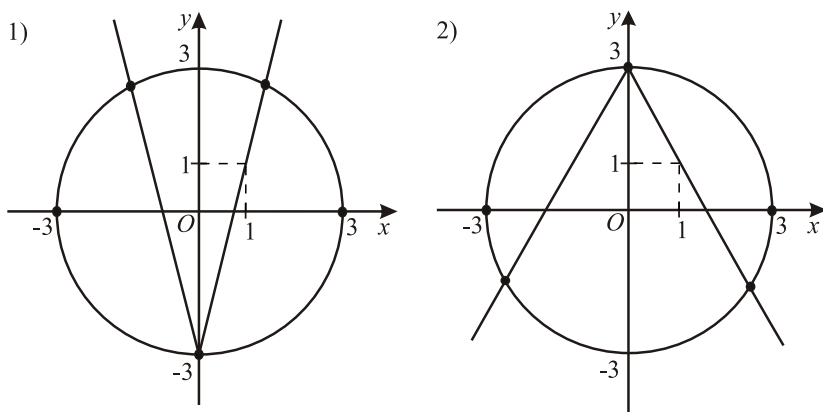


Рис. 382.

три общие точки (см. рис. 382), значит, исходная система имеет ровно три решения.

Ответ: $-0,5; 1$.

1417. Сделаем для удобства замену $z = x + 1$, тогда $x = z - 1$. Исходная система примет вид $\begin{cases} (z - 1)^2 + y^2 = a^2, \\ y + a^2 = |z|. \end{cases}$ Из второго уравне-

ния системы y однозначно выражается через z , а именно $y = |z| - a^2$. Подставив это выражение для y в первое уравнение системы, получим $(z - 1)^2 + (|z| - a^2)^2 = a^2$. Таким образом, решение задания сводится к нахождению значений параметра a , при которых последнее уравнение имеет единственное решение. Преобразуем это уравнение к виду $2z^2 - 2z - 2a^2|z| + a^4 - a^2 + 1 = 0$. График функции, стоящей в левой части этого уравнения, состоит из двух кусков парабол: при $z \leq 0$ и $z > 0$.

Для куска $z \leq 0$ уравнение принимает вид $2z^2 + 2(a^2 - 1)z + a^4 - a^2 + 1 = 0$. Его дискриминант, делённый на 4, $\frac{D}{4} = (a^2 - 1)^2 - 2a^4 + 2a^2 - 2 = -a^4 - 1 < 0$ при любых значениях a . Поэтому на множестве $z \leq 0$ у рассматриваемого уравнения корней нет.

Для куска $z > 0$ уравнение принимает вид $2z^2 - 2(a^2 + 1)z + a^4 - a^2 + 1 = 0$. Его дискриминант, делённый на 4, $\frac{D}{4} = (a^2 + 1)^2 - 2a^4 + 2a^2 - 2 = -a^4 + 4a^2 - 1$. Введя замену $a^2 = t$ и получив значения $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ корнями вспомогательного уравнения

$-t^2 + 4t - 1 = 0$, получаем: $\frac{D}{4} = 0$ при $|a| = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ и $\frac{D}{4} > 0$ при $|a| \in (\sqrt{2 - \sqrt{3}}; \sqrt{2 + \sqrt{3}})$. При $D = 0$ получаем один положительный корень $z = \frac{a^2 + 1}{2}$, следовательно, в этом случае и исходная система будет иметь ровно одно решение. При $D > 0$ получаем два корня $z_{1,2} = \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{-a^4 + 4a^2 - 1}}{2}$. Докажем, что оба этих корня положи-

тельны (следовательно, в этом случае и исходная система будет иметь два решения). Положительность первого корня очевидна. Положительность второго корня следует из неравенства $a^2 + 1 > \sqrt{-a^4 + 4a^2 - 1}$, которое при условии положительности подкоренного выражения (то есть $D > 0$) равносильно неравенству $a^4 + 2a^2 + 1 > -a^4 + 4a^2 - 1 \Leftrightarrow a^4 - a^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow (4a^4 - 4a^2 + 1) + 3 > 0 \Leftrightarrow (2a^2 - 1)^2 + 3 > 0$, что очевидно выполняется.

Таким образом, исходная система будет иметь ровно одно решение только при $|a| = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$, то есть при $a = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ или $a = -\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$.

Ответ: $\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, -\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$.

1418. Сделаем для удобства замену $z = -x + 1$, тогда $x = -z + 1$. Исходная система примет вид $\begin{cases} (z - 1)^2 + 4y^2 = b, \\ 2y + b = |z|. \end{cases}$ Из второго уравнения

системы y однозначно выражается через z , а именно $y = 0,5(|z| - b)$. Подставив это выражение для y в первое уравнение системы, получим $(z - 1)^2 + (|z| - b)^2 = b$. Таким образом, решение задания сводится к нахождению значений параметра b , при которых последнее уравнение имеет единственное решение. Преобразуем это уравнение к виду $2z^2 - 2z - 2b|z| + b^2 - b + 1 = 0$. График функции, стоящей в левой части этого уравнения, состоит из двух кусков парабол: при $z \leq 0$ и $z > 0$.

Для куска $z \leq 0$ уравнение принимает вид $2z^2 + 2(b - 1)z + b^2 - b + 1 = 0$.

Его дискриминант, делённый на 4, $\frac{D}{4} = (b - 1)^2 - 2b^2 + 2b - 2 = -b^2 - 1 < 0$ при любых значениях b . Поэтому на множестве $z \leq 0$ у рассматриваемого уравнения корней нет.

Для куска $z > 0$ уравнение принимает вид $2z^2 - 2(b + 1)z + b^2 - b + 1 = 0$.

Его дискриминант, делённый на 4, $\frac{D}{4} = (b + 1)^2 - 2b^2 + 2b - 2 = -b^2 + 4b - 1$.

Корнями этого трёхчлена являются $b_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, поэтому $\frac{D}{4} = 0$ при

$b = 2 \pm \sqrt{3}$ и $\frac{D}{4} > 0$ при $b \in (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$. При $D = 0$ получаем

один положительный корень $z = \frac{b+1}{2}$, следовательно, в этом случае и исходная система будет иметь ровно одно решение. При $D > 0$ получаем два корня $z_{1,2} = \frac{b+1 \pm \sqrt{-b^2+4b-1}}{2}$. Докажем, что оба этих корня

положительны (следовательно, в этом случае и исходная система будет иметь два решения). Положительность первого корня очевидна. Положительность второго корня следует из неравенства $b+1 > \sqrt{-b^2+4b-1}$, которое при условии положительности подкоренного выражения (то есть $D > 0$) равносильно неравенству $b^2+2b+1 > -b^2+4b-1 \Leftrightarrow b^2-b+1 > 0 \Leftrightarrow (4b^2-4b+1)+3 > 0 \Leftrightarrow (2b-1)^2+3 > 0$, что очевидно выполняется.

Таким образом, исходная система будет иметь ровно одно решение только при $b = 2 \pm \sqrt{3}$.

Ответ: $2 \pm \sqrt{3}$.

1419. Первое уравнение системы задаёт окружность радиуса $|a|$ с центром в точке с координатами $(0; a)$ (при любом значении a такая окружность проходит через начало координат). Ясно, что система уравнений будет иметь решения только при $a > 0$.

Из графического представления системы (см. рис. 383) видно, что система будет иметь более четырёх решений в том случае, если окружность, заданная первым уравнением, будет иметь радиус больший, чем окружность, проходящая через точку A (окружность, касающаяся ветвей параболы $y = x^2 - 3$).

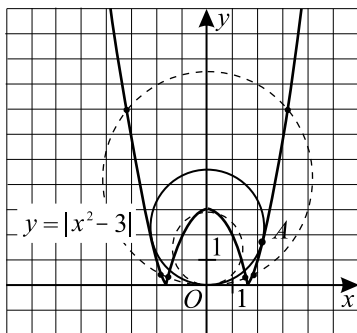


Рис. 383.

Найдём радиус окружности, заданной первым уравнением системы и проходящей через точку A с координатами $(x; y)$. Очевидно, что $x > \sqrt{3}$ и $y > 0$. Следовательно, второе уравнение системы можно записать в виде $y = x^2 - 3$, откуда $x^2 = y + 3$. Подставим полученное выражение для x^2 в первое уравнение системы: $y + 3 + (y - a)^2 = a^2$, $y + 3 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$, $y^2 + (1 - 2a)y + 3 = 0$. Данное уравнение имеет единственное решение, если $D = (1 - 2a)^2 - 12 = 4a^2 - 4a - 11 = 0$. Отсюда

$$a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 11}}{4} = \frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{2}. \text{ Учитывая, что } a > 0, a = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}$$

(при этом $y = a - 0,5 = \sqrt{3} > 0$).

Таким образом, система будет иметь более четырёх решений при $a > \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

1420. Первое уравнение системы задаёт окружность радиуса $|a|$ с центром в точке с координатами $(0; 8 - a)$ (при любом значении a данная окружность проходит через точку с координатой $(0; 8)$). Учитывая, что $a > 0$, система уравнений будет иметь ровно 4 решения, если эта окружность будет проходить или через точку A , или через точку B (см. рис. 384).

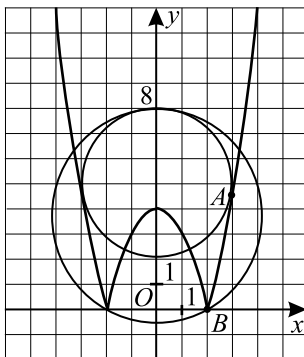


Рис. 384.

Найдём радиус окружности, заданной первым уравнением системы и проходящей через точку B . Координата данной точки $(2; 0)$, подставим $x = 2$ и $y = 0$ в первое уравнение системы: $4 + (a - 8)^2 = a^2$,

$$4 + a^2 - 16a + 64 = a^2, a = \frac{68}{16} = 4,25.$$

Найдём a , при котором окружность, заданная первым уравнением системы, проходит через точку A с координатами $(x; y)$ (окружность, касаю-

щаяся ветвей параболы $y = x^2 - 4$). Ясно, что $x > 2$ и $y > 0$. Тогда второе уравнение системы равносильно уравнению $x^2 - 4 = y$, откуда $x^2 = y + 4$. Подставляем найденное выражение для x^2 в первое уравнение системы: $y + 4 + (y + a - 8)^2 = a^2$, $y + 4 + y^2 + 2y(a - 8) + (a - 8)^2 = a^2$, $y^2 + (2a - 15)y - 16a + 68 = 0$. Данное уравнение имеет единственное решение, если $D = (2a - 15)^2 - 4(68 - 16a) = 4a^2 + 4a - 47 = 0$, откуда $a_{1,2} = \frac{-1 \pm 4\sqrt{3}}{2}$, и так как $a > 0$, $a = \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2}$ (при этом $y = 7,5 - a = 7,5 - \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2} > 0$).

Таким образом, система имеет 4 решения при $a = 4,25$ и $a = \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: 4,25; $\frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2}$.

1421. Для исходного уравнения $|x - 1| + x^2 + (a - 3)x + 6 = a$ выполним замену $t = x - 1$. Получаем $|t| + (t + 1)^2 + (a - 3)(t + 1) + 6 = a$, $|t| + t^2 + 2t + 1 + at + a - 3t - 3 + 6 - a = 0$; $|t| + t^2 + (a - 1)t + 4 = 0$.

1) $t \geq 0$: $t^2 + at + 4 = 0$. Левая часть уравнения задаёт параболу, ветви которой направлены вверх. Так как при $t = 0$ $t^2 + at + 4 = 4$, при $-\frac{a}{2} \leq 0$ или $a \geq 0$ уравнение не имеет решений.

Пусть $a < 0$. Уравнение будет иметь корни в том случае, если в точке $t = -\frac{a}{2}$ значение выражения $t^2 + at + 4 \leq 0$. То есть $\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 4 \leq 0$,

$$16 \leq a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -4, \\ a \geq 4. \end{cases}$$

Учитывая то, что $a < 0$, получаем $a \in (-\infty; -4]$.

2) $t < 0$: $t^2 + (a - 2)t + 4 = 0$. Аналогично предыдущему случаю при $a \leq 2$ решений нет.

При $a > 2$ из условия $16 \leq (a - 2)^2$ получаем $a \in [6; \infty)$

Из 1) и 2) $a \in (-\infty; -4] \cup [6; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -4] \cup [6; +\infty)$.

1422. Обозначим $f(x) = 9^{4x^2-4ax-6a-8} - 8$ и $g(x) = \left| \frac{a+3}{2x-a} \right|$.

1) Функция $f(x)$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть $t = 4x^2 - 4ax - 6a - 8$; $x_0 = \frac{4a}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}a$, график функции симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}a$. Найдём $f(-1,5) = 9^{9+6a-6a-8} - 8 = 1$, значит при любом значении a график функции проходит через точку с координатами $(-1,5; 1)$.

2) Функция $g(x)$ определена при всех значениях x , кроме $x = \frac{1}{2}a$, имеет вертикальную асимптоту $x = \frac{1}{2}a$, относительно которой симметричен ее график

$$g(-1,5) = \left| \frac{a+3}{-3-a} \right| = 1, a \neq -3.$$

3) Графики функций имеют общую точку с координатами $(-1,5; 1)$. $-1,5 \notin [-1; 1]$, значит $x = -1,5$ не является корнем данного уравнения на заданном отрезке.

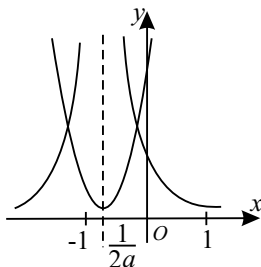


Рис. 385.

Так как графики функций симметричны относительно прямой $x = \frac{1}{2}a$, то абсциссу второй общей точки найдем, решив систему уравнений.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \Delta x = -1,5, \\ \frac{1}{2}a - \Delta x = x; \end{cases} \Leftrightarrow a = -1,5 + x; x = a + 1,5; \Delta x = -1,5 - 0,5a.$$

По условию корень уравнения принадлежит отрезку $[-1; 1]$, значит $-1 \leq a + 1,5 \leq 1$; $-2,5 \leq a \leq -0,5$. (см. рис. 385)

4) Если $a = -3$, то данное уравнение не имеет корней в силу того что $f(x)$ принимает только положительные значения, а $g(x) = 0$ при всех значениях x , кроме $x = -1,5$, следовательно графики функций не имеют общих точек (см. рис. 386).

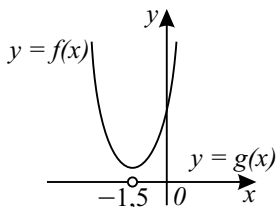


Рис. 386.

Ответ: $[-2,5; -0,5]$.

1423. 1) Так как по условию $p \neq -2$, то домножим обе части второго уравнения на $(p+2)$: $(p+2)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-300} = \sqrt{x+3}$; $(p+2)^2 > 0$; слева в уравнении стоит убывающая функция, справа — возрастающая на $[-3; +\infty)$ функция, поэтому число n корней второго уравнения $n = 0$ либо $n = 1$. При $x \rightarrow \infty$, каким бы большим ни было p , левая часть стремится к нулю, а правая — к бесконечности; с другой стороны, при $x = -3$ $(p+2)^2 \cdot 3^{303} > 0$, а $\sqrt{x+3} = 0$. Значит, на луче $[-3; +\infty)$ у этого уравнения существует корень, и он единственный: $n = 1$.

2) Так как $x^2 + p \neq 0$ при всех $x \neq \pm\sqrt{-p}$, то можно преобразовать первое уравнение. $x^4 - 2(3+p)x + (2p^2 - 3p + 4) = x^4 - p^2 + 17x^2 + 17p$; $17x^2 + 2(3+p)x - (3p^2 - 20p + 4) = 0$. Это квадратное уравнение. Число его корней $k = 0$; $k = 1$ или $k = 2$.

3) Итак, $p + 1 + n = k$, но так как $n = 1$, то $p + 2 = k$; $p = k - 2$.

Возможны варианты:

а) $p = -2$, но этот случай невозможен по условию.

б) $p = -1$, первое уравнение примет вид:

$17x^2 + 4x - 27 = 0$, $D = 4 + 17 \cdot 27 \neq 0$. Это противоречит рассматриваемому случаю числа корней этого уравнения $k = 1$. Поэтому $p = -1$ не удовлетворяет условиям задачи.

в) $p = 0$, $k = 2$; $\frac{x^4 - 6x + 4}{x^2} = x^2 + 17$; $x^4 - 6x + 4 = x^4 + 17x^2$;

$17x^2 + 6x - 4 = 0$, $D = 9 + 68 > 0$, число корней в самом деле равно 2,

поэтому этот случай удовлетворяет условиям. Сумма корней по обратной теореме Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{6}{17}$.

Ответ: $p = 0$; $x_1 + x_2 = -\frac{6}{17}$.

1424. $\sqrt{4(p+1)x - 8p - 12} = 2x + p - 1$ и $\left(2 + 2^{\frac{p+2}{p-1}}\right)^x = 21 - 6x$, $p \neq 1$.

1) Пусть $a = 2 + 2^{\frac{p+2}{p-1}}$, тогда $a > 1$ и показательная функция $y = a^x$ возрастает. Линейная функция $y = 21 - 6x$ убывает, так как коэффициент $-6 < 0$. Поэтому число n корней второго уравнения $n = 0$ или $n = 1$.

2) Если $x < 0$, то $a^x < 1 < 21 - 6x$, то есть график $y = a^x$ лежит ниже прямой $y = 21 - 6x$. Если $x > 3,5$, то $a^x > 0 > 21 - 6x$, то есть график $y = a^x$ расположен выше этой прямой. Таким образом, в интервале $(0; 3,5)$ второе уравнение с необходимостью имеет корень, и он единственный: $n = 1$. 3) После возведения в квадрат первого уравнения получим квадратное уравнение, число корней первого уравнения $k = 0$, $k = 1$ или $k = 2$. По условию, $0,5(p+2) = k \cdot n$, зная, что $n = 1$, имеем $0,5(p+2) = k$, где $k \in \{0, 1, 2\}$, значит, p — чётное.

а) Если $k = 0$, то $p = -2$, при этом, очевидно, второе уравнение имеет смысл, а первое примет вид $\sqrt{-4x+4} = 2x - 3$. ОДЗ: $\begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq 1,5; \end{cases}$ система несовместна, поэтому первое уравнение имеет смысл и число его корней действительно равно нулю.

б) Если $k = 1$, то $p = 0$. Второе уравнение имеет смысл, а первое примет вид:

$$\sqrt{4x-12} = 2x-1. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 3, \\ x \geq \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3. \quad 4x-12 = 4x^2-4x+1;$$

$4x^2-8x+13=0$; $D=16-52 < 0$. Нет действительных корней. $p=0$ не удовлетворяет условиям задачи. в) Если $k=2$, то $p=2$. Второе уравнение имеет смысл, а первое: $\sqrt{12x-28} = 2x+1$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 2\frac{1}{3}, \\ x \geq -\frac{1}{2}; \end{cases} \quad x \geq 2\frac{1}{3}; \quad 12x-28 = 4x^2+4x+1; \quad 4x^2-8x+29=0;$$

$D=16-4 \cdot 29 < 0$ — нет действительных корней. Итак, условиям задачи удовлетворяет $p = -2$, при этом второе уравнение $3^x = 21 - 6x$ имеет

корень, найденный методом «пристального взгляда», $x = 2$; $9 = 21 - 12$.

Ответ: 2.

1425.1) Из первого уравнения: $x \neq 0 \Rightarrow y = \frac{7}{x} - x^2 \Rightarrow y - 1 = \frac{7}{x} - (x^2 + 1)$.

Так как $y - 1 \geq 0$ из второго уравнения, то $\frac{7}{x} \geq x^2 + 1$. Так как $x \neq 0$, то

$$x^2 + 1 > 1 \Rightarrow \frac{7}{x} > 1 \Rightarrow 0 < x < 7.$$

2) Так как $x > 0$, то второе уравнение равносильно следующему:

$$x + \frac{\sqrt{y-1}}{x} - (1 + \sqrt{y-1}) = 0, \quad x^2 - (1 + \sqrt{y-1})x + \sqrt{y-1} = 0. \text{ Отсюда } x = 1 \text{ и } x = \sqrt{y-1}.$$

а) $x = 1$. Из первого уравнения $y = 6$. (1; 6) — решение системы.

б) $x = \sqrt{y-1}$. Из первого уравнения $x^2 + x^2 + 1 = \frac{7}{x}$, то есть

$$2x^2 + 1 = \frac{7}{x}. \text{ Обозначим } f(x) = 2x^2 + 1, \quad g(x) = \frac{7}{x}.$$

График функции $y = f(x)$ — парабола, ветви которой направлены вверх, координаты вершины (0; 1). График функции $y = g(x)$ — гипербола, расположенная в первой и третьей четверти.

Очевидно, что графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют единственную точку пересечения с абсциссой x_0 , которая удовлетворяет условию $0 < x_0 < 7$. Таким образом имеем еще одно решение.

Ответ: 2 решения..

1426. ОДЗ: $y > -5, x \neq -1$.

Попытаемся выразить y через x из первого уравнения системы.

$(x+1)y = -x^3 - 3x^2 - 9x = (x+1)(-x^2 - 2x - 7) + 7$. Видим, что $x = -1$ в паре ни с каким y не является решением полученного уравнения.

$$y = -x^2 - 2x - 7 + \frac{7}{x+1} \quad (*), \quad y + 5 = -x^2 - 2x - 2 + \frac{7}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{7}{x+1} > (x+1)^2 + 1 \Rightarrow 0 < x+1 < 7. \text{ Пусть } x+1 = t. \text{ Учитывая,}$$

что $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x+1 = t$, преобразуем уравнение (2) к виду: $t^2 - (1 + \sqrt{y+5})t + \sqrt{y+5} = 0$; $t = 1, t = \sqrt{y+5}$. $t = 1$ даёт решение $x = y = 0$. $t = \sqrt{y+5}$ даёт $x+1 = \sqrt{y+5}$, то есть $y = (x+1)^2 - 5$. В сово-

купности с уравнением (*) имеем систему $\begin{cases} y = (x+1)^2 - 5, \\ y = -(x+1)^2 - 6 + \frac{7}{x+1}. \end{cases}$

$$(x+1)^2 - 5 = -(x+1)^2 - 6 + \frac{7}{x+1} \Leftrightarrow 2(x+1)^2 + 1 = \frac{7}{x+1} (**).$$

Нарисовав эскизы графиков функций $y_1 = 2(x+1)^2 + 1$ и $y_2 = \frac{7}{x+1}$, легко убедиться, что уравнение (**) имеет единственный корень x_0 , принадлежащий промежутку $(0; 1)$. Действительно, $y_1(0) < y_2(0)$, а $y_1(1) > y_2(1)$.

Ответ: 2.

1427. Так как $3^{\sin^2 \pi x} \geq 1$ и $\sqrt{1 + \cos \pi y} \geq 0$, то первое уравнение системы может быть выполнено тогда и только тогда, когда $\sin^2 \pi x = 0$ и $1 + \cos \pi y = 0$, то есть при $x = k$ и при $y = 2n + 1$; $k, n \in \mathbb{Z}$. Значит, x — любое целое число, а y — целое нечётное. Для того, чтобы второе уравнение системы имело смысл, нужно чтобы $11 + 41x - 12x^2 > 0$. Решением этого неравенства будет интервал: $-\frac{1}{4} < x < \frac{11}{3}$.

Так как x может быть только целым числом, то нам нужно рассмотреть лишь случаи: $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$. При этих x
 $\log_3(11 + 41x - 12x^2) \neq 0$. Значит, остается случай $x^3 - 4xy + y^2 - y - 2x + 1 = 0$.

1) При $x = 0$: $y^2 - y + 1 = 0$. Решений нет.

2) При $x = 1$: $1 - 4y + y^2 - y - 2 + 1 = 0$; $y^2 - 5y = 0$; $y_1 = 0$, $y_2 = 5$. Так как y может быть только целым нечётным числом, то имеем одно решение $x = 1$; $y = 5$.

3) При $x = 2$: $8 - 8y + y^2 - y - 4 + 1 = 0$; $y^2 - 9y + 5 = 0$; $D = 81 - 20 = 61$. Уравнение не имеет целых корней.

4) При $x = 3$: $27 - 12y + y^2 - y - 6 + 1 = 0$; $y^2 - 13y + 22 = 0$; $y_1 = 2$, $y_2 = 11$. Так как y может быть только целым нечётным числом, получаем следующее решение $x = 3$; $y = 11$.

Ответ: $(1; 5)$, $(3; 11)$.

1428. Из первого уравнения $\cos^2 \frac{\pi x}{2} = 0$ и $\sqrt{1 - \cos \pi y} = 0 \Rightarrow x = 2k + 1$, $y = 2n$; $k, n \in \mathbb{Z}$. То есть x — целое нечётное число; y — целое чётное число. ОДЗ исходной системы: $17y + 10 - 6y^2 \geq 0$; $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{10}{3}$. Нам достаточно рассмотреть случаи: $y = 0$ и $y = 2$. При этих значениях $y = 0$

и $y = 2$ $17y + 10 - 6y^2 \neq 0$, тогда $y^3 - 2xy + x^2 - 2x + 1 = 0$. При $y = 0$: $x = 1$ — является решением. При $y = 2$: $x^2 - 6x + 9 = 0$, $x = 3$ — является решением.

Ответ: $(1; 0)$, $(3; 2)$..

1429. Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x : $x^2 + (2 - 4y)x + 2y^2 + 1 = 0$. Его дискриминант $D = 8(y^2 - 2y)$. Для того, чтобы это уравнение (и вся система) имело решение, нужно, чтобы $y^2 - 2y \geq 0$. Второе уравнение имеет смысл при $2y - y^2 \geq 0$. Значит $2y - y^2 = 0$, то есть $y_1 = 0$; $y_2 = 2$. Из первого уравнения находим:

$$1) y = 0: x^2 + 2x + 1 = 0; x = -1;$$

2) $y = 2: x^2 - 6x + 9 = 0; x = 3$. Используя найденные пары x и y , из второго уравнения найдем z :

$$1) \sqrt{z-1} + \sqrt{z} = 1; z = 1; \text{значит } (-1; 0; 1) — \text{решение системы};$$

$$2) \sqrt{z+3} + \sqrt{z-2} = 1 — \text{уравнение корней не имеет.}$$

Ответ: $(-1; 0; 1)$..

1430. Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x : $x^2 + (1 - 3y)x + 2y^2 - y + 1 = 0$.

Его дискриминант $D = (1 - 3y)^2 - 4(2y^2 - y + 1) = y^2 - 2y - 3$. $D \geq 0$, иначе первое уравнение системы и, значит, вся система решений не имеет. Для того, чтобы второе уравнение системы удовлетворяло ОДЗ, необходимо, чтобы $3 + 2y - y^2 \geq 0$. Эти два неравенства выполняются одновременно, только когда $y^2 - 2y - 3 = 0$. Решениями этого уравнения будут $y_1 = -1$; $y_2 = 3$. При $y = -1$: $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$;

$y = 3$: $x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$. Получаем $x_1 = -2$, $y_1 = -1$ и $x_2 = 4$, $y_2 = 3$. Найдём соответствующие этим парам z .

1) При $x = -2$, $y = -1$ второе уравнение системы имеет вид: $\sqrt{z-1} + z = \sqrt{z-4}$. ОДЗ этого уравнения $z \geq 4$. Ясно, что левая часть для любых $z \geq 4$ больше правой. Поэтому это уравнение решений не имеет.

2) При $x = 4$, $y = 3$ имеем: $\sqrt{z+3} + z = \sqrt{z+8}$. Очевидно, что $z = 1$ — корень этого уравнения. Покажем, что других корней оно не имеет. Запишем его в виде: $\sqrt{z+8} - \sqrt{z+3} = z$; $\frac{5}{\sqrt{z+8} + \sqrt{z+3}} = z$

($\sqrt{z+8} + \sqrt{z+3} \neq 0$). Ясно, что правая часть этого уравнения — непрерывная возрастающая функция, а левая его часть — функция непрерывная убывающая. Поэтому уравнение $\sqrt{z+3} + z = \sqrt{z+8}$ не может иметь более одного корня.

Ответ: (4; 3; 1)..

1431. Преобразуем второе уравнение системы:

$$x^2 y (2^{3x} - 64) + (x+1)^3 (64 - 2^{3x}) = 0, \quad (2^{3x} - 64)(x^2 y - (x+1)^3) = 0.$$

Это равенство возможно в случаях: $2^{3x} = 64$ или $x^2 y = (x+1)^3$. То есть

$x = 2$ или $y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$. При $x = 2$ из первого уравнения находим, что $y = 8$. Это первое решение системы (2; 8).

Рассмотрим систему:
$$\begin{cases} y = 6 + \sqrt{4x - x^2}, \\ y = \frac{(x+1)^3}{x^2}. \end{cases}$$
 Ее ОДЗ: $\begin{cases} 0 < x \leq 4, \\ 6 \leq y \leq 8. \end{cases}$

Построим эскизы графиков первого и второго уравнений системы (см. рис. 387). Из рисунка видно, что эта система имеет два решения, причем

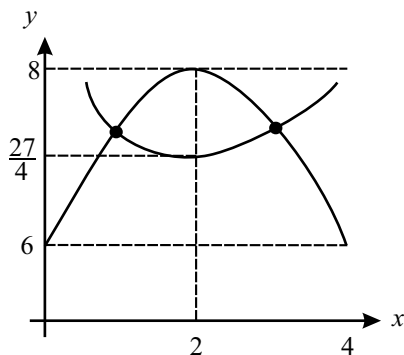


Рис. 387.

x и y попадают в ОДЗ системы. Всего же исходная система имеет три решения.

Ответ: 3.

1432. Пусть $t = 3^y > 0$, тогда первое уравнение системы имеет вид:

$$3x^2 - 12t(x-1) - 3x = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-4t) = 0. \text{ Отсюда } x = 1 \text{ или } x = 4t.$$

1) При $x = 1$ второе уравнение имеет вид $1 + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -4$, значит (1; -4) — решение системы.

2) При $x = 4t$ второе уравнение имеет вид $64t^3 + y + 3 = 0$. Но, так как $t = 3^y$, то $y = \log_3 t$. Рассмотрим функцию $f(t) = 64t^3 + \log_3 t + 3$,

определенную при $t > 0$. Так как $f'(t) = 64 \cdot 3 \cdot t^2 + \frac{1}{t \ln 3} > 0$ при $t > 0$,

то $f(t)$ возрастает на своей области определения. Так как $f\left(\frac{1}{81}\right) < 0$ и

$f(1) > 0$, то промежуток $\left(\frac{1}{81}; 1\right)$ содержит единственный корень t_0 уравнения $f(t) = 0$. Тогда $(4t_0; \log_3 t_0)$ — второе решение системы.

Ответ: 2..

1433. 1. ОДЗ: $x \neq -3$. Пусть $t = 4^y > 0$, тогда первое уравнение системы имеет вид $2x^2 - 6tx + 4x - 12t = 0$, $2x(x+2) - 6t(x+2) = 0$, $2(x+2)(x-3t) = 0$. Отсюда $x = -2$ или $x = 3t$.

2. При $x = -2$ второе уравнение имеет вид $1 - |y - 2| = 0$. Отсюда $y = 3$ или $y = 1$. Получим два решения: $(-2; 3)$ и $(-2; 1)$.

3. При $x = 3t$ второе уравнение имеет вид $\frac{1}{(3t+3)^3} - |y - 2| = 0$.

Так как $t = 4^y$, то $y = \log_4 t$. Рассмотрим $f(t) = \frac{1}{(3t+3)^3} - |\log_4 t - 2|$, определенную при $t > 0$.

а) При $t \geq 16$ $f(t) = \frac{1}{(3t+3)^3} + 2 - \log_4 t$. $f'(t) = -\frac{9}{(3t+3)^4} - \frac{1}{t \ln 4} < 0$ при $t \geq 16 \Rightarrow f(t)$ убывает на данном промежутке. Так как $f(16) > 0$ и $f(64) < 0$, то существует единственный корень $t_1 \in (16; +\infty)$ уравнения $f(t) = 0$. Значит, $(3t_1; \log_4 t_1)$ — третье решение системы.

б) При $0 < t < 16$ $f(t) = \frac{1}{(3t+3)^3} - 2 + \log_4 t$. $f'(t) = \frac{1}{t \ln 4} - \frac{9}{(3t+3)^4} =$

$= \frac{(3t+3)^4 - 9t \ln 4}{(3t+3)^4 \cdot t \cdot \ln 4}$. Рассмотрим $g(t) = (3t+3)^4 - 9t \ln 4$, $t \in [0; 16)$.

$g'(t) = 12(3t+3)^3 - 9 \ln 4$. Так как $g''(t) = 12 \cdot 3^2 \cdot (3t+3)^2 > 0$ ($g'(t)$ возрастает) и $g'(0) > 0$, то $g'(t) > 0$. Значит, $g(t)$ возрастает и так как $g(0) > 0$, то $g(t) > 0$ на своей области определения. Отсюда следует, что $f'(t) > 0$, то есть $f(t)$ возрастает при $t \in (0; 16)$. Так как $f(1) < 0$ и $f(16) > 0$, то существует единственный корень $t_2 \in (1; 16)$ уравнения $f(t) = 0$. Значит, $(3t_2; \log_4 t_2)$ — четвертое решение системы.

Ответ: 4.

1434. ОДЗ: $\begin{cases} x > 2, \\ y \neq 0. \end{cases}$

Упростим второе уравнение системы: $\frac{y}{2} + \frac{\log_2(x-2)}{y} = 1 + \frac{1}{2} \log_2(x-2)$;

$$\frac{y^2 + 2\log_2(x-2) - 2y - y\log_2(x-2)}{2y} = 0; (y-2)(y - \log_2(x-2)) = 0.$$

Отсюда $y_1 = 2$, $y_2 = \log_2(x-2)$.

1) Подставим $y = 2$ в первое уравнение: $4(x^2 + 2x + 1) + 1 - x = 0$; $4x^2 + 7x + 5 = 0$; $D < 0 \Rightarrow$ действительных корней нет.

2) Подставим $y = \log_2(x-2)$ в первое уравнение: $\log_2^2(x-2) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$. Пусть $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$, $g(x) = \log_2^2(x-2)$; $f'(x) = -\frac{x-3}{(x+1)^3}$, значит, на области определения при $x > 3$ $f(x)$

убывает, а при $x < 3$ возрастает; $g'(x) = 2\frac{\log_2(x-2)}{(x-2)\ln 2}$, поэтому $g(x)$ возрастает при $x > 3$ и убывает при $x < 3$. Так как $f(2,5) - g(2,5) < 0$, $f(3) - g(3) > 0$ и $f(4) - g(4) < 0$ и функции монотонны при $x > 3$ и $x < 3$, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет 2 корня.

Ответ: 2.

1435. 1) Преобразуем сначала второе уравнение системы к более удобному виду:

$$x + y = 1 - \sqrt{4xy + 3y - 7x - 5} \Leftrightarrow \sqrt{4xy + 3y - 7x - 5} = 1 - x - y. (*)$$

Возведём обе части (*) в квадрат: $4xy + 3y - 7x - 5 = (1 - x - y)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2xy - 5y + x^2 + 5x + 6 = 0$. Решим последнее уравнение как квадратное относительно y : $y_{1,2} = \frac{2x + 5 \pm 1}{2}$, $y_1 = x + 3$, $y_2 = x + 2$.

2) Прологарифмируем обе части первого уравнения по основанию 3. Получим $x + y\log_3 2 = -2$.

3) Решим системы уравнений

$$\begin{cases} x + y\log_3 2 = -2, \\ y = x + 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y\log_3 2 = -2, \\ y = x + 2. \end{cases}$$

Решением первой системы будет пара $(-\log_6 72; \log_6 3)$. Решением второй — пара $(-2; 0)$.

4) Непосредственной проверкой убеждаемся, что обе пары являются решением исходной системы.

Ответ: $(-2; 0)$, $(-\log_6 72; \log_6 3)$.

1436. а) Преобразуем подкоренное выражение во втором уравнении системы: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x+2)^2$. Подкоренное выражение должно быть неотрицательно: $(x+1)(x+2)^2 \geq 0$, но так как $x+1 \neq 0$,

то $x \in \{-2\} \cup (-1; +\infty)$.

б) Исследуем функцию $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 2$ (найдем графически число возможных корней). Производная $f'(x) = 12x^2 + 18x - 12$.

Стационарные точки $f'(x) = 0$. $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$. Точки экстремума:

$f'(x) = 6(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. $x = -2$ — точка максимума, $x = \frac{1}{2}$ — точка минимума (см. рис. 388).

$f(-2) = 30$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{4}$, $f(0) = 2$ (см. рис. 389).

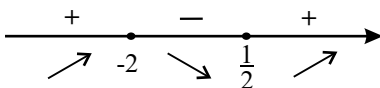


Рис. 388.

$x_3 < -2$, $x_3 \notin \text{ОДЗ}$. $0 < x_1 < \frac{1}{2}$, $x_2 > \frac{1}{2}$. x_1 и x_2 — могут быть решения-

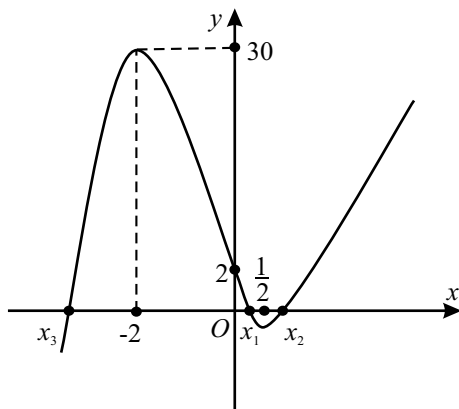


Рис. 389.

ми.

Пусть $x_1 = \alpha_1$, $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$; $x_2 = \alpha_2$, $\alpha_2 > \frac{1}{2}$. Проверим, могут ли они быть решениями второго уравнения:

$\frac{y}{\alpha_1 + 1} + 5 = 2^{\alpha_1 - y} \sqrt{\alpha_1^2(\alpha_1 + 5) + 4(2\alpha_1 + 1)} - \alpha_1 y$. Так как $\alpha_1 > 0$, то

корень существует.

$$\frac{y}{\alpha_1 + 1} + \alpha_1 y + 5 = 2^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y \sqrt{\alpha_1^2(\alpha_1 + 5) + 4(2\alpha_1 + 1)};$$

$$y\left(\frac{1}{\alpha_1 + 1} + \alpha_1\right) + 5 = 2^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y \sqrt{\alpha_1^2(\alpha_1 + 5) + 4(2\alpha_1 + 1)}$$

Вводя обозначения $B = \left(\frac{1}{\alpha_1 + 1} + \alpha_1\right)$ и

$A = 2^{\alpha_1} \cdot \sqrt{\alpha_1^2(\alpha_1 + 5) + 4(2\alpha_1 + 1)}$, получим уравнение

$By + 5 = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y$, $A > 0$, $B > 0$. Левая часть есть линейная возрастающая функция, а правая — показательная убывающая. Следовательно, они пересекаются только один раз, значит, для $x = \alpha_1$ существует единственный y . Аналогично рассуждаем для $x_2 = \alpha_2$. Таким образом, система имеет два решения.

Ответ: 2.

1437. а) Преобразуем подкоренное выражение первого уравнения системы:

$4x^3 - 3x - 1 = (x - 1)(2x + 1)^2$ (легко заметить, что $x = 1$ корень, так как $4 - 3 - 1 = 0$). Подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$(x - 1)(2x + 1)^2 \geq 0$; $\begin{cases} x \geq 1, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$ Так как при $x > 0$, то ОДЗ системы: $x \geq 1$.

б) Исследуем функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 3$. Производная:

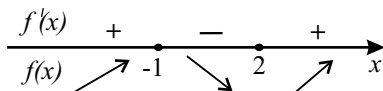


Рис. 390.

$f'(x) = 6(x + 1)(x - 2)$. Точки экстремума: $x = -1$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума (см. рис. 390). $f(-1) = 4$; $f(2) = 23$.

Обозначим через x_1, x_2, x_3 корни уравнения $f(x) = 0$. Тогда $x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 0$, $x_3 > 2$ (см. рис. 391). x_1 и x_2 не удовлетворяют условию $x \geq 1$. Пусть $x_3 = \alpha$. Подставим $x_3 = \alpha$ в первое уравнение:

$\alpha^{-y} \sqrt{4\alpha^3 - 3\alpha - 1} = \alpha y - 1$. Обозначим $\sqrt{4\alpha^3 - 3\alpha - 1} = A$.

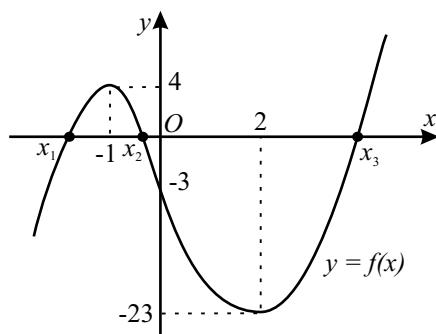


Рис. 391.

$A \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^y = \alpha y - 1$, ($A > 0, \alpha > 2$). Левая часть равенства есть всюду определенная убывающая, а правая — линейная возрастающая функции. Следовательно, уравнение имеет только один корень. Таким образом, система имеет только одно решение.

1438. Разложим первое уравнение на множители: $y^2(y-2) - 3^x(y-2) = 0$; $(y-2)(y^2 - 3^x) = 0$, что может быть только, если $y = 2$ или $y^2 = 3^x$. Рассмотрим эти два случая.

1. $y = 2$. Тогда из второго уравнения системы получим:

$$\frac{1}{3} \cdot 27^x - 2 \cdot 9^x + 3 \cdot 3^x - 1 = 0, \quad 27^x - 6 \cdot 9^x + 9 \cdot 3^x - 3 = 0. \text{ Обозначим}$$

$3^x = t$ ($t > 0$). Тогда $t^3 - 6t^2 + 9t - 3 = 0$. Определим, сколько корней имеет это уравнение на промежутке $t > 0$. Построим график функции $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 3$ (см. рис. 392).

$f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-1)(t-3)$. Причем $f(1) = 1$, $f(3) = -3$, $f(0) = -3$. Из рисунка видно, что уравнение $t^3 - 6t^2 + 9t - 3 = 0$ имеет три положительных ($t > 0$) решения. Значит, исходная система при $y = 2$ имеет три решения.

2. $y^2 = 3^x$. Тогда из второго уравнения системы получим:

$$27^x - 6 \cdot 9^x + 12 \cdot 3^x - 15 = 0.$$

Поступим аналогично случаю 1: $3^x = t$ ($t > 0$), $t^3 - 6t^2 + 12t - 15 = 0$. $f'(t) = 3t^2 - 12t + 12 = 3(t^2 - 4t + 4) = 3(t-2)^2$. Так как производная функции при переходе через точку $t = 2$ не меняет знак, то в точке $t = 2$ экстремума нет, и функция $f(t)$ всюду возрастает ($f'(t) \geq 0$). Причем $f(0) = -15$, $f(2) = -7$. Из рисунка 393 видим, что уравнение $t^3 - 6t^2 + 12t - 15 = 0$ имеет один положительный корень ($t > 0$). Но

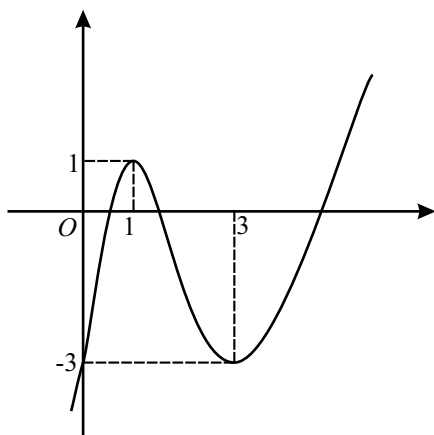


Рис. 392.

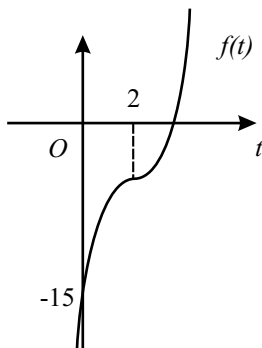


Рис. 393.

$y^2 = 3^x$, отсюда $y = \pm 3^{\frac{x}{2}}$. Значит, система имеет еще два решения. А всего их пять.

Ответ: 5.

1439. ОДЗ: $\begin{cases} \sin x - \cos y > 0, \\ \sin x + \cos y > 0. \end{cases}$ Из второго уравнения получаем:

$\log_2(\sin^2 x - \cos^2 y) = -1$, $\sin^2 x - \cos^2 y = \frac{1}{2}$. Из первого уравнения, преобразовав его к виду $5^{\cos x} = 5^{-\cos y}$, получаем $\cos x = -\cos y$, откуда $\cos^2 x = \cos^2 y$. Далее имеем: $(1 - \cos^2 x) - \cos^2 y = \frac{1}{2}$; $1 - 2\cos^2 y = \frac{1}{2}$,

$$\cos^2 y = \frac{1}{4}, \cos y = \pm \frac{1}{2}.$$

$$1. \cos y = \frac{1}{2}, y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \cos x = -\frac{1}{2}, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

ОДЗ удовлетворяют решения $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), k, n \in \mathbb{Z}.$

$$2. \cos y = -\frac{1}{2}, y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \cos x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

ОДЗ удовлетворяют решения $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), k, n \in \mathbb{Z}.$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right); \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$1440. \quad 1) \text{ ОДЗ: } x^3 - x^2 - 5x - 3 \geq 0; (x+1)^2(x-3) \geq 0, \begin{cases} x = -1, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

2) Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$. $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -\frac{2}{3}$. При $x \geq 3$ $f(x)$ возрастает (см. рис. 394), а, значит, обращается в 0 не более одного раза.

Заметим, что $x_1 = -1$ является корнем первого уравнения. Получим:

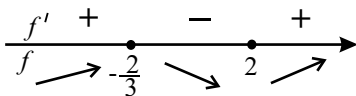


Рис. 394.

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = (x+1)(x^2 - 3x - 1); x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, x_3 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

$x_3 \in \text{ОДЗ}.$

3) При $x = -1$ второе уравнения системы примет вид: $3 + 11^{-1-y} = y$; $11^{-1-y} = y - 3$.

Пусть $f(y) = \left(\frac{1}{11}\right)^y - 11y + 33$ — монотонно убывает.

$f(3) = \left(\frac{1}{11}\right)^3 > 0$, $f(4) = \left(\frac{1}{11}\right)^4 - 44 + 33 < 0$. То есть $f(y)$ обращается в 0 на $(3; 4)$, а второе уравнение системы имеет корень $y \in (3; 4)$.

Если $x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$, то $3 < x_2 < 4$. При этом значении x второе урав-

нение примет вид: $k^{b-y} = y + c$, где $1 < k < 3$, $3 < b < 4$, $-3 < c < 2$. В левой части уравнения стоит непрерывная убывающая функция, а в правой — непрерывная возрастающая. При $y = -2$: левая часть $k^{b+2} > 0$, правая часть: $y + c < 0$. При $y = 4$: левая часть $k^{b-4} < 1$, правая часть $y + c > 1$. Это означает, что существует корень y_2 , причем $-2 < y_2 < 4$. Получаем еще одно решение: $(x_2; y_2)$. Таким образом, исходная система имеет два решения.

Ответ: 2.

$$1441. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} \sin x + \cos y > 0, \\ \cos x - \sin y > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = -\sin y, \\ (\sin x + \cos y)(\cos x - \sin y) = 2; \\ |\sin x| = |\cos y|, \\ \cos(\sin x + \cos y) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\sin y, \\ \cos x(\sin x + \cos y) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$1. \begin{cases} \sin x = -\cos y, \\ \cos x(\sin x - \sin x) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\cos y, \\ 0 = 1. \end{cases} \quad 0 \neq 1, \text{ решений нет.}$$

$$2. \begin{cases} \sin x = \cos y, \\ \cos x(\sin x + \sin x) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos y, \\ \sin 2x = 1; \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \Rightarrow$$

$$\cos y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

$$\text{Учитывая ОДЗ: } \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \quad \text{отсюда } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,$$

$$y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, k, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, k, n \in Z.$$

1442. Рассматривая первое уравнение данной системы как квадратное относительно y с коэффициентами, зависящими от x , и выражая y через x по формуле корней квадратного уравнения, получаем: $y = x$ или $y = 3x$. Аналогично, рассмотрев второе уравнение как квадратное относительно y и воспользовавшись теоремой Виета, получим: $y = \operatorname{tg} x$ или $y = \sqrt{8 - x^2}$. Таким образом, данная система равносильна совокупности следующих четырёх систем:

$$\begin{aligned}
 1) \begin{cases} y = x, \\ y^2 = 8 - x^2, y \geq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} & \quad 2) \begin{cases} y = 3x, \\ y^2 = 8 - x^2, y \geq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\
 3) \begin{cases} y = x, \\ y = \operatorname{tg} x, \\ 8 - x^2 \geq 0; \end{cases} & \quad 4) \begin{cases} y = 3x, \\ y = \operatorname{tg} x, \\ 8 - x^2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что первая и вторая системы имеют по одному решению: $(2; 2)$ и $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$ соответственно. Очевидно, что $x = 0, y = 0$ является решением третьей системы. Покажем, что это единственное ее решение. В силу нечётности функций $y = x$ и $y = \operatorname{tg} x$ достаточно показать, что система 3) не имеет решений при положительных x . На интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ значения $\operatorname{tg} x$ отрицательны, поэтому на этом интервале графики $y = x$ и $y = \operatorname{tg} x$ не пересекаются. Так как $\pi^2 > 9$, то при $x \geq \pi$ не выполнено условие $x^2 \leq 8$. Чтобы показать, что на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ также нет решений системы 3), исследуем поведение функции $d(x) = \operatorname{tg} x - x$ на этом интервале: $d'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0 \Rightarrow$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $d(x)$ возрастает, а поскольку $d(0) = 0$, то $d(x) > 0$, то есть $\operatorname{tg} x > x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, см. рис. 395.

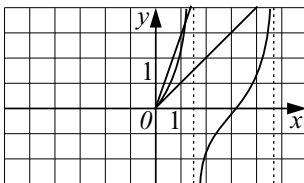


Рис. 395.

Далее, при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ графики $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 3x$ имеют ровно одну общую точку, пусть x_0 ее абсцисса. Тогда четвертая система имеет три решения: $(0; 0), (\pm x_0; \pm \operatorname{tg} x_0)$.

Таким образом, всего исходная система имеет 5 различных решений.

Ответ: 5.

1443. Исследуем функцию $f(x)$. $f'(x) = 4x^3 - 32 = 4(x^3 - 8) = 4(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. Так как $x^2 + 2x + 4 > 0$ при всех значениях x , то $f'(x) > 0$ при $x > 2$ и $f'(x) < 0$ при $x < 2$. Поэтому наименьшее значение функция $f(x)$ достигает в точке $x = 2$ и $f(2) = 2^4 - 32 \cdot 2 + 50 = 2$. Следовательно, $f(x) \geq 2$, $f(x) + 3 \geq 5$.

Тогда $g(f(x) + 3) = -4$. Уравнение $f(g(x) + 1) - g(f(x) + 3) = 6$ примет вид $f(g(x) + 1) = 2$. Обозначим $t = g(x) + 1$, тогда $f(t) = 2$; $t^4 - 32t + 50 = 2$; $(t - 2)^2(t^2 + 4t + 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t^2 + 4t + 12 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$.

Тогда $g(x) + 1 = 2$; $g(x) = 1$.

Решим уравнение $\frac{2}{5-x} + \log_8(3x - 4) = 1$; $\log_8(3x - 4) = 1 - \frac{2}{5-x}$.

При $x \in \left(\frac{4}{3}; 5\right)$ функция $\log_8(3x - 4)$ — возрастающая, а функция $1 - \frac{2}{5-x}$ — убывающая, следовательно, рассматриваемое уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим $x = 2$. Это единственный корень исходного уравнения.

Ответ: 2.

1444. Рассмотрим функцию $h(x) = 1 - f(x) = 1 - \frac{x+8}{x^2+2} = \frac{(x-3)(x+2)}{x^2+2}$.

Так как $x^2 + 2 > 0$ при любом значении x , то $h(x)$ всюду определена.

Исследуем $h(x)$ на указанных в определении функции $g(x)$ интервалах:

1. При $h(x) \in (-\infty; -4]$, неравенство $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2+2} \leq -4$ не имеет решений.

2. При $h(x) \in (-4; 2]$, двойное неравенство $-4 < \frac{(x-3)(x+2)}{x^2+2} \leq 2$ выполняется для любого значения x .

3. Из предыдущего пункта следует, что неравенство $h(x) > 2$ не имеет решений.

Таким образом, $g(1 - f(x)) = 2 - (1 - f(x)) = 1 + f(x)$ для любого значения x . Следовательно, исходное уравнение примет вид:

$$f(g(x)) + 1 + f(x) = f(x) + 2, f(g(x)) = 1.$$

Введём обозначение $g(x) = t$ и решим уравнение $f(t) = 1$. Тогда

$$\frac{t+8}{t^2+2} = 1, t^2 - t - 6 = 0, t_1 = -2, t_2 = 3.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1. $g(x) = -2$.

При $x \in (-\infty; -4]$ уравнение имеет вид $-x^2 - 6x - 10 = -2$. Тогда $x^2 + 6x + 8 = 0$, $x_1 = -4$, $x_2 = -2$. Так как $x_2 \notin (-\infty; -4]$, то $x = -4$ — корень исходного уравнения.

При $x \in (-4; 2]$ уравнение имеет вид $2 - x = -2$. Его корень $x = 4$ не принадлежит интервалу $(-4; 2]$.

При $x \in (2; +\infty)$ уравнение имеет вид $\frac{x+1}{2} + \log_3(x+6) - 1 = -2$,

$\frac{x+1}{2} + \log_3(x+6) = -1$. Это уравнение не имеет решений на рассматриваемом промежутке, так как $\frac{x+1}{2} + \log_3(x+6) > 0$ при $x > 2$.

2. $g(x) = 3$.

При $x \in (-\infty; -4]$ уравнение имеет вид $-x^2 - 6x - 10 = 3$, $x^2 + 6x + 13 = 0$. Корней нет.

При $x \in (-4; 2]$ уравнение имеет вид $2 - x = 3$. Тогда $x = -1$ — корень исходного уравнения.

При $x \in (2; +\infty)$ уравнение имеет вид $\frac{x+1}{2} + \log_3(x+6) - 1 = 3$,

$\frac{x+1}{2} + \log_3(x+6) = 4$, $\log_3(x+6) = 4 - \frac{x+1}{2}$. Функция $\log_3(x+6)$

возрастает на своей области определения, а функция $4 - \frac{x+1}{2}$ — убыва-

ющая. Следовательно, уравнение $\log_3(x+6) = 4 - \frac{x+1}{2}$ имеет не более одного корня. Подбором находим, что $x = 3$ — корень этого уравнения. Так как $3 \in (2; +\infty)$, то $x = 3$ также является корнем исходного уравнения.

Ответ: $-4; -1; 3$.

1445. Исследуем функцию $f(x) = -x^6 + 32x + 5$. $f'(x) = -6x^5 + 32$, $f'(x) = 0$, $x = \frac{2}{\sqrt[5]{6}}$. Так как $f'(x) > 0$ при $x < \frac{2}{\sqrt[5]{6}}$ и $f'(x) > 0$ при

$x > \frac{2}{\sqrt[5]{6}}$, то в точке $x = \frac{2}{\sqrt[5]{6}}$ достигается наибольшее значение, которое

равно $f\left(\frac{2}{\sqrt[5]{6}}\right) = \frac{320}{6\sqrt[5]{6}} + 5$. Так как $f(x) \leq \frac{320}{6\sqrt[5]{6}} + 5$, $f(x) - 44 \leq \frac{320}{6\sqrt[5]{6}} - 39$, $f(x) - 44 \leq 1$, то $g(f(x) - 44) = 3$. Тогда исходное уравнение $g(f(x) - 44) + f(g(x)) = 8$ примет вид $f(g(x)) = 5$.

Обозначим $g(x) = t$, тогда $f(t) = 5$, $-t^6 + 32t + 5 = 5$, $-t^6 + 32t = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$. Так как $g(x) \neq 3$, то исходное уравнение не имеет корней при $x \leq 1$. При $x > 1$ возможны два случая.

1. $g(x) = 0$, $\log_2 x + (x - 1)^3 = 0$, $\log_2 x = -(x - 1)^3$. При $x > 1$ функция $\log_2 x$ возрастает, а функция $-(x - 1)^3$ убывает. Следовательно, это уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим $x = 1$. Но $1 \notin (1; \infty)$.

2. $g(x) = 2$, $\log_2 x + (x - 1)^3 = 2$, $\log_2 x = 2 - (x - 1)^3$. При $x > 1$ функция $\log_2 x$ возрастает, а функция $2 - (x - 1)^3$ убывает. Следовательно, это уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим $x = 2$. Это единственный корень исходного уравнения.

Ответ: 2.

1446. 1. Оценим множество значений функции $f(x)$. Если $x < 3$, то $2x - 1 < 5$. Если $x \geq 3$, то $-5 \leq 3 \cos x - 2 \leq 1$. Следовательно, $f(x) < 5$ при всех значениях x . Так как $a_{n+1} = f(a_n)$ и $a_n > 0$, то $0 < a_n < 5$ при $n > 1$.

2. Так как $a_{40} = 1$, то возможны два случая.

а) $0 < a_{39} < 3$. Найдём a_{39} из уравнения $2a_{39} - 1 = 1$, $a_{39} = 1 \in (0; 5)$.
б) $3 \leq a_{39} < 5$. Найдём a_{39} из уравнения $3 \cos(a_{39}) - 2 = 1$, $\cos(a_{39}) = 1$, $a_{39} = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Ни для какого $n \in \mathbb{Z}$, $2\pi n \notin (0; 5)$. Значит, этот случай невозможен.

Аналогично доказывается, что $a_{38} = a_{37} = \dots = a_2 = 1$. Таким образом, $a_5 + a_8 + a_{11} = 1 + 1 + 1 = 3$.

Ответ: 3.

1447. 1. По условию $a_2 = f(a_1)$, значит, a_2 принадлежит множеству значений функции f . Оценим это множество сверху.

Если $x < 2$, то $x - 2 < 0$ и $\frac{2x+8}{x-2} = 2 + \frac{12}{x-2} < 2$.

Если $x \geq 2$, то $\sqrt[5]{\frac{x-5}{x-1}} = \sqrt[5]{1 - \frac{4}{x-1}} < 1$,

$\frac{8x-7}{2x+3} = 4 - \frac{19}{2x+3} \geq 4 - \frac{19}{7} > 0$. Следовательно, $\sqrt{\frac{8x-7}{2x+3}}$ определен

и $\sqrt{\frac{8x-7}{2x+3}} = \sqrt{4 - \frac{19}{2x+3}} < 2$. Значит, $\sqrt[5]{\frac{x-5}{x-1}} + \sqrt{\frac{8x-7}{2x+3}} < 3$ при $x \geq 2$. Поэтому $f(x) < 3$ при всех x . Таким образом, $a_2 < 3$.

2. Так как $a_3 = f(a_2) = f(f(a_1))$, то a_3 принадлежит множеству значений функции $f(f(x))$. Оценим его сверху.

Если $f(x) < 2$, то $f(f(x)) < 2$.

Если $2 \leq f(x) < 3$, то

$$\sqrt{\frac{f(x)-5}{f(x)-1}} < 0, \text{ а } \sqrt{\frac{8f(x)-7}{2f(x)+3}} = \sqrt{4 - \frac{19}{2f(x)+3}} < 2. \text{ Значит,}$$

$f(f(x)) < 2$ для всех x . Поэтому $a_3 < 2$.

Получаем $a_n < 2, n = 3, 4, \dots, 99$.

3. Так как $a_{99} = 0, a_{98} < 2$ и $f(a_{98}) = a_{99}$, то $\frac{2a_{98}+8}{a_{98}-2} = 0; 2a_{98} = -8; a_{98} = -4$.

Так как $a_{98} = -4, a_{97} < 2$ и $f(a_{97}) = a_{98}$, то $\frac{2a_{97}+8}{a_{97}-2} = -4; 2a_{97}+8 = -4a_{97}+8, a_{97} = 0$.

Аналогично $a_{96} = -4, a_{95} = 0, a_{94} = -4, a_{93} = 0, \dots, a_{40} = -4, \dots, a_{33} = 0$. Значит, $a_{33} + a_{40} = -4$.

Ответ: -4 .

1448. 1. По условию $a_{n+1} = f(a_n), n = 1, 2, \dots, 25$. Это значит, что a_n принадлежит множеству значений функции $f(x)$ при $1 < n \leq 25$. Оценим это множество.

При $x < 0, f(x) = 4 \cos \frac{\pi x}{12} - 2$. Тогда $-1 \leq \cos \frac{\pi x}{12} \leq 1;$
 $-4 \leq 4 \cos \frac{\pi x}{12} \leq 4; -6 \leq 4 \cos \frac{\pi x}{12} - 2 \leq 2; -6 \leq f(x) \leq 2$.

При $x \geq 0, f(x) = \frac{32}{3x+16} - 6$. Тогда, с одной стороны, $3x \geq 0;$
 $3x+16 \geq 16; \frac{32}{3x+16} \leq 2; \frac{32}{3x+16} - 6 \leq -4; f(x) \leq -4$. С другой стороны, $\frac{32}{3x+16} > 0; \frac{32}{3x+16} - 6 > -6; f(x) > -6$. Таким образом, $-6 < f(x) \leq -4$.

Итак, $E(f) = [-6; 2]$.

2. Так как $a_{26} = 0$, то $f(a_{25}) = 0$. Найдём a_{25} из уравнения $f(x) = 0$.

При $x < 0$ уравнение имеет вид $4 \cos \frac{\pi x}{12} - 2 = 0$. Его корни $x = \pm 4 + 24n, n \in \mathbb{Z}$. Так как $x < 0$ и $x \in E(f)$, то $x = -4$.

При $x \geq 0$ уравнение имеет вид $\frac{32}{3x+16} - 6 = 0$. Его корень $x = -\frac{32}{9}$ не удовлетворяет условию $x \geq 0$.

Итак, $a_{25} = -4$.

3. Так как $a_{25} = -4$, то $f(a_{24}) = -4$. Найдём a_{24} из уравнения $f(x) = -4$. При $x < 0$ уравнение имеет вид $4 \cos \frac{\pi x}{12} - 2 = -4$. Его корни $x = \pm 8 + 24n, n \in \mathbb{Z}$. Так как $x < 0$ и $x \in E(f)$, то этот случай невозможен.

При $x \geq 0$ уравнение имеет вид $\frac{32}{3x+16} - 6 = -4$. Его корень $x = 0$ удовлетворяет условию $x \geq 0$ и принадлежит $E(f)$.

Таким образом, $a_{24} = 0$.

4. Аналогично доказывается, что $a_{23} = -4, a_{22} = 0$ и т. д., то есть $a_{2k+1} = -4, a_{2k} = 0, k = 1, 2, 3, \dots, 12$. Значит, $a_3 + a_4 + a_5 = -4 + 0 - 4 = -8$.

Ответ: -8 .

1449. 1. Так как $a_{30} = 2$, то $f(a_{29}) = 2$. Найдём a_{29} из уравнения $f(x) = 2$.

При $x < 3$ уравнение имеет вид $4 - \frac{8}{x+2} = 2$. Его корень $x = 2$ удовлетворяет условию $x < 3$.

При $x \geq 3$ уравнение имеет вид $\frac{x^2}{x+1} + 1 = -\log_3 \frac{x}{2}$. Его ОДЗ $x > 0$.

Рассмотрим функции $f_1(x) = \frac{x^2}{x+1} + 1$ и $f_2(x) = -\log_3 \frac{x}{2}$ при $x \geq 3$.

Так как $f'_1(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} > 0$ при $x \geq 3$, то $f_1(x)$ возрастает при $x \geq 3$.

Так как $f'_2(x) = -\frac{1}{x \ln 3} < 0$ при $x \geq 3$, то $f_2(x)$ убывает при $x \geq 3$. Так

как $f_1(3) = \frac{13}{4}$, а $f_2(3) = -\log_3 \frac{3}{2} = -1 + \log_3 2 < 0$, то $f_1(3) > f_2(3)$.

Следовательно, уравнение $f_1(x) = f_2(x)$ не имеет корней при $x \geq 3$.

Итак, $a_{29} = 2$.

2. Аналогично доказывается, что $a_{28} = a_{27} = a_{26} = \dots = a_1 = 2$.

Значит, $7a_9 - 2a_{17} = 7 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 10$.

Ответ: 10 .

1450. Найдём $f(x) + f(-x) = 3^x + 2x - \ln 5 + 3^{-x} + 2(-x) - \ln 5 = 3^x + 3^{-x} - 2 \ln 5$.

$$f(x) + f(-x) = 3^x + \frac{1}{3^x} - 2 \ln 5 = \frac{(3^x)^2 + 1 - 2 \cdot 3^x + 2 \cdot 3^x}{3^x} - 2 \ln 5 = \frac{(3^x - 1)^2 + 2 \cdot 3^x}{3^x} - 2 \ln 5 = \frac{(3^x - 1)^2}{3^x} + 2 - 2 \ln 5 \geq 2 - 2 \ln 5. \text{ Так}$$

как $\ln 5 < 2$, $-2 \ln 5 > -4$, то $2 - 2 \ln 5 > -2 \Rightarrow f(x) + f(-x) > -2 \Rightarrow g(f(x) + f(-x)) = \ln 5$. Заданное уравнение примет вид: $f(g(x)) + \ln 5 = 5$; $3^g + 2g - \ln 5 + \ln 5 = 5$; $3^g + 2g = 5$, где $g = 5^{x^2+2x-2} - 4$.

$y = 3^g + 2g$ — возрастающая функция как сумма двух возрастающих, значит, любое значение может принимать не более одного раза; $y(1) = 3^1 + 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow g = 1$ — единственный корень уравнения $3^g + 2g = 5$.

$g(x) = 1$ может быть только при $x < -2$; $5^{x^2+2x-2} - 4 = 1$; $5^{x^2+2x-2} = 5$; $x^2 + 2x - 2 = 1$; $x^2 + 2x - 3 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = -3$. Так как $x < -2$, $x = -3$ — корень уравнения.

Ответ: -3 .

1451. Обозначим $t = x^{\frac{3}{2}}$ и перепишем уравнение в виде

$$\frac{5t^2}{5t^2 - 7t + 6} + \frac{2t^2}{5t^2 - t + 6} = t, t \left(\frac{5t}{5t^2 - 7t + 6} + \frac{2t}{5t^2 - t + 6} - 1 \right) = 0.$$

Очевидно, что $t = 0$ — корень последнего уравнения, который приводит нас к одному из корней исходного уравнения $x = 0$ (это значение удовлетворяет исходному уравнению).

Решим теперь уравнение $\frac{5t}{5t^2 - 7t + 6} + \frac{2t}{5t^2 - t + 6} = 1$.

Поскольку значение $t = 0$ не является его корнем, разделим числитель и знаменатель каждой дроби на t : $\frac{5}{5t + \frac{6}{t} - 7} + \frac{2}{5t + \frac{6}{t} - 1} = 1$.

Введём новую переменную $u = 5t + \frac{6}{t}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{5}{u - 7} + \frac{2}{u - 1} = 1. \text{ Далее получаем равносильную систему:}$$

$$\begin{cases} 5(u - 1) + 2(u - 7) = (u - 7)(u - 1), \\ u \neq 1, u \neq 7, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} u^2 - 15u + 26 = 0, \\ u \neq 1, u \neq 7. \end{cases}$$

Отсюда $u_1 = 13$, $u_2 = 2$. Возвращаясь к переменной t , получим два квад-

ратных уравнения: 1) $5t + \frac{6}{t} = 13$; $5t^2 - 13t + 6 = 0$; $t_1 = 2, t_2 = 0,6$;

2) $5t + \frac{6}{t} = 2$; $5t^2 - 2t + 6 = 0$ — уравнение не имеет действительных корней.

Вернемся к исходной переменной, решив следующие два уравнения:

$x^{\frac{3}{2}} = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$; $x^{\frac{3}{2}} = 0,6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{25}}$. Непосредственной проверкой

убеждаемся, что значения $x_1 = \sqrt[3]{4}$ и $x_2 = \sqrt[3]{\frac{9}{25}}$ — корни исходного уравнения.

Ответ: $0; \sqrt[3]{\frac{9}{25}}; \sqrt[3]{4}$.

1452. Перепишем данное уравнение в виде:

$$2x^6 - \cos x^3 = 2^{(2x^2+x)^2} - \cos(2x^2 + x).$$

1. Заметим, что последнее уравнение является уравнением вида:

$f(x^3) = f(2x^2 + x)$, где $f(t) = 2^{t^2} - \cos t$. Функция $f(t)$ чётна.

2. Докажем, что $f(t)$ возрастает на $(0; +\infty)$.

$$f'(t) = 2 \ln 2 \cdot t \cdot 2^{t^2} + \sin t.$$

а) $0 < t \leq 1 \Rightarrow 0 < \sin t < t$; $2^{t^2} > 1 \Rightarrow$

$$f'(t) > 2 \cdot \ln 2 \cdot \sin t \cdot 1 + \sin t = \sin t(2 \ln 2 + 1) > 0.$$

б) $t > 1 \Rightarrow 2 \ln 2 \cdot t \cdot 2^{t^2} > 4 \cdot \ln 2$; $\sin t \geq -1 \Rightarrow$

$$f'(t) = 2 \ln 2 \cdot t \cdot 2^{t^2} + \sin t > 4 \ln 2 - 1 = \ln 16 - \ln e = \ln \frac{16}{e} > 0, \text{ так как}$$

$e > 1$ и $\frac{16}{e} > 1$. Таким образом, $f'(t) > 0$ на $(0; +\infty) \Rightarrow f(t)$ возрастает на $(0; +\infty)$.

3. Так как $f(t)$ чётна и на $(0; +\infty)$ возрастает, то $f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow t_1 = \pm t_2$.

Это означает, что данное уравнение равносильно объединению уравнений:

$$\begin{cases} x^3 = 2x^2 + x, \\ x^3 = -2x^2 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2x - 1) = 0, \\ x(x^2 + 2x + 1) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1 + \sqrt{2}, \\ x = 1 - \sqrt{2}, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ: $0, -1, 1 \pm \sqrt{2}$.

1453. $x^{12} + 82 \cos(10x - 21) = 82 \cos(x^2) + (10x - 21)^6$,

$$x^{12} - 82 \cos(x^2) = (10x - 21)^6 - 82 \cos(10x - 21).$$

1. Заметим, что полученное уравнение является уравнением вида

$f(x^2) = f(10x - 21)$, где $f(t) = t^6 - 82 \cos t$.

Функция $f(t)$ — чётная.

2. Покажем, что $f(x)$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$, то есть $f'(t) > 0$ при $t > 0$. $f'(t) = 6t^5 + 82 \sin t$,

а) $0 < t \leq \pi$, $6t^5 > 0$, $82 \sin t > 0$, значит $6t^5 + 82 \sin t > 0$;

б) $t > 0$, $6t^5 > 6 \cdot \pi^5$, $-82 < 82 \sin t < 82$, $\Rightarrow 6t^5 + 82 \sin t > 0$.

Следовательно, $f'(t) > 0$ при $t \in (0; +\infty)$.

3. Так как $f(t)$ — чётная функция и на $(0; +\infty)$ возрастает, то $f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow t_1 = \pm t_2$.

Это означает, что данное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x^2 = 10x - 21, \\ x^2 = 21 - 10x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 21 = 0, \\ x^2 + 10x - 21 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 7, \\ x = -5 - \sqrt{46}, \\ x = -5 + \sqrt{46}. \end{cases}$$

Ответ: $-5 - \sqrt{46}$; $-5 + \sqrt{46}$; 3; 7.

1454. $x^4(x^2 + \sqrt{a^2 - a - 1}) + |8 - a| + |27 + a| - \sqrt{(8 - a)(27 + a)} = 21$.

1. Найдём допустимое значение a .

$$\begin{cases} a^2 - a - 1 \geq 0, \\ (a - 8)(a + 27) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \\ a \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \\ -27 \leq a \leq 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -27 \leq a \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq a \leq 8. \end{cases}$$

2. $x^4(x^2 + \sqrt{a^2 - a - 1}) + 8 - a + 27 + a - \sqrt{(8 - a)(a + 27)} = 21$,

$x^4(x^2 + \sqrt{a^2 - a - 1}) - \sqrt{(8 - a)(a + 27)} + 14 = 0$ (1).

3. Функция $f(x) = x^4(x^2 + \sqrt{a^2 - a - 1}) - \sqrt{(8 - a)(a + 27)} + 14$ чётная, поэтому если $f(x) = 0$, то $f(-x) = 0$. Значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет нечётное число корней только тогда, когда одним из корней является число 0. Найдём все значения параметра a , при которых $x = 0$ является корнем уравнения (1). Получим:

$$-\sqrt{(8 - a)(a + 27)} + 14 = 0,$$

$$(8 - a)(a + 27) = 196, a^2 + 19a - 20 = 0, a = -20,$$

$a = 1$ — не входит в область допустимых значений a .

Подставим значение $a = -20$ в уравнение (1) и найдём количество

корней.

$$x^4(x^2 + \sqrt{(-20)^2 + 20 - 1}) - \sqrt{(8 + 20)(-20 + 27)} + 14 = 0,$$

$$x^4(x^2 + \sqrt{419}) - 14 + 14 = 0,$$

$$x^4(x^2 + \sqrt{419}) = 0,$$

$x = 0$ — единственный корень уравнения (1).

Исходное уравнение имеет единственное решение при $a = -20$.

Ответ: -20 .

1455. Пусть $N_1(p)$ — число различных корней первого уравнения (которое зависит от значений параметра p), а $N_2(p)$ — число различных корней второго уравнения. Таким образом, нужно найти такие значения p , при которых выполняется соотношение $N_1(p) = N_2(p)$.

Определим количество корней первого уравнения в зависимости от значений параметра p . Если $p = 0$, то уравнение становится линейным:

$3x + 4 = 0$, имеющим один корень $x = -\frac{4}{3}$. Пусть теперь $p \neq 0$. Тогда

$D = (p + 3)^2 - 16p = p^2 - 10p + 9 = (p - 1)(p - 9)$. Это означает, что при $p \in (1; 9)$ уравнение не имеет корней (этот случай исключается условием задачи), при $p = 1; 9$ уравнение имеет один корень, при $p \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$ уравнение имеет два различных корня.

Рассмотрим второе уравнение. Областью допустимых значений переменной x является $x \geq 5$. При $x \geq 5$ правая часть уравнения положительна, значит уравнение может иметь корни только в случае $16 - p > 0$, $p < 16$ (так как $x - 1 > 0$ при $x \geq 5$). Но при $p < 16$ в левой части уравнения стоит возрастающая функция, а в правой части — убывающая. Таким образом, число различных корней второго уравнения не может быть более одного: $N_2(p) \leq 1$.

Из соотношения $N_1(p) = N_2(p)$ теперь сразу следует, что нужно искать такие значения p , при которых $N_1(p) = 1$ и $N_2(p) = 1$. $N_1(p) = 1$ при $p = 0; 1; 9$. Осталось подставить эти значения параметра во второе уравнение и проверить, имеет ли оно корень.

$$p = 0: \frac{x-1}{16} = \frac{1}{\sqrt{x-5}+4}, x = 5 \text{ — корень.}$$

$$p = 1: \frac{x-1}{15} = \frac{1}{\sqrt{x-5}+4}. \text{ Но } \frac{x-1}{15} \geq \frac{4}{15} > \frac{1}{4} \geq \frac{1}{\sqrt{x-5}+4} \text{ при } x \geq 5. \text{ Нет решений.}$$

$$p = 9: \frac{x-1}{7} = \frac{1}{\sqrt{x-5}+4}. \text{ Но } \frac{x-1}{7} \geq \frac{4}{7} > \frac{1}{4} \geq \frac{1}{\sqrt{x-5}+4} \text{ при } x \geq 5.$$

Нет решений.

Ответ: 0..

$$1456. x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 \sin 2 = 0 \quad (1)$$

Рассмотрим три случая.

1. $a = 0$ — уравнение (1) имеет единственное решение $x = 0$.

2. $a > 0$.

Приведём уравнение к виду

$$x^2 + a^2 \sin 2 = 2a \sin(\cos x).$$

Уравнение (1) имеет единственное решение, когда графики функций $f(x) = x^2 + a^2 \sin 2$ и $g(x) = 2a \sin(\cos x)$ имеют только одну общую точку. Функции $f(x)$ и $g(x)$ — чётные, значит, их графики симметричны относительно оси ординат.

$$E(f) = [a^2 \sin 2; +\infty), E(g) = [-2a \sin 1; 2a \sin 1].$$

Следовательно, единственное решение уравнение (1) имеет при условии $a^2 \sin 2 = 2a \sin 1$ (см. рис. 396).

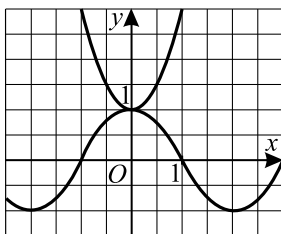


Рис. 396.

$$\text{Так как } a > 0, \text{ то } a = \frac{2 \sin 1}{\sin 2} = \frac{2 \sin 1}{2 \sin 1 \cos 1} = \frac{1}{\cos 1}.$$

3. $a < 0$. Графики функций $f(x)$ и $g(x)$ если имеют общие точки, то больше одной. В этом случае уравнение (1) имеет более одного решения, что противоречит условию задачи (см. рис. 397).

$$\text{Ответ: } 0; \frac{1}{\cos 1}.$$

$$1457. b^4 - 8b \cos(\cos x) - 9x^2 = 0 \quad (1).$$

Рассмотрим три случая.

1. $b = 0$ — уравнение (1) имеет единственное решение $x = 0$.

2. $b > 0$.

Приведём уравнение к виду $b^4 - 9x^2 = 8b \cos(\cos x)$.

Уравнение (1) имеет единственное решение, когда графики функций

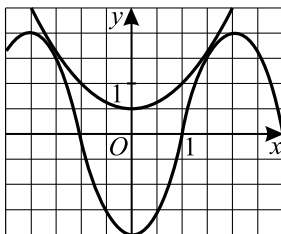


Рис. 397.

$f(x) = b^4 - 9x^2$ и $g(x) = 8b \cos(\cos x)$ имеют только одну общую точку. Функции $f(x)$ и $g(x)$ чётные, значит их графики симметричны относительно оси ординат.

$E(f) = (-\infty; b^4]$, $E(g) = [8b \cos 1; 8b]$, следовательно единственное решение уравнение (1) имеет при условии $b^4 = 8b \cos 1$ (см. рис. 398).

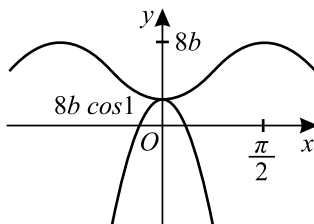


Рис. 398.

Так как $b > 0$, то $b = 2\sqrt[3]{\cos 1}$.

3. $b < 0$. $f(0) = b^4$, $g(0) = 8b \cos 1 < 0$, $f(0) \neq g(0)$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ — чётные, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ при $b < 0$ имеет чётное число корней, что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $0; 2\sqrt[3]{\cos 1}$.

1458. ОДЗ системы уравнений:
$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ z > 0. \end{cases}$$

Выполним замену $u = \lg x$, $v = \lg y$, $w = \lg z$ и учитывая, что первое уравнение системы можно записать в виде $\lg x + \lg y + \lg z = 1$, получим систему:

$$\begin{cases} u + v + w = 1, \\ u^2 + v^2 + w^2 = \frac{17}{2}, \\ uvw = -\frac{9}{2}. \end{cases} \quad (*)$$

Так как $(u + v + w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw)$ и $u + v + w = 1$, то можно записать систему в виде:

$$\begin{cases} u + v + w = 1, \\ uv + uw + vw = -\frac{15}{4}, \\ uvw = -\frac{9}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v + w = 1 - u, \\ vw = -\frac{15}{4} - u(1 - u), \\ u\left(-\frac{15}{4} - u(1 - u)\right) = -\frac{9}{2}. \end{cases} \quad (**)$$

Решаем третье уравнение последней системы:

$$-\frac{15}{4}u - u^2 + u^3 + \frac{9}{2} = 0;$$

$$4u^3 - 4u^2 - 15u + 18 = 0.$$

Так как $u = -2$ является корнем последнего уравнения, то его можно переписать в виде:

$$(u + 2)(2u - 3)^2 = 0; \quad u_1 = -2, \quad u_2 = \frac{3}{2}.$$

При $u = -2$ первые два уравнения системы уравнений $(**)$ образуют систему:

$$\begin{cases} v + w = 3, \\ vw = \frac{9}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - w, \\ w(3 - w) = \frac{9}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - w, \\ 4w^2 - 12w + 9 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{3}{2}, \\ w = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, получено первое решение системы $(*)$:

$$\left(-2; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

При $u = \frac{3}{2}$ аналогично получается ещё два решения системы $(*)$:

$$\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -2\right) \text{ и } \left(\frac{3}{2}; -2; \frac{3}{2}\right).$$

Возвращаясь к переменным x , y и z , получим три решения исход-

ной системы уравнений: $\left(\frac{1}{100}; 10\sqrt{10}; 10\sqrt{10}\right)$, $\left(10\sqrt{10}; \frac{1}{100}; 10\sqrt{10}\right)$ и $\left(10\sqrt{10}; 10\sqrt{10}; \frac{1}{100}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{100}; 10\sqrt{10}; 10\sqrt{10}\right)$, $\left(10\sqrt{10}; \frac{1}{100}; 10\sqrt{10}\right)$, $\left(10\sqrt{10}; 10\sqrt{10}; \frac{1}{100}\right)$.

1459. Запишем уравнение в виде $\sqrt[4]{x^3} - x = |x - k|$ и рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[4]{x^3} - x$. Областью определения $f(x)$ является полуинтервал $[0; +\infty)$. Корни уравнения $f(x) = 0$: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. Уравнение $f'(x) = 0$; $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}} - 1 = 0$ имеет корень $x_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$. Из рисунка 399 определяем промежутки возрастания и убывания $f(x)$.

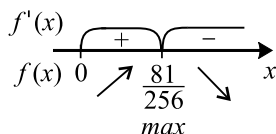


Рис. 399.

Так как $f'(1) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} > -1$, то из рисунка 400 следует, что исходное уравнение имеет один корень при $k = 1$. Ещё одно возможное значение k можно получить из условий (см. рис. 401): $\begin{cases} f'(x_0) = 1, \\ k = x_0 - f(x_0). \end{cases}$

$$f'(x_0) = 1; \frac{3}{4\sqrt[4]{x_0}} - 1 = 1; x_0 = \left(\frac{3}{8}\right)^4.$$

$$\begin{aligned} k = x_0 - f(x_0) &= \left(\frac{3}{8}\right)^4 - \sqrt[4]{\left(\frac{3}{8}\right)^{12}} + \left(\frac{3}{8}\right)^4 = -\left(\frac{3}{8}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^4 = \\ &= \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left(\frac{3}{4} - 1\right) = -\frac{27}{2048}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{27}{2048}; 1$.

1460. 1) Рассмотрим функцию $h(x) = x^2 - \frac{5a}{2 \cos x - 3} + 10$.

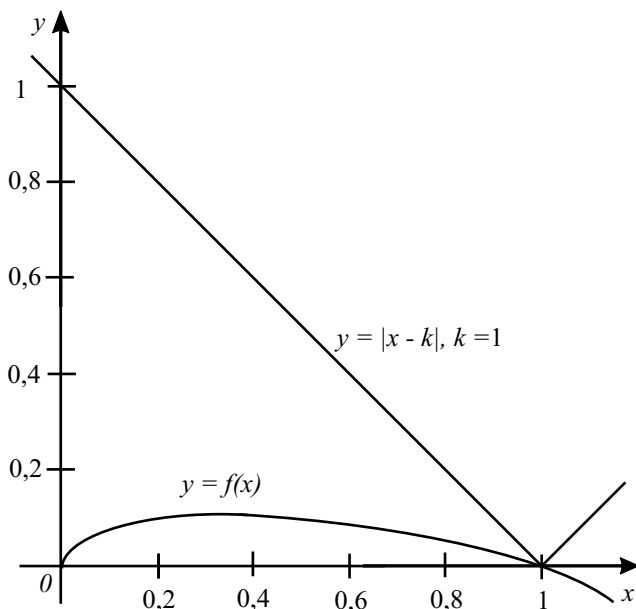


Рис. 400.

Так как $h(-x) = (-x)^2 - \frac{5a}{2 \cos(-x) - 3} + 10 = x^2 - \frac{5a}{2 \cos x - 3} + 10 = h(x)$, то функция $h(x)$ — чётная. Следовательно, заданное уравнение может иметь единственное решение только тогда, когда $x = 0$ — корень и других корней нет. При этом значении x получаем: $-\frac{5a}{-1} + 10 = 0$; $a = -2$.

2) Проверим, что при $a = -2$ других решений, кроме $x = 0$, нет. Для найденного значения a преобразуем исходное уравнение к виду

$$x^2 + 10 = -\frac{10}{2 \cos x - 3}.$$

Пусть $g(x) = x^2 + 10$, $f(x) = -\frac{10}{2 \cos x - 3}$. Найдём количество точек пересечения графиков функций $g(x)$ и $f(x)$.

$$3) -2 \leq 2 \cos x \leq 2; -5 \leq 2 \cos x - 3 \leq -1; -1 \leq \frac{1}{2 \cos x - 3} \leq -\frac{1}{5};$$

$$2 \leq \frac{-10}{2 \cos x - 3} \leq 10, f(x) \leq 10.$$

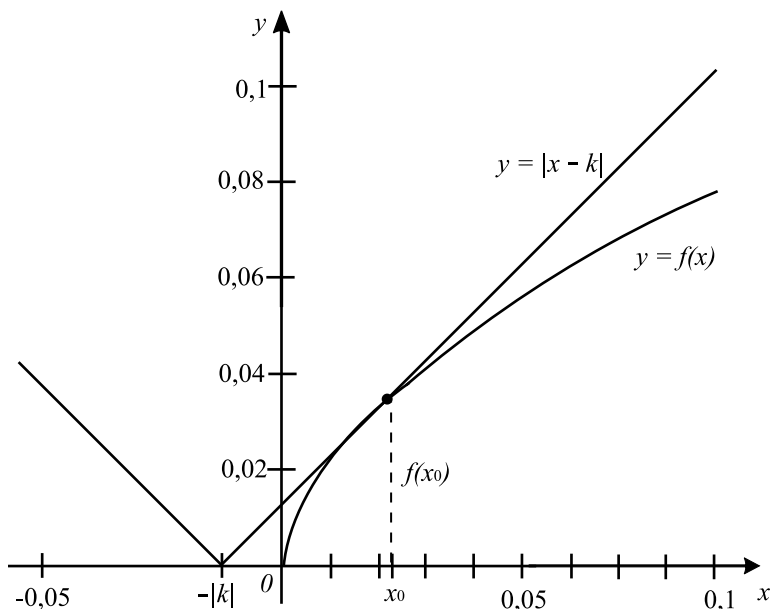


Рис. 401.

4) Графиком функции $g(x) = x^2 + 10$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $(0; 10)$. Поэтому $g(x) \geq 10$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, графики функций $g(x)$ и $f(x)$ пересекаются только в случае $\begin{cases} f(x) = 10, \\ g(x) = 10, \end{cases}$ то есть получаем единственное решение $x = 0$. Таким образом, значение параметра $a = -2$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: -2 .

1461. 1) Рассмотрим функцию $h(x) = 15 + 7x^2 - \frac{3 \sin \cos x}{4a}$. Так как

$$h(-x) = 15 + 7(-x)^2 - \frac{3 \sin \cos(-x)}{4a} = 15 + 7x^2 - \frac{3 \sin \cos x}{4a} = h(x), \text{ то}$$

функция $h(x)$ — чётная. Следовательно, заданное уравнение может иметь единственное решение только тогда, когда $x = 0$ — корень и других корней нет. При этом значении x получаем:

$$15 - \frac{3 \sin 1}{4a} = 0; a = \frac{\sin 1}{20}.$$

2) Проверим, что при $a = \frac{\sin 1}{20}$ других решений, кроме $x = 0$, нет.

Для найденного значения a преобразуем исходное уравнение к виду

$$15 + 7x^2 = \frac{15 \sin \cos x}{\sin 1}.$$

3) $-1 \leq \cos x \leq 1$. Рассмотрим функцию $\tilde{f}(t) = \sin t$, для $t \in [-1, 1]$. На этом промежутке функция возрастает и $\sin t \leq \sin 1$. Следовательно,

$$\frac{15 \sin \cos x}{\sin 1} \leq \frac{15 \sin 1}{\sin 1} = 15.$$

Так как $15 + 7x^2 \geq 15$, то уравнение $15 + 7x^2 = \frac{15 \sin x \cos x}{\sin 1}$ эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} 15 + 7x^2 = 15, \\ \frac{15 \sin \cos x}{\sin 1} = 15. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = 0$. Следовательно, значение параметра $a = \frac{\sin 1}{20}$ — искомое.

Ответ: $\frac{\sin 1}{20}$.

1462. 1) Найдём модуль разности корней уравнения $ax^2 + 2x - 2,25 = 0$.

$D = 4 + 9a$, $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{9a + 4}}{2a}$, $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{9a + 4}}{2a}$. Так как $a > 0$, то

$$x_2 > x_1, \text{ то есть } |x_2 - x_1| = x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{9a + 4}}{a}.$$

2) Найдём расстояние между точками экстремума функции $f(x)$.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 6a, f'(x) = 0, 6x^2 - 18x - 6a = 0, x^2 - 3x - a = 0,$$

$$D = 9 + 4a, x_1 = \frac{3 - \sqrt{4a + 9}}{2}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{4a + 9}}{2}, |x_2 - x_1| = x_2 - x_1 = \sqrt{4a + 9}.$$

3) Решим неравенство $\frac{\sqrt{9a + 4}}{a} \leq \sqrt{4a + 9}$. Так как $a > 0$, то неравенство

примет вид $\sqrt{9a + 4} \leq a \cdot \sqrt{4a + 9}$, $a^2(4a + 9) \geq 9a + 4$, $4a^3 + 9a^2 - 9a - 4 \geq 0$, $4(a - 1)(a^2 + a + 1) + 9a(a - 1) \geq 0$, $(a - 1)(4a^2 + 4a + 4 + 9a) \geq 0$, $(a - 1)(4a^2 + 13a + 4) \geq 0$. При $a > 0$ $4a^2 + 13a + 4 > 0$, поэтому последнее неравенство равносильно $a - 1 \geq 0$, откуда $a \geq 1$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

1463. 1) Найдём расстояние между точками экстремума функции $f(x)$.
 $f'(x) = 3x^2 + 12x - 9a$, $f'(x) = 0$, $x^2 + 4x - 3a = 0$, $D = 16 + 12a$,

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{4+3a}}{2} = -2 \pm \sqrt{4+3a}, |x_2 - x_1| = 2\sqrt{4+3a}.$$

2) Найдём модуль разности корней уравнения $ax^2 + 2\sqrt{6}x - 2 = 0$.

$$D = 24 + 8a, x_1 = \frac{-2\sqrt{6} - \sqrt{24+8a}}{2a}, x_2 = \frac{-2\sqrt{6} + \sqrt{24+8a}}{2a}.$$

Так как $a > 0$, то $|x_2 - x_1| = x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{24+8a}}{a}$.

3) Решим неравенство $2\sqrt{4+3a} \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{24+8a}}{a}$.

Так как $a > 0$, то неравенство примет вид:

$$a\sqrt{4+3a} \leq \sqrt{24+8a}, a^2(4+3a) \leq 24+8a,$$

$$3a^3 + 4a^2 - 8a - 24 \leq 0,$$

$$3(a-2)(a^2+2a+4) + 4a(a-2) \leq 0,$$

$$(a-2)(3a^2+6a+12+4a) \leq 0,$$

$(a-2)(3a^2+10a+12) \leq 0$. При $a > 0$ $3a^2+10a+12 > 0$, поэтому последнее неравенство равносильно $a-2 \leq 0$, откуда $0 < a \leq 2$.

Ответ: $(0; 2]$.

1464. 1) Рассмотрим первое уравнение. Сделаем замену $\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$. Уравнение примет вид $\sqrt{41+9t} = at$. Решим его графически (см. рис. 402). $f(t) = \sqrt{41+9t}$, $g(t) = at$, $f(1) = 5\sqrt{2}$, $f(-1) = 4\sqrt{2}$, $E(f) = [4\sqrt{2}; 5\sqrt{2}]$.

Уравнение имеет решение тогда, когда графики функций $f(t)$ и $g(t)$ имеют общую точку, то есть при $a \geq 5\sqrt{2}$ и $a \leq -4\sqrt{2}$.

2) Рассмотрим второе уравнение.

При $x \geq -2$: а) $h(x) = x - a + 7x + 14 + 5x = 13x - a + 14$,

б) $h(x) = a - x + 7x + 14 + 5x = 11x + a + 14$.

В обоих случаях $h(x)$ монотонно возрастает при $x \geq -2$.

При $x < -2$: а) $h(x) = x - a - 7x - 14 + 5x = -x - a - 14$,

б) $h(x) = a - x - 7x - 14 + 5x = -3x + a - 14$.

В обоих случаях $h(x)$ монотонно убывает при $x < -2$ (см. рис. 402).

$x = -2$ — точка минимума $h(x)$. Уравнение $h(x) = 0$ имеет корни, если $h(-2) \leq 0$.

То есть $|-2 - a| - 10 \leq 0$, $-10 \leq -2 - a \leq 10$, $-12 \leq a \leq 8$.

Искомые значениями a будут значения из пересечения

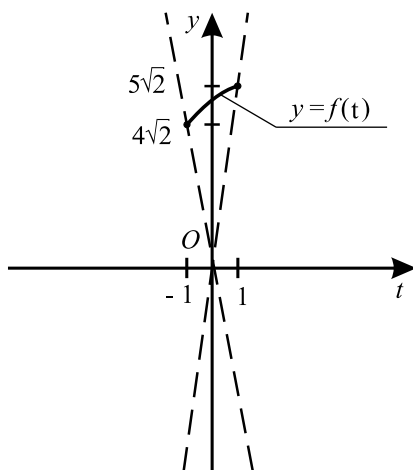


Рис. 402.

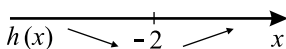


Рис. 403.

$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq 5\sqrt{2}, \\ a \leq 4\sqrt{2}, \\ a \geq -12, \\ a \leq 8; \end{array} \right. \quad \text{то есть } a \in [-12; -4\sqrt{2}] \cup [5\sqrt{2}; 8].$$

Ответ: $[-12; -4\sqrt{2}] \cup [5\sqrt{2}; 8]$.

1465. 1) Рассмотрим первое уравнение. Сделаем замену $\sin x = t$, $-1 \leq t \leq 1$. Уравнение примет вид $\sqrt{145 + 24t} = -at$. Решим его графически (см. рис. 404):

$$f(t) = \sqrt{145 + 24t}, \quad g(t) = -at.$$

$$f(1) = 13, \quad f(-1) = 11. \quad E(f) = [11; 13].$$

Уравнение не имеет решений тогда, когда графики функций $f(t)$ и $g(t)$ не имеют общих точек, то есть при $a < 11$ и $a > -13$.

2) Рассмотрим второе уравнение.

При $x \geq 1$ функция а) $h(x) = 3x - 9x + 9 - x - a = -7x + 9 - a$

б) $h(x) = 3x - 9x + 9 + x + a = -5x + 9 + a$.

В обоих случаях $h(x)$ монотонно убывает при $x \geq 1$ (см. рис. 405).

При $x < 1$ функция а) $h(x) = 3x + 9x - 9 - x - a = 11x - 9 - a$

б) $h(x) = 3x + 9x - 9 + x + a = 13x - 9 + a$.

В обоих случаях $h(x)$ монотонно возрастает при $x < 1$.

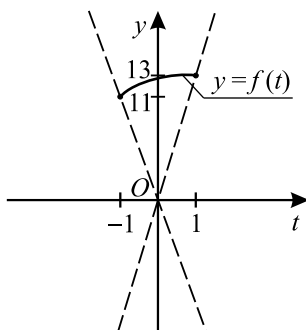


Рис. 404.

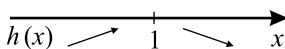


Рис. 405.

$x = 1$ — точка максимума $h(x)$.

Уравнение $h(x) = 0$ не будет иметь корней, если $h(1) < 0$.

То есть $3 - |1 + a| < 0$, $|a + 1| > 3$; $\begin{cases} a > 2, \\ a < -4. \end{cases}$

Искомými значениями a будут значения из пересечения

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 2, \\ a < -4, \\ a < 11, \\ a > -13; \end{array} \right. \quad \text{то есть } a \in (-13; -4) \cup (2; 11).$$

Ответ: $(-13; -4) \cup (2; 11)$.

1466. Данная задача равносильна следующей. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $f(x) > 2$ выполняется для всех x .

Преобразовав неравенство $f(x) > 2$ получим неравенство

$$ax + 4 > -|x^2 + 6x + 5|.$$

1) Рассмотрим функции $g(x) = ax + 4$ и $h(x) = -|x^2 + 6x + 5|$. На рисунке 406 изображены эскизы графиков функций $g(x)$ и $h(x)$.

2) Отметим, что график функции $y = g(x)$ при любом значении параметра a проходит через точку $B(0; 4)$.

Неравенство $g(x) > h(x)$ выполняется для всех x тогда и только тогда, когда график функции $y = g(x)$ не пересекает график функции $y = h(x)$, то есть когда график $y = g(x)$ проходит вне угла ABD . В этом случае

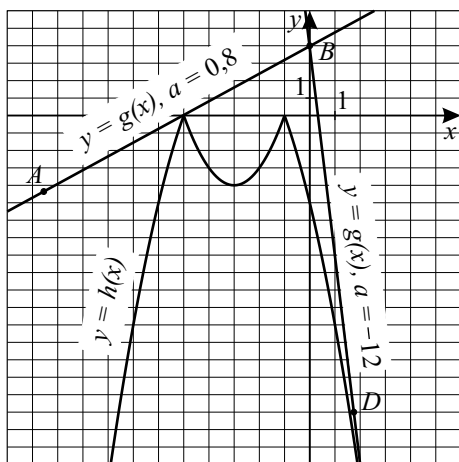


Рис. 406.

$a_2 < a < a_1$, где прямая $y = a_1x + 4$ проходит через точку $(-5; 0)$ (прямая AB), а прямая $y = a_2x + 4$ касается графика функции $y = -x^2 - 6x - 5$ в точке x_0 при $x_0 > 0$ (прямая BD).

3) Так как $0 = a_1(-5) + 4$, то $a_1 = 0,8$. Отметим, что точка $(-5; 0)$ — единственная общая точка функций $g(x) = 0,8x + 4$ и $h(x)$. Это можно проверить, например, решив уравнение $0,8x + 4 = h(x)$.

4) Найдём уравнение касательной к графику функции $h(x) = -|x^2 + 6x + 5|$, проходящей через точку $B(0; 4)$ и точку касания $(x_0; y_0)$ при $x_0 > 0$:

$$\frac{x - 0}{x_0 - 0} = \frac{y - 4}{y_0 - 4}; y = \frac{y_0 - 4}{x_0} \cdot x + 4.$$

$$\frac{y_0 - 4}{x_0} = h'(x_0) = (-x_0^2 - 6x_0 - 5)' = -2x_0 - 6; y_0 - 4 = -x_0(2x_0 + 6);$$

$(-x_0^2 - 6x_0 - 5) - 4 = -2x_0^2 - 6x_0; x_0^2 = 9$. Так как $x_0 > 0$, то $x_0 = 3$. Тогда $a_2 \cdot 3 + 4 = -(3^2 + 6 \cdot 3 + 5); a_2 = -12$.

Ответ: $(-12; 0,8)$.

1467. Данная задача равносильна следующей. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $f(x) < 1$ имеет решение.

Преобразовав неравенство $f(x) < 1$, получим неравенство

$$2ax + 4 < -|x^2 + 6x + 5|.$$

Рассмотрим функции $g(x) = 2ax + 4$ и $h(x) = -|x^2 + 6x + 5|$. На

рисунке 407 изображены эскизы графиков функций $g(x)$ и $h(x)$.

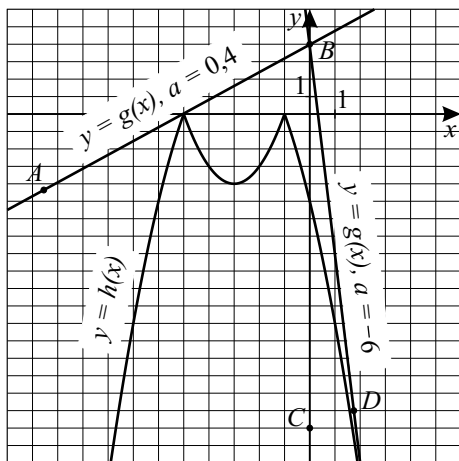


Рис. 407.

Отметим, что график функции $y = g(x)$ при любом значении параметра a проходит через точку $B(0; 4)$.

Неравенство $g(x) < h(x)$ имеет решение тогда и только тогда, когда график функции $y = g(x)$ пересекает график функции $y = h(x)$, то есть когда график $y = g(x)$ проходит внутри угла ABD . Рассмотрим два случая.

1) График функции $y = g(x)$ проходит внутри угла ABC . Тогда $a \in (a_1; +\infty)$, где a_1 — значение параметра a , при котором график функции $y = 2a_1x + 4$ проходит через точку $(-5; 0)$. Так как $0 = 2a_1(-5) + 4$, то $a_1 = 0,4$. Отметим, что точка $(-5; 0)$ — единственная общая точка функций $g(x) = 2 \cdot 0,4x + 4$ и $h(x)$. Это можно проверить, например, решив уравнение $2 \cdot 0,4x + 4 = h(x)$.

2) График функции $y = g(x)$ проходит внутри угла CBD . Тогда $a \in (-\infty; a_2)$, где a_2 — значение параметра a , при котором график функции $y = 2a_2x + 4$ касается графика функции $y = h(x)$. Найдём уравнение касательной к графику функции $h(x) = -|x^2 + 6x + 5|$, проходящей через точку $B(0; 4)$ и точку касания $(x_0; y_0)$ при $x_0 > 0$:

$$\frac{x - 0}{x_0 - 0} = \frac{y - 4}{y_0 - 4}; y = \frac{y_0 - 4}{x_0} \cdot x + 4.$$

$\frac{y_0 - 4}{x_0} = h'(x_0) = (-x_0^2 - 6x_0 - 5)' = -2x_0 - 6$; $y_0 - 4 = -x_0(2x_0 + 6)$;
 $(-x_0^2 - 6x_0 - 5) - 4 = -2x_0^2 - 6x_0$; $x_0^2 = 9$. Так как $x_0 > 0$, то $x_0 = 3$. Тогда
 $2a_2 \cdot 3 + 4 = -(3^2 + 6 \cdot 3 + 5)$; $a_2 = -6$.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (0, 4; +\infty)$.

$$1468. f(x) = x^2 - 5|x - a^2| - 13x = \begin{cases} x^2 - 18x + 5a^2, & \text{при } x \geq a^2; \\ x^2 - 8x - 5a^2, & \text{при } x < a^2. \end{cases}$$

График $f(x)$ составлен из двух частей парабол, причем у обеих парабол ветви направлены вверх. Поэтому максимум может достигаться только в точке стыка $x = a^2$.

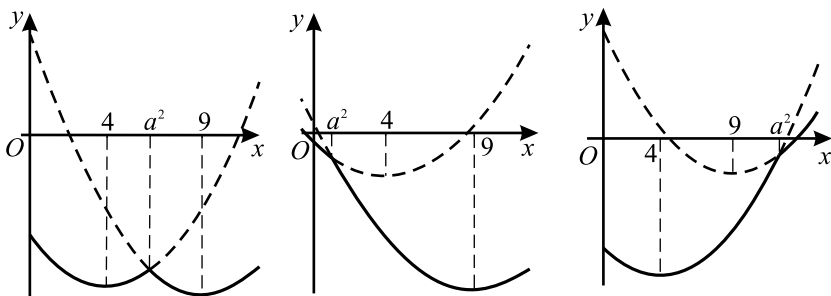


Рис. 408.

Чтобы в точке $x = a^2$ был максимум, необходимо и достаточно, чтобы она лежала между вершинами этих парабол (см. рис. 408). Вершина первой имеет абсциссу $x_0 = -\frac{-18}{2} = 9$. Вершина второй — $x_0 = -\frac{-8}{2} = 4$.

Таким образом, $a^2 \in (4; 9) \Leftrightarrow a \in (-3; -2) \cup (2; 3)$.

Ответ: $(-3; -2) \cup (2; 3)$.

$$1469. f(x) = x^2 + 5|x - a^2| - 13x = \begin{cases} x^2 - 18x + 5a^2, & x < a^2; \\ x^2 - 8x - 5a^2, & x \geq a^2. \end{cases}$$

График $f(x)$ составлен из двух частей парабол, ветви которых направлены вверх, причем части парабол «склеиваются» в точке $(a^2; f(a^2))$. Из рисунка 409 следует, что при любом расположении точки a^2 относительно вершин парабол, функция $f(x)$ не имеет точек максимума.

Ответ: таких a нет.

$$1470. f(x) = 4ax + |(x - 3)(x - 5)| = \begin{cases} x^2 + (4a - 8)x + 15, & x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty), \\ -x^2 + (4a + 8)x - 15, & x \in [3; 5]. \end{cases}$$

Наименьшее значение достигается в одной из критических или стати-

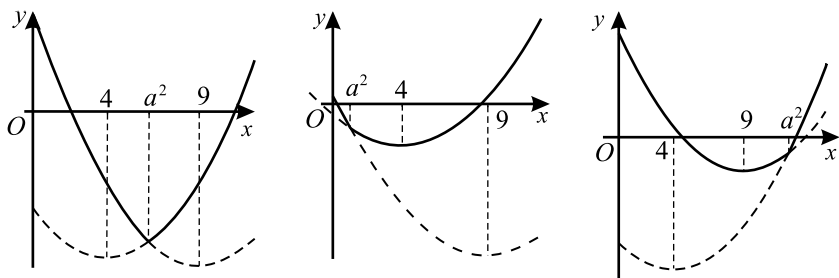


Рис. 409.

онарных точек.

Критические: 1) $x = 3$. Тогда $f(3) = 12a$.

2) $x = 5$. Тогда $f(5) = 20a$.

Стационарные: 1) $x = 4 - 2a$ при $4 - 2a \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$, то есть $a \in (-\infty; -0,5) \cup (0,5; +\infty) \Leftrightarrow |a| > 0,5$.

$$f(4 - 2a) = (4 - 2a)^2 + 2(2a - 4)(4 - 2a) + 15 = -4a^2 + 16a - 1.$$

2) $x = 2a + 4$ при $2a + 4 \in (3; 5) \Leftrightarrow |a| < 0,5$.

$$f(2a + 4) = -(2a + 4)^2 + 2(2a + 4)^2 - 15 = 4a^2 + 16a + 1.$$

Чтобы наименьшее значение $f(x)$ было меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы значение $f(x)$ в одной из критических или стационарных точек было меньше 1. То есть:

$$\left[\begin{array}{l} f(3) < 1 \\ f(5) < 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} f(4 - 2a) < 1 \\ |a| > 0,5 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} f(2a + 4) < 1 \\ |a| < 0,5 \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12a < 1 \\ 20a < 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} -4a^2 + 16a - 1 < 1 \\ |a| > 0,5 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 4a^2 + 16a + 1 < 1 \\ |a| < 0,5 \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} a < \frac{1}{12} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2a^2 - 8a + 1 > 0 \\ |a| > 0,5, \end{array} \right. \\ -0,5 < a < 0. \end{array} \right]$$

Решим систему $\left\{ \begin{array}{l} 2a^2 - 8a + 1 > 0, \\ |a| > 0,5. \end{array} \right.$ Корнями трёхчлена будут:

$$a_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 8}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{14}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}. \text{ Решение этой системы:}$$

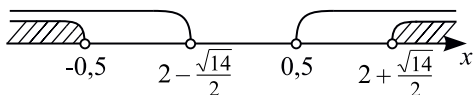


Рис. 410.

$a \in (\infty; -0,5) \cup \left(2 + \frac{\sqrt{14}}{2}; +\infty\right)$ (см. рис. 410). Окончательно получаем: $a \in \left(-\infty; \frac{1}{12}\right) \cup \left(2 + \frac{\sqrt{14}}{2}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{12}\right) \cup \left(2 + \frac{\sqrt{14}}{2}; +\infty\right)$.

$$1471. f(x) = 4ax + |(x-3)(x-5)| = \\ = \begin{cases} x^2 + (4a-8)x + 15, & \text{при } x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty), \\ -x^2 + (4a+8)x - 15, & \text{при } x \in [3; 5]. \end{cases}$$

Наибольшее значение достигается в одной из критических или стационарных точек, или на одном из концов отрезка $[2,75; 5,25]$.

Критические: 1) $x = 3$. Тогда $f(3) = 12a$.

2) $x = 5$. Тогда $f(5) = 20a$.

Стационарные: 1) $x = 4 - 2a$ при $4 - 2a \in (2,75; 3) \cup (5; 5,25) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2a \in (-1,25; -1) \cup (1; 1,25) \Leftrightarrow a \in (-0,625; -0,5) \cup (0,5; 0,625)$
 $f(4 - 2a) = (4 - 2a)^2 + 2(2a - 4)(4 - 2a) + 15 = -4a^2 + 16a - 1$.

2) $x = 2a + 4$ при $2a + 4 \in (3; 5) \Leftrightarrow |a| < 0,5$.
 $f(2a + 4) = -(2a + 4)^2 + 2(2a + 4)^2 - 15 = 4a^2 + 16a + 1$.

Чтобы наибольшее значение $f(x)$ на отрезке $[2,75; 5,25]$ было меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы значение $f(x)$ в каждой из критических и стационарных точек, а также на концах отрезка было меньше 1.

$$\left\{ \begin{cases} f(2,75) < 1 \\ f(3) < 1 \\ f(5) < 1 \\ f(5,25) < 1 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{cases} f(4 - 2a) < 1 \\ a \notin (-0,625; -0,5) \cup (0,5; 0,625) \\ f(2a + 4) < 1 \\ |a| \geq 0,5 \end{cases} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 11a + \frac{9}{16} < 1 \\ 12a < 1 \\ 20a < 1 \\ 21a + \frac{9}{16} < 1 \\ -4a^2 + 16a - 1 < 1 \\ a \in (-\infty; -0,625] \cup [-0,5; 0,5] \cup [0,625; +\infty) \\ 4a^2 + 16a + 1 < 1 \\ |a| \geq 0,5 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a < \frac{7}{176} \\ a < \frac{1}{12} \\ a < \frac{1}{20} \\ a < \frac{1}{48} \\ 2a^2 - 8a + 1 > 0 \\ a \in (-\infty; -0,625] \cup [-0,5; 0,5] \cup [0,625; +\infty) \\ a(a+4) < 0 \\ |a| \geq 0,5. \end{array} \right.$$

Решим первую совокупность. Корнями трёхчлена $2a^2 - 8a + 1$ являются $a_{1,2} = 2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$. $a \in (-\infty; 0,5] \cup [0,625; +\infty)$.

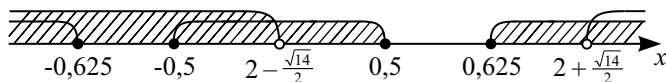


Рис. 411.

Решим вторую совокупность: $a \in (-\infty; 0) \cup [0,5; +\infty)$.

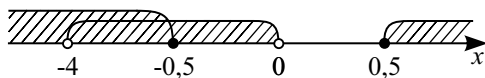


Рис. 412.

Система равносильна:

$$\begin{cases} a < \frac{7}{176} \\ a \in (-\infty; 0,5] \cup [0,625; +\infty) \\ a \in (-\infty; 0) \cup [0,5; +\infty). \end{cases}$$

Решением системы является $a \in (-\infty; 0)$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0)$.

1472. $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 3x$.

1. $x \geq a^2$, $f(x) = x^2 - 2(x - a^2) - 3x = x^2 - 5x + 2a^2$.

$f'(x) = 2x - 5$, $f'(x) = 0$, $x = \frac{5}{2}$.

2. $x < a^2$, $f(x) = x^2 + 2(x - a^2) - 3x = x^2 - x - 2a^2$.

$f'(x) = 2x - 1$, $f'(x) = 0$, $x = \frac{1}{2}$.

При $x \geq a^2$ графиком является часть параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = \frac{5}{2}$.

При $x < a^2$ графиком является часть параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = \frac{1}{2}$.

Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

Функция $y = f(x)$ имеет хотя бы одну точку максимума в единственном случае (см. рис. 413): $\frac{1}{2} < a^2 < \frac{5}{2}$, $\sqrt{0,5} < |a| < \sqrt{2,5}$.

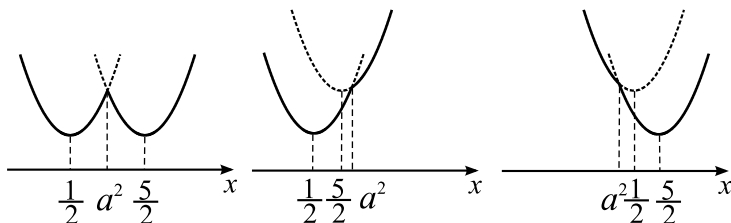


Рис. 413.

Ответ: $\sqrt{0,5} < |a| < \sqrt{2,5}$.

1473. $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 3x$.

1. $x \geq a^2$, $f(x) = x^2 - 2(x - a^2) - 3x = x^2 - 5x + 2a^2$.

$$f'(x) = 2x - 5, \quad f'(x) = 0, \quad x = \frac{5}{2}.$$

$$2. \quad x < a^2, \quad f(x) = x^2 + 2(x - a^2) - 3x = x^2 - x - 2a^2.$$

$$f'(x) = 2x + 1, \quad f'(x) = 0, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

При $x \geq a^2$ графиком является часть параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = \frac{5}{2}$.

При $x < a^2$ графиком является часть параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = -\frac{1}{2}$.

Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

Функция $y = f(x)$ при любом значении параметра a имеет хотя бы одну точку минимума (см. рис. 414):

1. При $a^2 \geq \frac{5}{2}$ точка минимума — $x = \frac{1}{2}$;

2. При $a^2 \leq \frac{1}{2}$ точка минимума — $x = \frac{5}{2}$;

3. При $\frac{1}{2} < a^2 < \frac{5}{2}$ функция имеет две точки минимума — $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{5}{2}$.

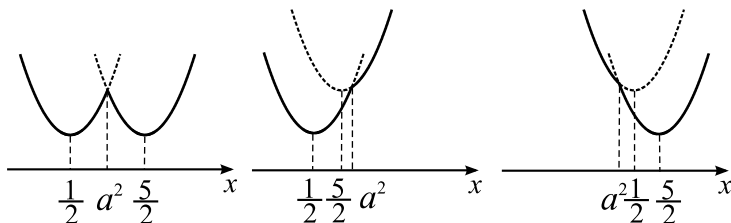


Рис. 414.

Ответ: $a \in (-\infty; +\infty)$.

1474. Исходное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} 8x(2-x)^3 = 3a^2, \\ \sin x + \sqrt{3} \cos x + a^2 - 3a + 4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Так как } \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) =$$

$= 2\left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, то второе уравнение совокупности примет вид: $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{a^2}{2} + \frac{3}{2}a - 2$.

Так как неравенство $-1 \leq -\frac{a^2}{2} + \frac{3}{2}a - 2 \leq 1$ выполняется при $a \in [1; 2]$, то это уравнение имеет решения только при $a \in [1; 2]$. Но среди этих решений обязательно будут и отрицательные. Поэтому эти значения a не входят в ответ.

Рассмотрим $f(x) = 8x(2-x)^3$. При $x < 0$, $f(x) < 0$; при $x > 2$, $f(x) < 0$. Но $3a^2 \geq 0$ для любого значения a . Значит, на множестве $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ уравнение $8x(2-x)^3 = 3a^2$ не имеет решений.

Найдём наибольшее значение $f(x)$ при $x \in [0; 2]$.

$f'(x) = 16(2-x)^2(1-2x)$. Уравнение $f'(x) = 0$ имеет корни $x_1 = \frac{1}{2}$,

$x_2 = 2$. Так как $f(0) = f(2) = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{2}$, то наибольшее значение

$f(x)$ равно $\frac{27}{2}$. Значит, уравнение $f(x) = 3a^2$ имеет решения (причём при-

надлежащие промежутку $[0; 2]$, то есть неотрицательные), когда $3a^2 \leq \frac{27}{2}$;

$$a \in \left[-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right].$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{3\sqrt{2}}{2}; 1\right) \cup \left(2; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right].$$

1475. Исходное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} \sin^2 x - 5\sin x - 2a(\sin x - 3) + 6 = 0, \\ 2x - 2x^2 \geq 0, \\ \sqrt{2a} + 8x\sqrt{2x - 2x^2} = 0. \end{cases}$$

Замена $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$ приводит первое уравнение совокупности к виду

$$t^2 - (5 + 2a)t + 6(a + 1) = 0,$$

$$D = (5 + 2a)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (a + 1) = 4a^2 - 4a + 1 = (2a - 1)^2 \geq 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{5 + 2a \pm |2a - 1|}{2} = \frac{5 + 2a \pm (2a - 1)}{2}.$$

$$t_1 = \frac{5 + 2a + 2a - 1}{2} = 2a + 2.$$

$t_2 = \frac{5 + 2a - 2a + 1}{2} = 3$ — не удовлетворяет условию $t \in [-1; 1]$.

Уравнение $\sin x = 2a + 2$ может иметь решения, если выполняется условие $-1 \leq 2a + 2 \leq 1$. Но, учитывая ОДЗ исходного уравнения: $2x - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$, получим условие $0 \leq 2a + 2 \leq \sin 1$, то есть $a \in \left[-1; \frac{\sin 1}{2} - 1\right]$.

Рассмотрим уравнение $-8x\sqrt{x-x^2} = a$ и функцию $f(x) = -8x\sqrt{x-x^2}$. Область определения: $x-x^2 \geq 0$; $x \in [0; 1]$. Найдём наименьшее значение $f(x)$. $f'(x) = \frac{4x(4x-3)}{\sqrt{x \cdot (1-x)}}$; $f'(x) = 0$ при $x = \frac{3}{4}$; $x = 0$ и $x = 1$ — критические точки.

$f(0) = f(1) = 0$; $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ — наименьшее значение. Так как

наибольшее значение $f(x)$ равно 0, а наименьшее значение равно $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

то уравнение $f(x) = a$ имеет решение, только если $-\frac{3\sqrt{3}}{2} \leq a \leq 0$.

Окончательно получаем $a \in \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right]$.

1476. Согласно условию задачи, нужно найти все значения a , для которых при каждом $x \in [4; 16]$ выполняется

$$\log_2^2 x + 2a \leq (a+2) \log_2 x \Rightarrow \log_2^2 x - (a+2) \log_2 x + 2a \leq 0 \Rightarrow$$

$$\log_2 x_{1,2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{(a+2)^2 - 8a}}{2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{a^2 - 4a + 4}}{2} =$$

$$= \frac{a+2 \pm \sqrt{(a-2)^2}}{2} = \frac{a+2 \pm (a-2)}{2};$$

$$\log_2 x_1 = \frac{a+2+a-2}{2} = a; \log_2 x_2 = \frac{a+2-a+2}{2} = 2.$$

Следовательно, $x_1 = 2^a$, $x_2 = 4$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $2^a \leq 4$, тогда $2^a \leq x \leq 4$. Но, согласно условию, исходное неравенство должно выполняться для всех $x \in [4; 16]$. Значит, рассматриваемый случай не удовлетворяет условию.

2. Пусть $2^a \geq 4$, тогда $4 \leq x \leq 2^a$. Так как по условию неравенство

должно выполняться для всех $x \in [4; 16]$, то $2^a \geq 16$; $a \geq 4$.

Ответ: $[4; +\infty)$.

1477. Согласно условию задачи, нужно найти все значения a , для которых при каждом $x \in [3; 9]$ выполняется.

$$\log_3^2 x + a \leq (a+1) \log_3 x \Rightarrow \log_3^2 x - (a+1) \log_3 x + a \leq 0 \Rightarrow$$

$$\log_3 x_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4a}}{2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{a^2 - 2a + 1}}{2} =$$

$$= \frac{a+1 \pm \sqrt{(a-1)^2}}{2} = \frac{a+1 \pm (a-1)}{2};$$

$$\log_3 x_1 = \frac{a+1+a-1}{2} = a; \log_3 x_2 = \frac{a+1-a+1}{2} = 1.$$

Следовательно, $x_1 = 3^a$, $x_2 = 3$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $3^a \leq 3$, тогда $3^a \leq x \leq 3$. Но, согласно условию, исходное неравенство должно выполняться для всех $x \in [3; 9]$. Значит, рассматриваемый случай не удовлетворяет условию.

2. Пусть $3^a \geq 3$, тогда $3 \leq x \leq 3^a$. Так как по условию неравенство должно выполняться для всех $x \in [3; 9]$, то $3^a \geq 9$; $a \geq 2$.

Ответ: $[2; +\infty)$.

1478. Пусть $a \leq 0$. Тогда при $x \in [2; 3]$ имеем: $x - a > 0$, $x - 6a > 0$, $\Rightarrow \frac{x-a}{x-6a} > 0$, что противоречит условию.

Следовательно, $a > 0$. Тогда решением неравенства $\frac{x-a}{x-6a} < 0$ будет интервал $x \in (a; 6a)$. По условию $[2; 3] \subset (a; 6a) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a < 2, \\ 6a > 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2, \\ a > \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0,5; 2).$$

Ответ: $(0,5; 2)$.

1479. $a = 0$ не удовлетворяет условию.

Пусть теперь $a \neq 0$. $\frac{x-2a}{x+a} < 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{cases} \frac{x-2a}{x+a} < 0, \\ a > 0; \\ \frac{x-2a}{x+a} < 0, \\ a < 0; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \in (-a; 2a), \\ a > 0; \\ x \in (2a; -a), \\ a < 0. \end{cases} \right]$$

Так как исходное неравенство должно выполняться при $-1 \leq x \leq 1$, то

$$\left[\begin{cases} [-1; 1] \subset (-a; 2a), \\ a > 0; \\ [-1; 1] \subset (2a; -a), \\ a < 0, \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} -a < -1, \\ 2a > 1, \\ a > 0; \\ 2a < -1, \\ -a > 1, \\ a < 0; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a > 1, \\ a < -1. \end{cases} \right]$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

$$1480. \begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ 2^{4x} - 2^{x+3y+1} = 3 \cdot 2^{a+2y} - 2^{2y+2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ 2^{4x} - 2 \cdot 2^{x+3y} = 2^{2y}(3 \cdot 2^a - 4). \end{cases}$$

Разделим обе части второго уравнения на 2^{2y} , учитывая, что $2^{2y} > 0$.

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ (2^{2x-y})^2 - 2 \cdot 2^{x+y} = 3 \cdot 2^a - 4. \end{cases}$$

Обозначим $2^{2x-y} = U$, $2^{x+y} = V$. Система примет вид:

$$\begin{cases} V - U = 1 - 2^a, \\ U^2 - 2V = 3 \cdot 2^a - 4. \end{cases} \quad (*)$$

Сложим удвоенное первое уравнение со вторым уравнением.

$$\text{Получим: } \begin{cases} U^2 - 2U + 2 - 2^a = 0, \\ U > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2^a - 1}, \\ U > 0. \end{cases}$$

Система (*) имеет единственное решение, если либо $2^a - 1 = 0$, то есть $a = 0$, либо $1 - \sqrt{2^a - 1} < 0$, то есть $a \geq 1$, тогда либо $U = 1$, либо $U = 1 + \sqrt{2^a - 1}$. Из первого уравнения системы $V = U + 1 - 2^a$.

1) При $U = 1$ имеем $a = 0$, $V = 1$. Исходная система имеет единственное решение.

2) При $U = 1 + \sqrt{2^a - 1}$, $a \geq 1$ имеем $V = 2 + \sqrt{2^a - 1} - 2^a$.

$$\text{Имеем: } \begin{cases} 2 + \sqrt{2^a - 1} - 2^a > 0, \\ a \geq 1. \end{cases}$$

Решим неравенство $\sqrt{2^a - 1} > 2^a - 2$.

Обозначим $2^a = t$, $t \geq 2$, так как $a \geq 1$.

Неравенство примет вид $\sqrt{t-1} > t-2, t^2 - 5t + 5 < 0$,
 $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < t < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$. Так как $t \geq 2, 2 \leq t < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Вернемся к исходной переменной:

$$2 \leq 2^a < \frac{5+\sqrt{5}}{2}, 1 \leq a < \log_2 \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $a = 0; 1 \leq a < \log_2 \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

1481.
$$\begin{cases} 2^x(y+1)(1-y \cdot 2^x) = a^3, \\ (1+2^x)(1-y \cdot 2^x) = a. \end{cases}$$

1. Рассмотрим случай, когда $a = 0$. Учитывая, что $2^x > 0$ при любом значении x , получим $1 - y \cdot 2^x = 0, y = \frac{1}{2^x}$ при всех $x \in R$. Следовательно, $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

2. Рассмотрим случай, когда $a \neq 0, y \neq -1$. Обозначим $2^x = t, t > 0$. Система примет вид:

$$\begin{cases} t(y+1)(1-yt) = a^3, \\ (1+t)(1-yt) = a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(y+1) = a^2(t+1), \\ (t+1)(1-ty) = a; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{t+1-a}{t^2+t}, \\ t^2(a^2-1) + 2t(a^2-1) + a^2 + a - 1 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

При $|a| = 1$ второе уравнение системы (1), а значит, и сама система, решений не имеют, что удовлетворяет условию задачи.

При $a^2 - 1 \neq 0$ второе уравнение системы (1) приведем к виду:

$$t^2 + 2t + 1 + \frac{a}{a^2-1} = 0.$$

$$(t+1)^2 = \frac{a}{1-a^2} \quad (2)$$

Уравнение (2) не имеет решений в двух случаях:

1) если $\frac{a}{1-a^2} < 0$,

2) если $\frac{a}{1-a^2} > 0$ и $t \leq 0$.

Рассмотрим эти случаи:

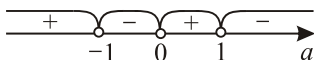


Рис. 415.

$$1) \frac{a}{1-a^2} < 0, a \in (-1; 0) \cup (1; +\infty).$$

$$2) \begin{cases} \frac{a}{1-a^2} > 0, \\ -1 + \sqrt{\frac{a}{1-a^2}} \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 0 < a < 1, \\ a < -1, \end{cases} \\ \frac{a^2 + a - 1}{a^2 - 1} \geq 0. \end{cases}$$

Решим неравенство $\frac{a^2 + a - 1}{a^2 - 1} \geq 0$.

$$a^2 + a - 1 = 0, a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

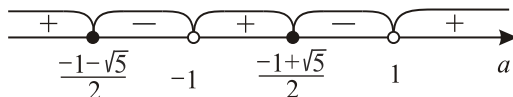


Рис. 416.

$$a \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1 < a \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; a > 1.$$

Учитывая, что $a < -1$ или $0 < a < 1$, имеем

$$a \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0 < a \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, a > 1.$$

Объединяя полученные решения, делаем вывод:

$$a \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1 \leq a < 0; 0 < a \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; a \geq 1.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup [-1; 0) \cup \left(0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [1; +\infty).$$

$$1482. \frac{\log_{\frac{4a-7}{4}}^2 x^2 + \log_{\frac{4a-7}{4}} x^4 \cdot \log_a x + \log_a^2 x}{(x-1)^2} \leq 0.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{4a-7}{4} > 0, \\ \frac{4a-7}{4} \neq 1, \\ a > 0, \\ a \neq 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{7}{4}, \\ a \neq \frac{11}{4}, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Знаменатель на ОДЗ положителен, поэтому числитель должен быть неположителен.

$$2^2 \log_{\frac{4a-7}{4}} x + 4 \log_{\frac{4a-7}{4}} x \cdot \log_a x + \log_a^2 x \leq 0;$$

$$(2 \log_{\frac{4a-7}{4}} x + \log_a x)^2 \leq 0;$$

$$2 \log_{\frac{4a-7}{4}} x + \log_a x = 0;$$

$$\log_{\frac{4a-7}{4}} x = -\frac{1}{2} \log_a x;$$

$$\log_{\frac{4a-7}{4}} x = \log_{\frac{1}{a^2}} x.$$

Так как $x \neq 1$, то $\frac{4a-7}{4} = \frac{1}{a^2}$; $4a-7 = \frac{4}{a^2}$; $a = 2$ является решением уравнения. При $a > 0$ имеем: $f(a) = 4a - 7$ монотонно возрастает, $g(a) = \frac{4}{a^2}$ монотонно убывает. Следовательно, у уравнения $f(a) = g(a)$ не более одного решения.

Ответ: $a = 2$.

$$1483. \frac{\log_{\frac{a+1}{108}} x^3 + \log_{\frac{a+1}{108}} x^6 \cdot \log_a x + \log_a^2 x}{(x-1)^2} \leq 0$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ a \neq 107, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Знаменатель на ОДЗ положителен, поэтому числитель должен быть неположителен.

$$\log_{\frac{a+1}{108}} x^3 + 2 \log_{\frac{a+1}{108}} x^3 \cdot \log_a x + \log_a^2 x \leq 0;$$

$$(\log_{\frac{a+1}{108}} x^3 + \log_a x)^2 \leq 0;$$

$$3 \log_{\frac{a+1}{108}} x + \log_a x = 0;$$

$$\log_{\frac{a+1}{108}} x = -\frac{1}{3} \log_a x;$$

$\log_{\frac{a+1}{108}} x = \log_{\frac{1}{a^3}} x$. Так как $x \neq 1$, то $\frac{a+1}{108} = \frac{1}{a^3}$; $a+1 = \frac{108}{a^3}$; $a=3$ является решением уравнения. При $a > 0$ имеем: $f(a) = a+1$ монотонно возрастает, $g(a) = \frac{108}{a^3}$ монотонно убывает. Следовательно, у уравнения $f(a) = g(a)$ не более одного решения.

Ответ: $a = 3$.

$$1484. \frac{1+4x-\sqrt{6x+15x^2}}{1+4x+\sqrt{6x+15x^2}} = 8a^3 \frac{\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x}}.$$

ОДЗ: $x \geq 0$.

Умножим числитель и знаменатель первой дроби на 2, получим:

$$\frac{(\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x})^2}{(\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x})^2} = 8a^3 \frac{\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x}}.$$

Учитывая, что на ОДЗ $\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x} > 0$ и $\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x} > 0$, получаем $a > 0$.

Умножим обе части уравнения на $\frac{\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x}}$, получим:

$$\frac{\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x}} = 2a.$$

$$\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x} = 2a(\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x}),$$

$$2a\sqrt{2+5x}-\sqrt{2+5x}+2a\sqrt{3x}+\sqrt{3x} = 0,$$

$$\sqrt{2+5x}(2a-1) + \sqrt{3x}(2a+1) = 0,$$

$$\sqrt{2+5x}(1-2a) = \sqrt{3x}(2a+1). \text{ Так как } a > 0, \text{ то } 2a+1 > 0, \text{ значит,}$$

$$1-2a \geq 0. \text{ Тогда } 0 < a \leq \frac{1}{2}.$$

$$x(4a^2-16a+1) = -(1-2a)^2,$$

$$x(16a-4a^2-1) = (1-2a)^2,$$

Так как $x \geq 0$, то $16a-4a^2-1 \geq 0$. Но для того, чтобы это уравнение имело решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $16a-4a^2-1 > 0$.

$$4a^2-16a+1 < 0; 2-\frac{\sqrt{15}}{2} < a < 2+\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

С учетом условия $0 < a \leq \frac{1}{2}$ получаем при $2-\frac{\sqrt{15}}{2} < a \leq \frac{1}{2}$,

$$x = \frac{(1 - 2a)^2}{16a - 4a^2 - 1}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{(1 - 2a)^2}{16a - 4a^2 - 1} \text{ при } 2 - \frac{\sqrt{15}}{2} < a \leq \frac{1}{2}.$$

$$1485. \frac{1 + 5x - \sqrt{10x + 25x^2}}{1 + 5x + \sqrt{10x + 25x^2}} = \frac{1}{8}c^3 \frac{\sqrt{2 + 5x} + \sqrt{5x}}{\sqrt{2 + 5x} - \sqrt{5x}}.$$

ОДЗ: $x \geq 0$.

Умножим числитель и знаменатель первой дроби на 2 и преобразуем её:

$$\frac{(\sqrt{2 + 5x} - \sqrt{5x})^2}{(\sqrt{2 + 5x} + \sqrt{5x})^2} = \frac{1}{8}c^3 \frac{\sqrt{2 + 5x} + \sqrt{5x}}{\sqrt{2 + 5x} - \sqrt{5x}}.$$

Учитывая, что на ОДЗ $\sqrt{2 + 5x} + \sqrt{5x} > 0$ и $\sqrt{2 + 5x} - \sqrt{5x} > 0$, получаем $c > 0$.

Умножим обе части равенства на $\frac{\sqrt{2 + 5x} - \sqrt{5x}}{\sqrt{2 + 5x} + \sqrt{5x}}$, получим:

$$\frac{\sqrt{2 + 5x} - \sqrt{5x}}{\sqrt{2 + 5x} + \sqrt{5x}} = \frac{1}{2}c.$$

$$2(\sqrt{2 + 5x} - \sqrt{5x}) = c(\sqrt{2 + 5x} + \sqrt{5x}),$$

$$\sqrt{2 + 5x}(c - 2) + \sqrt{5x}(c + 2) = 0,$$

$$\sqrt{2 + 5x}(2 - c) = \sqrt{5x}(2 + c), \text{ так как } c > 0, \text{ то } c + 2 > 0, \text{ значит, } 2 - c \geq 0.$$

Тогда $0 < c \leq 2$.

$$20cx = (2 - c)^2. \text{ Учитывая, что } c \in (0; 2], \text{ имеем } x = \frac{(2 - c)^2}{20c} \text{ при } 0 < c \leq 2.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{(2 - c)^2}{20c} \text{ при } 0 < c \leq 2.$$

1486. Пусть данные уравнения имеют два общих корня x_1 и x_2 . Найдем значения параметров a и b .

Рассмотрим первое уравнение.

$$2x^2 - ax - 8 = 0, x^2 - \frac{a}{2}x - 4 = 0.$$

Так как числа x_1 и x_2 являются его корнями, то по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{a}{2}, \\ x_1 x_2 = -4. \end{cases}$$

Второе уравнение $x^3 + bx - 16 = 0$ имеет корни x_1 и x_2 и третий корень x_3 . Иными словами, при любом значении x выполняется

$$x^3 + bx - 16 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \cdot x - x_1 x_2 x_3 =$$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 + (x_1x_2 + x_3 \cdot (x_1 + x_2)) \cdot x - x_1x_2x_3.$$

Подставив вместо $x_1 + x_2$ значение $\frac{a}{2}$, а вместо x_1x_2 — -4 , получим

$$x^3 + bx - 16 = x^3 - \left(\frac{a}{2} + x_3\right) \cdot x^2 + \left(-4 + \frac{a}{2}x_3\right)x + 4x_3.$$

Так как полученное равенство выполняется при любых значениях x , то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + x_3 = 0, \\ -4 + \frac{a}{2}x_3 = b, \\ 4x_3 = -16; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 8, \\ b = -20, \\ x_3 = -4. \end{cases}$$

Подставив значение $a = 8$ в первое уравнение, получим $x^2 - 4x - 4 = 0$. Корни этого уравнения равны $x_1 = 2 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = 2 + 2\sqrt{2}$.

Ответ: $a = 8$, $b = -20$, $x_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$.

1487. Уравнение третьей степени с корнями x_1 , x_2 и x_3 имеет вид

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0;$$

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 + (x_1x_2 + x_3 \cdot (x_1 + x_2)) \cdot x - x_1x_2x_3 = 0.$$

Пусть данные уравнения имеют два общих корня x_1 и x_2 , тогда

$$3x^3 + bx^2 - 25 = (x - x_1)(x - x_2)(3x - x_3)$$

$$\text{и } x^3 - ax + 15 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4),$$

где x_3 и x_4 — некоторые вещественные числа.

Обозначим $c = -(x_1 + x_2)$, $d = x_1x_2$, тогда $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + cx + d$, откуда имеем

$$3x^3 + bx^2 - 25 = (x^2 + cx + d)(3x - x_3) = 3x^3 + (3c - x_3)x^2 + (3d - cx_3)x - dx_3$$

$$\text{и } x^3 - ax + 15 = (x^2 + cx + d)(x - x_4) = x^3 + (c - x_4)x^2 + (d - cx_4)x - dx_4.$$

Получаем системы уравнений:

$$\begin{cases} 3c - x_3 = b, & (1) \\ 3d - cx_3 = 0, & (2) \\ dx_3 = 25; & (3) \end{cases} \quad \begin{cases} c - x_4 = 0, & (4) \\ d - cx_4 = -a, & (5) \\ dx_4 = -15. & (6) \end{cases}$$

Рассмотрим уравнения (1), (3), (4) и (6).

$$\begin{cases} x_3 = 3c - b, \\ x_4 = c, \\ dx_3 = 25, \\ 3x_3 = -5x_4; \end{cases} \quad \begin{cases} 3(3c - b) = -5c, \\ x_4 = c, \\ x_3 = 3c - b, \\ dx_3 = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{14}{3}c, \\ x_4 = c, \\ x_3 = -\frac{5}{3}c, \\ d = -\frac{15}{c}. \end{cases}$$

Подставим найденные значения в уравнение (2):

$$3 \cdot \left(-\frac{15}{c}\right) - c \cdot \left(-\frac{5}{3}c\right) = 0, \quad -\frac{9}{c} + \frac{c^2}{3} = 0, \quad c = 3.$$

Подставив $c = 3$ в остальные уравнения, получим $b = 14$, $d = -5$, $a = 14$.
 $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + cx + d = x^2 + 3x - 5$, откуда $x_{1,2} = -1,5 \pm 0,5\sqrt{29}$.

Ответ: $a = 14$, $b = 14$, $x_{1,2} = -1,5 \pm 0,5\sqrt{29}$.

1488. Рассмотрим функции $f(x) = 4x^2 - 4x - (a^2 - 4a + 3)$ и $g(x) = ax(a - 2 + x) = ax^2 + a(a - 2)x$. Их графиками при $a \neq 0$ являются параболы. Обозначим $D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot (a^2 - 4a + 3) = 16(a - 2)^2 \geq 0$ — дискриминант уравнения $f(x) = 0$.

I. Если $D = 0$, то неравенство $f(x) \leq 0$ имеет единственное решение. При $a = 2$ $x_0 = \frac{1}{2}$ — корень уравнения $f(x) = 0$. При этом любое действительное значение x удовлетворяет неравенству $g(x) = 2x^2 \geq 0$. Значит, $a = 2$ удовлетворяет условию задачи.

II. Если $D > 0$, то решением неравенства $f(x) \leq 0$ является отрезок $[x_1; x_2]$, где x_1, x_2 — корни уравнения $f(x) = 0$; $x_1, x_2 \in \left\{\frac{3-a}{2}; \frac{a-1}{2}\right\}$.

1) Если $a = 0$, то любое действительное число удовлетворяет неравенству $g(x) \geq 0$, а решением неравенства $f(x) \leq 0$ является отрезок $[-0,5; 1,5]$. Значит, $a = 0$ не удовлетворяет условию.

2) Если $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то при $a < 0$ решением неравенства $g(x) \geq 0$ является отрезок $[x'_1; x'_2]$, а при $a > 0$ решением неравенства $g(x) \geq 0$ является множество $(-\infty; x'_1] \cup [x'_2; +\infty)$, где $x'_1, x'_2 \in \{0; 2 - a\}$ — корни уравнения $g(x) = 0$.

Ровно одно решение неравенства $f(x) \leq 0$ может являться решением неравенства $g(x) \geq 0$, только когда одно из чисел x_1, x_2 совпадает с одним из чисел x'_1, x'_2 . Возможны четыре случая.

а) $\frac{3-a}{2} = 0$. Тогда $a = 3$. Из рисунка 417 следует, что $a = 3$ не удовлетворяет условию.

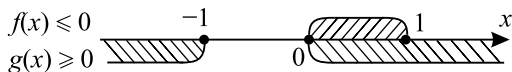


Рис. 417.

б) $\frac{3-a}{2} = 2 - a$. Тогда $a = 1$. Из рисунка 418 следует, что два решения $x = 0$ и $x = 1$ неравенства $f(x) \leq 0$ являются решениями неравенства $g(x) \geq 0$. Значит, $a = 1$ не удовлетворяет условию.

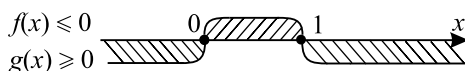


Рис. 418.

в) $\frac{a-1}{2} = 0$. Тогда $a = 1$. Этот случай уже рассмотрен.

г) $\frac{a-1}{2} = 2-a$; $a = \frac{5}{3}$. Из рисунка 419 следует, что $a = \frac{5}{3}$ не удовле-

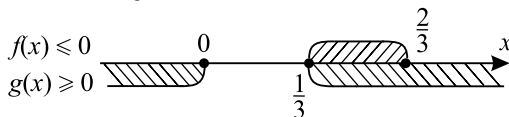


Рис. 419.

творяет условию.

Ответ: 2.

1489. Рассмотрим функции $f(x) = x^2 + (10 + 3a)x + (2a^2 + 12a + 16)$ и $g(x) = ax(x - 8 - a) = ax^2 - a(a + 8)x$. Их графиками при $a \neq 0$ являются параболы. Обозначим $D = (10 + 3a)^2 - 4(2a^2 + 12a + 16) = (a + 6)^2 \geq 0$ — дискриминант уравнения $f(x) = 0$.

I. Если $D = 0$, то неравенство $f(x) \leq 0$ имеет единственное решение. При $a = -6$ $x_0 = 4$ — корень уравнения $f(x) = 0$. При этом решением неравенства $g(x) \leq 0$ является множество $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$, которому принадлежит x_0 . Значит, $a = -6$ удовлетворяет условию задачи.

II. Если $D > 0$, то решением неравенства $f(x) \leq 0$ является отрезок $[x_1; x_2]$, где x_1, x_2 — корни уравнения $f(x) = 0$; $x_1, x_2 \in \{-8 - 2a; -2 - a\}$.

1) Если $a = 0$, то любое действительное число удовлетворяет неравенству $g(x) \leq 0$, а решением неравенства $f(x) \leq 0$ является отрезок $[-8; -2]$. Значит, $a = 0$ не удовлетворяет условию.

2) Если $a \neq 0$ и $a \neq -6$, то при $a < 0$ решением неравенства $g(x) \leq 0$ является множество $(-\infty; x'_1] \cup [x'_2; +\infty)$, а при $a > 0$ решением неравенства $g(x) \leq 0$ является отрезок $[x'_1; x'_2]$, где $x'_1, x'_2 \in \{0; a + 8\}$ — корни уравнения $g(x) = 0$.

Ровно одно решение неравенства $f(x) \leq 0$ может являться решением неравенства $g(x) \leq 0$, только когда одно из чисел x_1, x_2 совпадает с одним из чисел x'_1, x'_2 . Возможны четыре случая.

а) $-8 - 2a = 0$; $a = -4$. Из рисунка 420 следует, что $a = -4$ удовлетворяет условию.

б) $-8 - 2a = a + 8$; $a = -\frac{16}{3}$. Из рисунка 421 следует, что $a = -\frac{16}{3}$ не удовлетворяет условию.

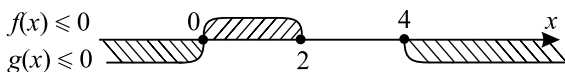


Рис. 420.

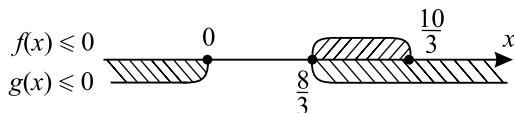


Рис. 421.

в) $-2 - a = 0$; $a = -2$. Из рисунка 422 следует, что $a = -2$ не удовлетворяет условию.

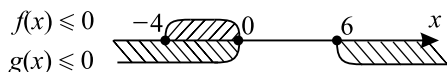


Рис. 422.

г) $-2 - a = a + 8$; $a = -5$. Из рисунка 423 следует, что $a = -5$ удовлетворяет условию.

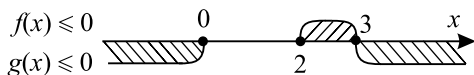


Рис. 423.

Ответ: -4 ; -5 ; -6 .

1490. Рассмотрим функции $f(x) = e^{x-a-2}$ и $g(x) = -x^2 - 5x + a$. Неравенство $f(x) \leq g(x)$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение (см. рис. 424).

При этом для $x = x_0$ выполняются условия $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$

Так как $f(x) = f'(x) = e^{x-a-2}$, то $g(x_0) = g'(x_0)$. Таким образом, x_0 — меньший корень уравнения $g(x) = g'(x)$; $-x^2 - 5x + a = -2x - 5$;

$$x^2 + 3x - (a + 5) = 0; \quad x_0 = \frac{-3 - \sqrt{29 + 4a}}{2}.$$

Так как $f(x_0) = g'(x_0)$, то $e^{-\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{29+4a}-a} = -2 + \sqrt{29+4a}$. Замена

$t = \sqrt{29+4a}$, $a = \frac{t^2 - 29}{4}$ приводит к уравнению

$$e^{-\frac{7}{2} - \frac{t}{2} - \frac{t^2 - 29}{4}} = -2 + t; \quad e^{\frac{-t^2 - 2t + 15}{4}} = t - 2;$$

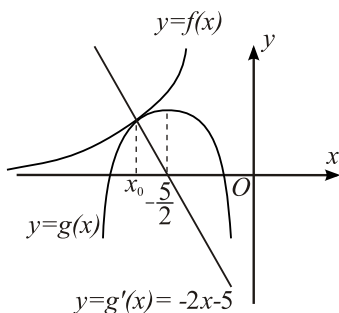


Рис. 424.

$-t^2 - 2t + 15 = 4 \ln(t - 2)$; $-(t + 5)(t - 3) = 4 \ln(t - 2)$. Видно, что $t = 3$ единственный корень этого уравнения. Итак, $\sqrt{29 + 4a} = 3$; $a = -5$.

Ответ: -5 .

1491. Рассмотрим функции $f(x) = e^{x+b+3}$ и $g(x) = -x^2 - 3x + b$. Неравенство $f(x) \leq g(x)$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение (см. рис. 425).

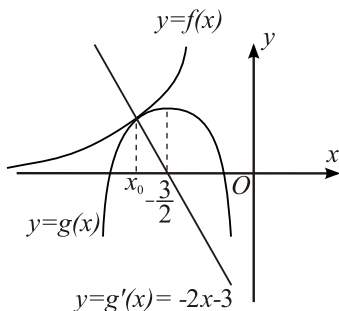


Рис. 425.

При этом для $x = x_0$ выполняются условия $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$

Так как $f(x) = f'(x) = e^{x+b+3}$, то $g(x_0) = g'(x_0)$. Таким образом, x_0 — меньший корень уравнения $g(x) = g'(x)$; $-x^2 - 3x + b = -2x - 3$; $x^2 + x - (b + 3) = 0$; $x_0 = \frac{-1 - \sqrt{4b + 13}}{2}$.

Так как $f(x_0) = g(x_0)$, то $e^{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4b+13} + b} = -2 + \sqrt{4b + 13}$. Замена

$t = \sqrt{4b + 13}$, $b = \frac{t^2 - 13}{4}$ приводит к уравнению

$$e^{\frac{5}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t^2 - 13}{4}} = -2 + t; \quad e^{\frac{t^2 - 2t - 3}{4}} = t - 2;$$

$t^2 - 2t - 3 = 4 \ln(t - 2)$; $(t + 1)(t - 3) = 4 \ln(t - 2)$. Видно, что $t = 3$ единственный корень этого уравнения. Итак, $\sqrt{4b + 13} = 3$; $b = -1$.

Ответ: -1 .

1492. Область допустимых значений параметра a :

$$\begin{cases} 15 - 2a - a^2 \geq 0, \\ 5 - (\cos \sqrt{15 - 2a - a^2} + 4) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + 2a - 15 \leq 0, \\ \cos \sqrt{15 - 2a - a^2} \neq 1; \end{cases}$$

$$a^2 + 2a - 15 < 0; \quad -5 < a < 3.$$

$-1 \leq \cos \sqrt{15 - 2a - a^2} < 1$, $0 < 5 - (\cos \sqrt{15 - 2a - a^2} + 4) \leq 2$. Так как знаменатель положителен, то для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in (-2; 1)$ $x^2 + 4(a - 1)x + 4a^2 > 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 4(a - 1)x + 4a^2$. Её графиком является парабола.

Рассмотрим три случая.

1) $D < 0$ — неравенство выполняется при всех x .

$$D = (4(a - 1))^2 - 4 \cdot 4a^2 < 0; \quad 16a^2 - 32a + 16 - 16a^2 < 0; \quad 32a > 16;$$

$$a > \frac{1}{2}.$$

$$2) D = 0, \quad 32a = 16, \quad a = \frac{1}{2}.$$

В этом случае $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ и неравенство $f(x) > 0$ выполняется при любом $x \in (-2; 1)$.

3) $D > 0$. Условие задачи выполняется в двух случаях (см. рис. 426):

а) абсцисса вершины параболы меньше -2 и $f(-2) \geq 0$;

б) абсцисса вершины параболы больше 1 и $f(1) \geq 0$.

Получим:

$$\left[\begin{cases} -2(a - 1) < -2, \\ a^2 - 2a + 3 \geq 0; \\ -2(a - 1) > 1, \\ 1 + 4a - 4 + 4a^2 \geq 0; \end{cases} \right] \quad \left[\begin{cases} a > 2, \\ a \in R, \\ a < \frac{1}{2}, \\ \left[\begin{cases} a \leq -1,5, \\ a \geq 0,5; \end{cases} \right. \end{cases} \right]$$

$$a \in (-\infty; -1,5] \cup (2; +\infty).$$

Объединяя решения, полученные в каждом из случаев, и учитывая область допустимых значений параметра a , получим $(-5; -1,5] \cup [0,5; 3)$.

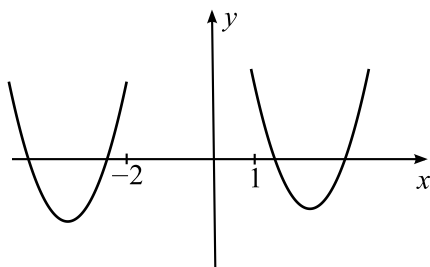


Рис. 426.

Ответ: $(-5; -1,5] \cup [0,5; 3)$.

1493. Область допустимых значений параметра a :

$$\begin{cases} 6 - a - a^2 \geq 0, \\ 3 - (\cos \sqrt{6 - a - a^2} + 2) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + a - 6 \leq 0, \\ \cos \sqrt{6 - a - a^2} \neq 1; \end{cases} \quad \begin{matrix} a^2 + a - 6 < 0; \\ -3 < a < 2. \end{matrix}$$

$$-1 \leq \cos \sqrt{6 - a - a^2} < 1, \quad 0 < 3 - (\cos \sqrt{6 - a - a^2} + 2) \leq 2.$$

Так как знаменатель больше нуля, то для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in (-1; 1)$

$$x^2 + 2(a - 1)x + a^2 > 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 2(a - 1)x + a^2$. Ее графиком является парабола.

Рассмотрим два случая.

1) $D < 0$ — неравенство выполняется при всех x .

$$D = (2(a - 1))^2 - 4 \cdot a^2 < 0; \quad 4a^2 - 8a + 4 - 4a^2 < 0; \quad 8a > 4; \quad a > \frac{1}{2}.$$

2) $D \geq 0$; $a \leq \frac{1}{2}$. Условие задачи выполняется в двух случаях (см.

рис. 427):

а) абсцисса вершины параболы меньше либо равна -1 и $f(-1) \geq 0$;

б) абсцисса вершины параболы больше либо равна 1 и $f(1) \geq 0$.

$$\left[\begin{cases} -(a - 1) \leq -1, \\ 1 - 2a + 2 + a^2 \geq 0; \\ -(a - 1) \geq 1, \\ 1 + 2a - 2 + a^2 \geq 0; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} a \geq 2, \\ a \in R, \\ a \leq 0, \\ \left[\begin{matrix} a \leq -1 - \sqrt{2}, \\ a \geq -1 + \sqrt{2}; \end{matrix} \right. \end{cases} \right.$$

$a \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}] \cup [2; +\infty)$. Так как в этом случае $a \leq \frac{1}{2}$, то

$$a \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}].$$

Объединяя решения, полученные в каждом из случаев, и учитывая область допустимых значений параметра a , получим $(-3; -1 - \sqrt{2}] \cup (0,5; 2)$.

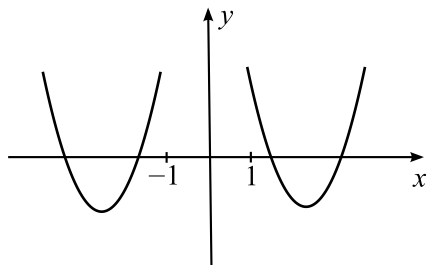


Рис. 427.

Ответ: $(-3; -1 - \sqrt{2}] \cup (0,5; 2)$.

1494. Первое уравнение системы задаёт две симметричные относительно оси ординат окружности радиуса 3, координаты центров которых находятся в точках $(7; 2)$ и $(-7; 2)$. Второе уравнение системы задаёт окружность с центром в точке с координатами $(-3; -1)$ и радиуса a .

Исходя из расположения окружностей ясно, что система будет иметь единственное решение в двух случаях:

1. Когда окружность радиуса a (случай I) касается «левой» окружности: $(x + 7)^2 + (y - 2)^2 = 9$;
2. Когда окружность радиуса a (случай II) касается «правой» окружности: $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 9$ (см. рис. 428).

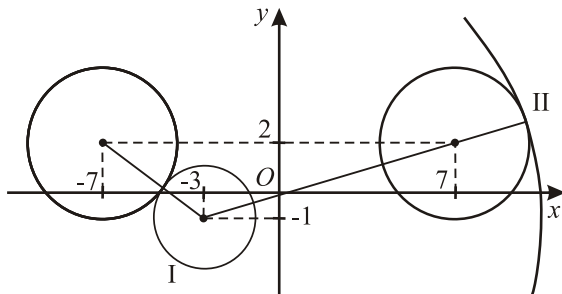


Рис. 428.

1. Расстояние между центрами «левой» окружности и окружности с радиусом a равно сумме их радиусов и равно

$$\sqrt{(-7+3)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{16+9} = 5,$$

то есть $3 + a = 5$, откуда $a = 2$.

2. Расстояние между центрами «правой» окружности и окружности с радиусом a равно

$$\sqrt{(7-(-3))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{10^2+9} = \sqrt{109}.$$

И так как эти окружности касаются, то радиус $a = \sqrt{109} + 3$.

Таким образом, при $a = 2$ и $a = \sqrt{109} + 3$ исходная система уравнений имеет единственное решение.

Ответ: 2; $3 + \sqrt{109}$.

1495. Первое уравнение системы задаёт две симметричные относительно оси абсцисс окружности радиуса 4, центры которых находятся в точках $(5; 8)$ и $(5; -8)$. Второе уравнение системы задаёт окружность с центром в точке с координатами $(-3; 2)$ радиуса a .

Исходя из расположения задаваемых окружностей, ясно, что система имеет единственное решение в двух случаях.

1. Когда окружность радиуса a (случай *I*), касается «верхней» окружности: $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 16$;

2. Когда окружность радиуса a (случай *II*), касается «нижней» окружности: $(x-5)^2 + (y+8)^2 = 16$ (см. рис. 429).

Рассмотрим каждый из случаев.

1. Расстояние между центрами окружностей равно сумме радиусов этих окружностей и равно $\sqrt{(5-(-3))^2 + (8-2)^2} = \sqrt{64+36} = 10$, то есть $a + 4 = 10$, откуда $a = 6$.

2. Расстояние между центрами этих окружностей равно

$\sqrt{(5-(-3))^2 + (2-(-8))^2} = \sqrt{64+100} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$ и равно разности радиусов окружностей, значит, $a = 2\sqrt{41} + 4$. Таким образом, при $a = 6$ и $a = 4 + 2\sqrt{41}$ исходная система уравнений имеет единственное решение.

Ответ: 6; $4 + 2\sqrt{41}$.

1496. Первое уравнение системы задаёт окружность радиусом 4 с центром $(3; 5)$. Второе уравнение задаёт прямой угол (см. рис. 430) с вершиной $(a; 2)$. Следовательно, система имеет три различных решения только в следующих случаях: когда одна из сторон угла касается окружности, а другая пересекает её в двух точках; когда вершина угла лежит на окружности и каждая его сторона пересекает окружность ещё ровно в одной точке.

1) Подставляя значение $y = x - a + 2$ ($y > 2$) в первое уравнение системы, получим $2x^2 - 2(6+a)x + a^2 + 6a + 2 = 0$; $\frac{D_1}{4} = 32 - a^2$.

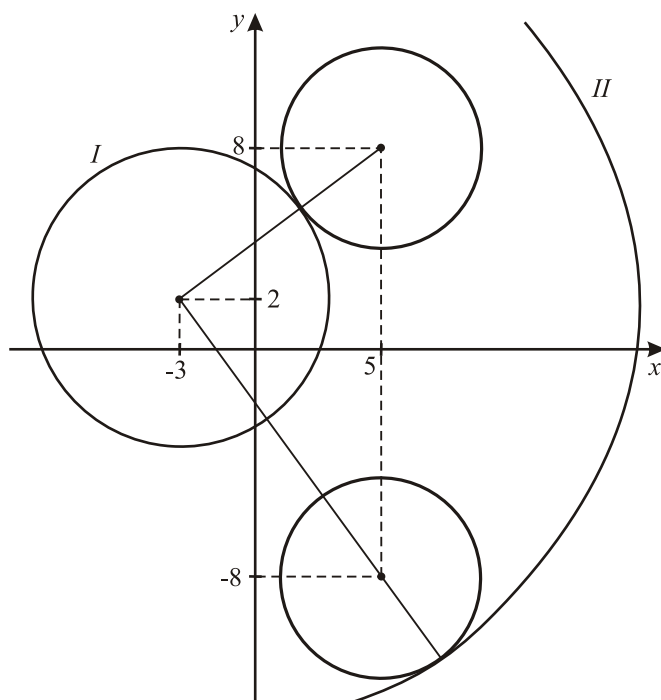


Рис. 429.

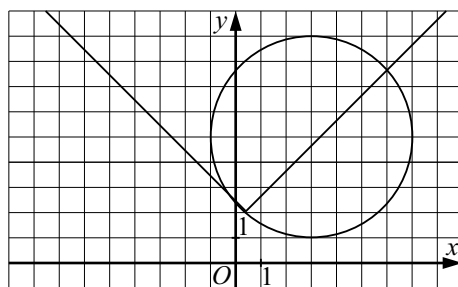


Рис. 430.

2) Для левой стороны угла получаем $y = -x + a + 2$ ($y > 2$) \Rightarrow
 $2x^2 - 2ax + a^2 - 6a + 2 = 0$; $\frac{D_2}{4} = -a^2 + 12a - 4$.

Значит, система имеет ровно 3 решения для всех a , удовлетворяющих

совокупности условий

$$\left[\begin{cases} \frac{6+a}{2} - a + 2 > 2, \\ 32 - a^2 = 0, \\ -a^2 + 12a - 4 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4\sqrt{2}, \\ a = 6 - 4\sqrt{2}. \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} -\frac{a}{2} + a + 2 > 2, \\ 32 - a^2 > 0, \\ -a^2 + 12a - 4 = 0; \end{cases} \right.$$

3) Если вершина угла лежит на окружности, то $(a - 3)^2 + 9 = 16$;
 $a - 3 = \pm 7$; $a = 3 \pm \sqrt{7}$.

Так как ордината вершины угла меньше ординаты центра окружности, а найденные значения a не являются абсциссами точек касания, то исходная система имеет ровно 3 различных решения.

Ответ: $4\sqrt{2}; 6 - 4\sqrt{2}; 3 \pm \sqrt{7}$.

1497. 1) Первое уравнение системы задаёт график, состоящий из частей парабол с вершинами $(-5; 4)$ и $(-5; -4)$, симметричных оси Ox и обладающих осью симметрии $x = -5$ (см. рис. 431). Второе уравнение системы задаёт семейство окружностей (при $a \neq 0$) с центром $(-5; 0)$ и радиусом $r = |a|$.

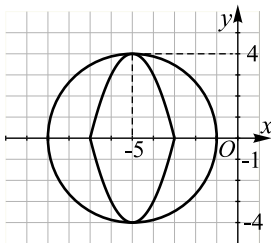


Рис. 431.

2) Согласно условию задачи, необходимо рассматривать случаи, когда окружность касается парабол. В силу симметрии графиков относительно оси Ox и прямой $x = -5$, возможен только один случай: вершина параболы $(-5; 4)$ (а значит, и вершина $(-5; -4)$) лежит на окружности, в этом случае $a^2 = 16$; $a = \pm 4$.

Ответ: ± 4 .

1498. Решение 1.

$$1. \quad x^2 + 2x + y^2 + 4y = 25a^2 - 5 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25a^2.$$

2. Сделаем замену переменной: $x_1 = |x + 1|$, $y_1 = |y + 2|$.

$$\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 2, \\ x_1^2 + y_1^2 = 25a^2. \end{cases}$$
 Каждому решению $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ будут соответствовать 4 решения. Случай $x_1 = 0$ ($y_1 = 0$) разберем отдельно.
3.
$$\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 2, \\ x_1^2 + y_1^2 = 25a^2. \end{cases}$$
 Система может иметь единственное решение при $x_1 = y_1$ ($x_1 > 0$, $y_1 > 0$). Тогда $x_1 = y_1 = 1$; $2 = 25a^2$, $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Покажем, что для данных a существует единственное решение ($x_1 \geq 0$, $y_1 \geq 0$). Пусть $\sqrt{x_1} = t_1$, $\sqrt{y_1} = t_2$, $t_1, t_2 \geq 0$,

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2, \\ t_1^4 + (2 - t_1)^4 = 2. \end{cases}$$

$(t_1^4 + (2 - t_1)^4)' = 4t_1^3 - 4(2 - t_1)^3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2 - t_1 \Leftrightarrow t_1 = 1$ — точка минимума, при $t_1 = 1$ $t_1^4 + (2 - t_1)^4 = 2$, иначе $t_1^4 + (2 - t_1)^4 > 2$, $t_1 = t_2 = 1 \Rightarrow x_1 = y_1 = 1$.

4. Пусть $x_1 = 0$. Тогда $y_1 = 4$, $16 = 25a^2$, $a = \pm \frac{4}{5}$. Пусть $y_1 = 0$. Тогда

$x_1 = 4$, $16 = 25a^2$, $a = \pm \frac{4}{5}$. Каждому решению $(0; y_1)$, где $y_1 > 0$, соответствует 2 решения. Каждому решению $(x_1; 0)$, где $x_1 > 0$, соответствует 2 решения. Проверим, что других решений нет.

$$\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 2, \\ x_1^2 + y_1^2 = 16. \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{x_1} = t_1$, $\sqrt{y_1} = t_2$; $t_1, t_2 \geq 0$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2, \\ t_1^4 + t_2^4 = 2^4, \end{cases} \quad (t_1 + t_2)^4 = t_1^4 + t_2^4 + 3t_1t_2(t_1 + t_2) = 0, \text{ что возможно}$$

только при $t_1 = 0$ или $t_2 = 0$. Значит, при $a = \pm \frac{4}{5}$ система имеет 4 решения.

Ответ: $-\frac{4}{5}; -\frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{4}{5}$.

Решение 2.

Выполним замену переменных системы. Пусть $\bar{x} = x + 1$, $\bar{y} = y + 2$. Таким образом, исходная система уравнений будет иметь ровно 4 решения тогда и только тогда, когда ровно четыре решения будет иметь система уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{|\bar{x}|} + \sqrt{|\bar{y}|} = 2, \\ \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 25a^2. \end{cases}$$

Далее для удобства вместо $\overline{x}, \overline{y}$ будем писать x и y .

Из первого уравнения системы получаем $|y| = (2 - \sqrt{|x|})^2$. Данное уравнение задаёт две кривые на плоскости: график функции $y = (2 - \sqrt{|x|})^2$, симметричный относительно оси Oy , и симметричный ему относительно оси Ox график функции $y = -(2 - \sqrt{|x|})^2$.

Пусть $f(x) = (2 - \sqrt{x})^2$. $f(0) = 4$, $f(4) = 0$. $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$, $f'(x) = 0$ при $x = 4$, $f'(x) > 0$ при $x > 4$, $f(x) < 0$ при $0 < x < 4$. Таким образом, $x = 4$ — точка минимума функции $f(x)$.

$f''(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} > 0$ при $x > 0$, следовательно, график функции $y = f(x)$ направлен выпуклостью вниз.

Построим на плоскости Oxy множество точек, отвечающих первому уравнению полученной системы (см. рис. 432).

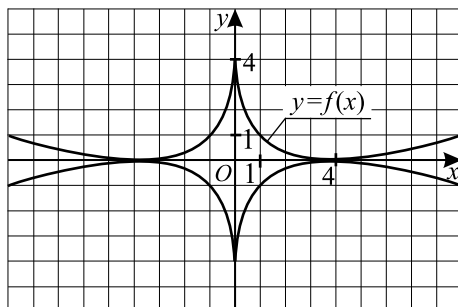


Рис. 432.

Второе уравнение полученной системы задаёт окружность радиуса $5|a|$ с центром в точке начала координат.

Таким образом, система уравнений может иметь ровно четыре решения в двух случаях (см. рис. 433)

В случае I радиус окружности должен быть равен 4, то есть $25a^2 = 16$, $a = \pm \frac{4}{5}$.

В случае II окружность и график функции $y = f(x)$ имеют одну общую точку с абсциссой $x \in (0; 4)$ (функция $f(x) = (2 - \sqrt{x})^2$).

Так как и график $y = f(x)$ на интервале $(0; 4)$, и окружность, задаваемая вторым уравнением системы, симметричны относительно прямой $y = x$, абсцисса этой точки x_2 равна ординате y_2 , откуда $x_2 = (2 - \sqrt{x_2})^2$

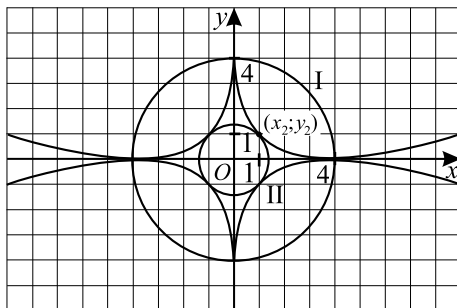


Рис. 433.

$\Rightarrow x_2 = y_2 = 1$. Следовательно, радиус окружности II равен $\sqrt{2}$, то есть $25a^2 = 2$, $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}; -\frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{\sqrt{2}}{5}$.

1499. 1) $x^2 - 6x + y^2 - 2y = 16a^2 - 10 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 16a^2$.

2) Сделаем замену переменных: $x_1 = |x - 3|$, $y_1 = |y - 1|$.

$$\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 4, \\ x_1^2 + y_1^2 = 16a^2. \end{cases}$$

Каждому решению $(x_1; y_1)$: $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ соответствуют 4 решения $(x; y)$.

$$3) \begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 4, \\ x_1^2 + y_1^2 = 16a^2. \end{cases}$$

Система может иметь единственное решение $(x_1; y_1)$:

$x_1 > 0, y_1 > 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1$ (из-за симметрии). Тогда $x_1 = y_1 = 4$, $32 = 16a^2$, $a = \pm\sqrt{2}$. Покажем, что решение $x_1 = y_1 = 4$ — единственное

при данных a (относительно x_1 и y_1), $\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 4, \\ x_1^2 + y_1^2 = 32. \end{cases}$ Пусть $\sqrt{x_1} = t_1$, $\sqrt{y_1} = t_2$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$.

$(t_1^4 + (4 - t_1)^4)' = 4t_1^3 - 4(4 - t_1)^3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4 - t_1 \Leftrightarrow t_1 = 2$ — точка минимума. При $t_1 = t_2 = 2$ имеем $x_1 = y_1 = 4$, при $t_1 > 2$ имеем $t_1^4 + t_2^4 > 32$.

4) Пусть $x_1 = 0$, тогда $y_1 = 16$, $a = \pm 4$. Пусть $y_1 = 0$, тогда $x_1 = 16$, $a = \pm 4$. Каждому решению $(0; y_1)$ ($y_1 > 0$) соответствуют 2 решения, каждому решению $(x_1; 0)$, ($x_1 > 0$) соответствуют 2 решения.

Проверим, что других решений нет. $\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 4, \\ x_1^2 + y_1^2 = 16 \cdot 16. \end{cases}$

Пусть $\sqrt{x_1} = t_1$, $\sqrt{y_1} = t_2$, $t_1, t_2 \geq 0$, тогда $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4, \\ t_1^4 + t_2^4 = 4^4; \end{cases}$
 $(t_1 + t_2)^4 = t_1^4 + t_2^4$. Если раскрыть скобки, то легко увидеть, что это возможно только при $t_1 = 0$ или $t_2 = 0$ (откуда $x = 0$ или $y = 0$ соответственно). Значит, при $a = \pm 4$ исходная система имеет 4 решения.

Ответ: $\pm\sqrt{2}; \pm 4$.

1500. Функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ определены всюду, кроме $x = 0$.

Если x_1 — корень $g_1(x)$, то $x_1^2 f\left(1 + \frac{1}{x_1}\right) = 0$ и $f\left(1 + \frac{1}{x_1}\right) = 0$, то есть $1 + \frac{1}{x_1}$ — корень $f(x)$. Таким образом, каждому корню $g_1(x)$ соответствует корень $f(x)$, причём различным корням $g(x)$ соответствуют различные корни $f(x)$.

Аналогичное утверждение верно для $g_2(x)$. Требование о различном числе корней выполняется только в случае, когда $f(x)$ имеет корень x_0 , которому не соответствует (в указанном выше смысле) никакой корень функции $g_1(x)$ или корень функции $g_2(x)$. Это выполняется только при $x_0 = \pm 1$ (иначе $x_1 = \frac{1}{x_0 - 1}$, $x_2 = \frac{1}{x_0 + 1}$). Найдём, когда f имеет корень $x_0 = \pm 1$. Это выполнено при $1 \pm |m - 2| + 5 - 2m = 0$; $|m - 2| = \pm(2m - 6)$;

$$\begin{cases} m - 2 = 2m - 6, \\ m - 2 = 6 - 2m; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4, \\ m = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $2\frac{2}{3}; 4$.

1501. Функция $g_1(x)$ определена при $x \neq 1$, функция $g_2(x)$ определена при $x \neq 0$.

Если x_1 — корень $g_1(x)$, то $(x_1 - 1)^2 f\left(\frac{1}{x_1 - 1}\right) = 0$ и $f\left(\frac{1}{x_1 - 1}\right) = 0$, то есть $\frac{1}{x_1 - 1}$ — корень $f(x)$. Таким образом, каждому корню $g_1(x)$ соответствует корень $f(x)$, причём различным корням $g_1(x)$ соответствуют различные корни $f(x)$.

Аналогичное утверждение верно для $g_2(x)$. Требование о различном числе корней выполняется только в случае, когда $f(x)$ имеет корень x_0 , которому не соответствует (в указанном выше смысле) никакой корень функции $g_1(x)$ или корень функции $g_2(x)$. Это выполняется только при

$x_0 = 0$ или $x_0 = -1$ (иначе $x_1 = \frac{1}{x_0} + 1$; $x_2 = \frac{1}{x_0 + 1}$). Найдём, когда f имеет корни 0 или -1 .

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(0) = 0, \\ f(-1) = 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -m + 4 = 0, \\ 1 + |3 - m| - m + 4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4, \\ |m - 3| = m - 5; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 4, \\ \begin{cases} m - 5 \geq 0, \\ 3 - m = m - 5; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = 4. \end{aligned}$$

Ответ: 4.

1502. Разложим левую часть неравенства на множители:

$s(x - a)(x + a + 2)(x - 2a + 3) > 0$. Изобразим графически множество решений неравенства. Решения будут в заштрихованной области (см. рис. 434). Так как уравнение $x^2 + a^2 = 36$ задает окружность, то решения системы — это точки дуг окружности, которые попали в заштрихованную область. Ординаты концов этих дуг находим из систем: $\begin{cases} x - a = 0, \\ x^2 + a^2 = 36; \end{cases} \begin{cases} x + a + 2 = 0, \\ x^2 + a^2 = 36; \end{cases} \begin{cases} x - 2a + 3 = 0, \\ x^2 + a^2 = 36. \end{cases}$ Решениями систем

будут $a_{1,2} = \pm 3\sqrt{2}$, $a_{3,4} = -1 \pm \sqrt{17}$ и $a_{5,6} = \frac{6 \pm \sqrt{171}}{5}$ соответственно. Имеем $a \in (-1 - \sqrt{17}; 6]$.

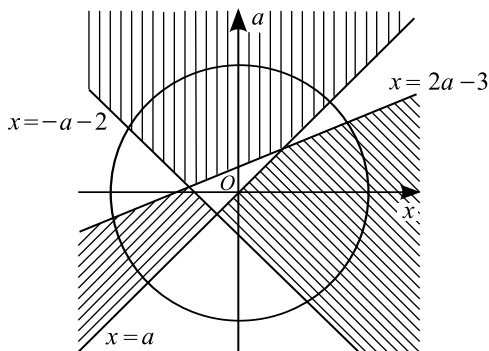


Рис. 434.

Ответ: $a \in (-1 - \sqrt{17}; 6]$.

1503. Разложим левую часть неравенства на множители:

$(x + a)(x - 3a - 2)(2x + a + 3) < 0$. Изобразим графически множество решений неравенства. Решения будут лежать в заштрихованной области. Так как уравнение $x^2 + a^2 = 9$ задает окружность, то решения системы —

это точки дуг окружности, которые попали в заштрихованную область (рис. 435). Ординаты концов этих дуг находим из систем: $\begin{cases} x + a = 0, \\ x^2 + a^2 = 9; \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 3a - 2 = 0, \\ x^2 + a^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + a + 3 = 0, \\ x^2 + a^2 = 9. \end{cases} \quad \text{Решениями систем будут}$$

$$a_{1,2} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}, a_{3,4} = \frac{-6 \pm \sqrt{86}}{10} \text{ и } a_{5,6} = -3; \frac{9}{5} \text{ соответственно. Имеем}$$

$$a \in \left(-3; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{-6 - \sqrt{86}}{10}; 3\right].$$

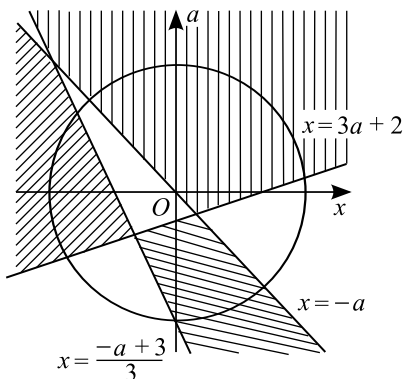


Рис. 435.

$$\text{Ответ: } \left(-3; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{-6 - \sqrt{86}}{10}; 3\right].$$

$$1504. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ |x - 2| \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ -1 \leq x - 2 \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 1 \leq x \leq 3; \end{cases} \\ \Leftrightarrow x \in [1; 3].$$

$$\text{Учитывая ОДЗ, уравнение можно записать в виде} \\ \log_3^2 x - 2(5a - 2) \log_3 x + 25a^2 - 20a + 4 + \arccos(x - 2) = 0;$$

$$(\log_3 x - 5a + 2)^2 + \arccos(x - 2) = 0.$$

$$\text{В силу того что } (\log_3 x - 5a + 2)^2 \geq 0 \text{ и } \arccos(x - 2) \geq 0, \text{ исходное} \\ \text{уравнение равносильно системе } \begin{cases} \log_3 x - 5a + 2 = 0, \\ \arccos(x - 2) = 0, \\ 1 \leq x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x - 5a + 2 = 0, \\ x - 2 = 1, \\ 1 \leq x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x - 5a + 2 = 0, \\ x = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 3 - 5a + 2 = 0, \\ x = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,6, \\ x = 3. \end{cases}$$

Таким образом, при $a = 0,6$ имеем $x = 3$. При $a \in (-\infty; 0,6) \cup (0,6; +\infty)$ исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: При $a = 0,6$ $x = 3$; при $a \in (-\infty; 0,6) \cup (0,6; +\infty)$ решений нет.

1505. Рассмотрим первое уравнение системы

$$\log_2(3 - x - y) + \log_2 4 = \log_2(8 - 3x - 5y), \log_2(12 - 4x - 4y) = \\ = \log_2(8 - 3x - 5y), \begin{cases} 12 - 4x - 4y = 8 - 3x - 5y, \\ 3 - x - y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4, \\ x + y < 3. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы $(x - a)^2 = y - x + a + 9$, подставим $y = x - 4$. Имеем $(x - a)^2 = x - 4 - x + a + 9$, $(x - a)^2 = a + 5$. Это уравнение имеет решение, если $a + 5 \geq 0$,

1. $a + 5 = 0$, $a = -5$. При $a = -5$ имеем $(x - a)^2 = 0$, $x + 5 = 0$, $x = -5$, тогда $y = -5 - 4 = -9$. В этом случае $x + y = -9 - 5 = -14 < 3$.

Исходная система имеет единственное решение $(-5; -9)$, что не удовлетворяет условию задачи.

$$2. a + 5 > 0, a > -5. \text{ При } a > -5 \text{ имеем } |x - a| = \sqrt{a + 5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a - \sqrt{a + 5}, \\ x_2 = a + \sqrt{a + 5}; \end{cases} \text{ тогда } y_1 = a - \sqrt{a + 5} - 4 = a - 4 - \sqrt{a + 5}, \\ y_2 = a + \sqrt{a + 5} - 4 = a - 4 + \sqrt{a + 5}$$

Исходная система будет иметь ровно два решения $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, если они будут удовлетворять условию $x + y < 3$.

а) Пара $(a - \sqrt{a + 5}; a - 4 - \sqrt{a + 5})$.

$$a - \sqrt{a + 5} + a - 4 - \sqrt{a + 5} < 3.$$

$$2a - 2\sqrt{a + 5} - 7 < 0.$$

$$2a - 7 < 2\sqrt{a + 5}.$$

$$\begin{cases} 2a - 7 < 0, \\ a + 5 > 0, \\ 2a - 7 \geq 0, \\ (2a - 7)^2 < 4(a + 5); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3,5, \\ a > -5, \\ a \geq 3,5, \\ 4a^2 - 32a + 29 < 0. \end{cases}$$

Решим неравенство $4a^2 - 32a + 29 < 0$, $4a^2 - 32a + 29 = 0$,

$$a_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 116}}{4} = \frac{16 \pm \sqrt{140}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{35}}{2},$$

$a \in \left(\frac{8 - \sqrt{35}}{2}; \frac{8 + \sqrt{35}}{2}\right)$. Следовательно, решением совокупности явля-

ется $-5 < a < \frac{8 + \sqrt{35}}{2}$.

б) Пара $(a + \sqrt{a+5}; a - 4 + \sqrt{a+5})$.

$$a + \sqrt{a+5} + a - 4 + \sqrt{a+5} < 3, 2\sqrt{a+5} < 7 - 2a,$$

$$\begin{cases} 7 - 2a \geq 0, \\ a + 5 > 0, \\ 4a + 20 < 49 - 28a + 4a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 3,5, \\ a > -5, \\ \left[\begin{array}{l} a < \frac{8 - \sqrt{35}}{2}, \\ a > \frac{8 + \sqrt{35}}{2}; \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 < a < \frac{8 - \sqrt{35}}{2}.$$

Следовательно, обе пары являются решениями исходной системы при $-5 < a < \frac{8 - \sqrt{35}}{2}$.

Ответ: $\left(-5; \frac{8 - \sqrt{35}}{2}\right)$.

1506. Построим в одной системе координат график функции $y = \sqrt{|x|}$ и график функции $y = |x + 3| + a$ при различных значениях параметра a (см. рис. 436). Функция $y = |x + 3| + a$ принимает наименьшее значение в точке $x = -3, y(-3) = a$. По рисунку видно, что графики $y = \sqrt{|x|}$ и $y = |x + 3| + a$ не пересекаются при $a > a_1$; пересекаются в одной точке при $a = a_1$; пересекаются в двух точках при $a_1 < a < a_2$; пересекаются в трёх точках при $a = a_2$ (с учётом касания в точке с положительной абсциссой); пересекаются в четырёх точках при $a_2 < a < a_3$; пересекаются в трёх точках при $a = a_3$; пересекаются в двух точках при $a < a_3$. Таким образом, ответом будет $a \in (-\infty; a_3) \cup (a_2; a_1)$. Теперь нужно найти значения a_1, a_2, a_3 .

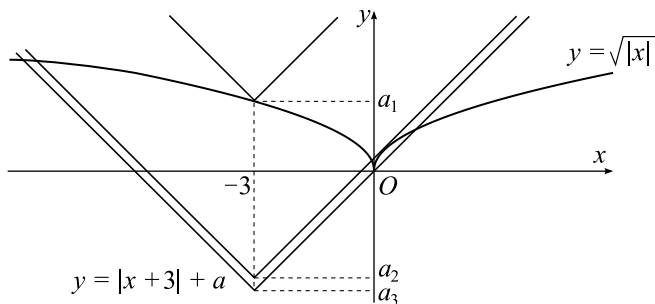


Рис. 436.

Значение $a_1 = \sqrt{3}$ получаем из совпадения графиков в точке $x = -3$.

Значение a_2 находим из условия касания графиков в точке с положительной абсциссой:

$$\begin{cases} (x+3+a_2)' = (\sqrt{x})', \\ x+3+a_2 = \sqrt{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ a_2 = \sqrt{x} - x - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 3; \end{cases}$$

$$a_2 = -2,75.$$

Значение a_3 находим из условия прохождения графика $y = |x+3| + a_3$ через точку $(0; 0)$. Получаем $a_3 = -3$.

Исходное уравнение имеет ровно два решения при $a \in (-\infty; -3) \cup (-2,75; \sqrt{3})$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-2,75; \sqrt{3})$.

1507. Построим в одной системе координат график функции $y = \sqrt{|x|}$ и график функции $y = |x-2| + a$ при различных значениях параметра a (см. рис. 437). Функция $y = |x-2| + a$ принимает наименьшее значение в точке $x = 2, y(2) = a$. По рисунку видно, что графики $y = \sqrt{|x|}$ и $y = |x-2| + a$ не пересекаются при $a > a_1$; пересекаются в одной точке при $a = a_1$; пересекаются в двух точках при $a_1 < a < a_2$; пересекаются в трёх точках при $a = a_2$ (с учётом касания в точке с отрицательной абсциссой); пересекаются в четырёх точках при $a_2 < a < a_3$; пересекаются в трёх точках при $a = a_3$; пересекаются в двух точках при $a < a_3$. Таким образом, ответом будет $a \in (-\infty; a_3) \cup (a_2; a_1)$. Теперь нужно найти значения a_1, a_2, a_3 .

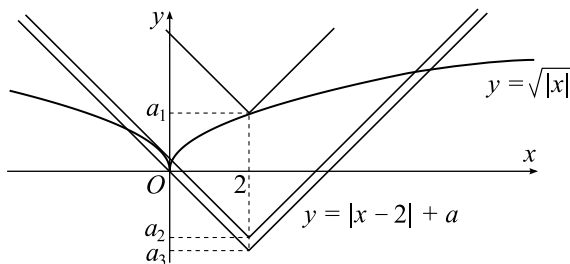


Рис. 437.

Значение $a_1 = \sqrt{2}$ получаем из совпадения графиков в точке $x = 2$.

Значение a_2 находим из условия касания графиков в точке с отрицательной абсциссой:

$$\begin{cases} (2-x+a_2)' = (\sqrt{-x})', \\ 2-x+a_2 = \sqrt{-x}; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}, \\ a_2 = \sqrt{-x} + x - 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4}, \\ a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2; \end{cases} \quad a_2 = -1,75.$$

Значение a_3 находим из условия прохождения графика $y = |x-2| + a_3$ через точку $(0; 0)$. Получаем $a_3 = -2$.

Исходное уравнение имеет ровно два решения при $a \in (-\infty; -2) \cup (-1,75; \sqrt{2})$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1,75; \sqrt{2})$.

1508. Преобразуем исходное уравнение.

$$x(x-2a) + \cos(\pi x + a) \sin a + 1 = \sin(\pi x + a) \cos a - a^2;$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + 1 = \sin(\pi x + a) \cos a - \cos(\pi x + a) \sin a;$$

$$(x-a)^2 + 1 = \sin \pi x.$$

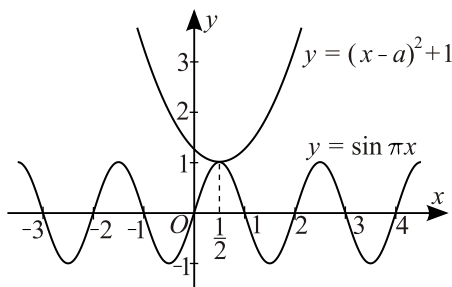


Рис. 438.

При всех значениях x выполняется $(x-a)^2 + 1 \geq 1$, причём равенство достигается только при $x = a$. При всех значениях x выполняется $\sin \pi x \leq 1$, причём равенство достигается только при $x = 2n + \frac{1}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому парабола $y = (x-a)^2 + 1$ и синусоида $y = \sin \pi x$ (см. рис. 438) имеют только одну общую точку при $a = 2n + \frac{1}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$, значит, при этих значениях a данное уравнение имеет только один корень.

Ответ: $a = 2n + \frac{1}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

1509. Преобразуем исходное уравнение.

$$x(x+2b) - \cos(\pi x + b) \cos b + 1 = \sin(\pi x + b) \sin b - b^2;$$

$$x^2 + 2bx + b^2 + 1 = \cos(\pi x + b) \cos b + \sin(\pi x + b) \sin b;$$

$$(x+b)^2 + 1 = \cos \pi x.$$

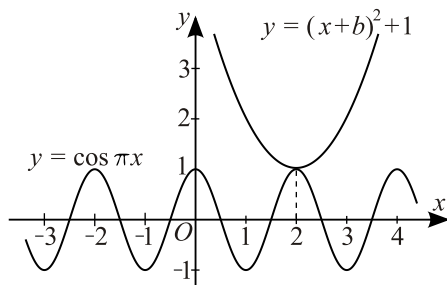


Рис. 439.

При всех значениях x выполняется $(x+b)^2 + 1 \geq 1$, причём равенство достигается только при $x = -b$. При всех значениях x выполняется $\cos \pi x \leq 1$, причём равенство достигается только при $x = 2n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому парабола $y = (x+b)^2 + 1$ и косинусоида $y = \cos \pi x$ (см. рис. 439) имеют только одну общую точку при $-b = 2n$, где $n \in \mathbb{Z}$, то есть при $b = -2n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Эту серию решений можно также записать в виде $b = 2n$, где $n \in \mathbb{Z}$. При этих значениях b данное уравнение имеет только один корень.

Ответ: $b = 2n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

1510. Пусть $x - 1 = t$; $x = t + 1$; $\pi^2 t^2 + 4a \cos(2\pi t + 2\pi) + 4a^4 = 0$; $\pi^2 t^2 + 4a \cos(2\pi t) + 4a^4 = 0$.

Если t_0 — корень последнего уравнения, то и $t = -t_0$ — корень \Rightarrow нечётное число решений может быть, если корень $t_0 = -t_0$, то есть $t_0 = 0$. Имеем $\pi^2 \cdot 0 + 4a \cos(2\pi \cdot 0) + 4a^4 = 0$; $4a + 4a^4 = 0$; $a(a^3 + 1) = 0$; $a = 0$, $a = -1$.

1) $a = 0 \Rightarrow \pi^2 t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ (один корень).

2) $a = -1 \Rightarrow \pi^2 t^2 - 4 \cos 2\pi t + 4 = 0$. Пусть $\pi t = y$; $y^2 - 4 \cos 2y + 4 = 0$; $4 \cos 2y = y^2 + 4$; $\begin{cases} f(y) = 4 \cos 2y \leq 4, \\ g(y) = y^2 + 4 \geq 4; \end{cases} \Rightarrow f(y) = g(y) \text{ только при } y = 0$ (один корень), так как $g(y) > 4$ при $y \neq 0$.

Ответ: 0; -1.

1511. Заметим, что $\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, а $\log_3(4 - |\sin px|) \geq 1$, так как $4 - |\sin px| \geq 3$, поэтому обе части равенства должны быть равными 1.

$$\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \pi x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k; x = 2k + \frac{1}{6}, k \in Z; x \in [2; 3] \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 2\frac{1}{6}.$$

$$\log_3(4 - |\sin px|) = 1 \Leftrightarrow 4 - |\sin px| = 3 \Leftrightarrow |\sin px| = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin px = \pm 1 \Leftrightarrow px = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z. \text{ С другой стороны, } px = \frac{13}{6}p.$$

$$\text{Откуда } p = \frac{3\pi + 6\pi k}{13}, k \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\pi + 6\pi k}{13}, k \in Z.$$

1512. $\log_x(x - a) > 2$. Если $x = -a$ является решением неравенства, то $\log_{-a}(-2a) > -2$. (1)

$$\text{Область определения неравенства: } \begin{cases} -a > 0, \\ -a \neq 1, \\ -2a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ a \neq -1. \end{cases} \quad (2)$$

На области определения неравенство (1) равносильно совокупно-

$$\text{сти двух систем: } \begin{cases} \begin{cases} 0 < -a < 1, \\ -2a < (-a)^2, \\ -a > 1, \\ -2a > (-a)^2; \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} -1 < a < 0, \\ a(a+2) > 0, \\ a < -1, \\ a(a+2) < 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} -1 < a < 0, \\ a < -2, a > 0, \\ a < -1, \\ -2 < a < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Первая система, очевидно, не имеет решений. Решение второй системы: $(-2; -1)$.

$$\text{Ответ: } (-2; -1).$$

$$\mathbf{1513.} \quad ax^2 + 3a > 4x; \quad ax^2 - 4x + 3a > 0. \quad (1)$$

Найдём значения a , при которых значения $x = a$ не удовлетворяют неравенству (1). Другими словами, при которых значения $x = a$ удовлетворяют неравенству противоположного смысла $a \cdot a^2 - 4 \cdot a + 3a \leq 0$; $a(a^2 - 1) \leq 0$; $a(a - 1)(a + 1) \leq 0$; $a \leq -1$; $0 \leq a \leq 1$.

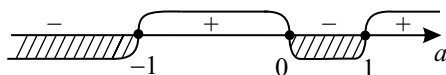


Рис. 440.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$.

1514. Решим уравнение $2x^2 + x(a - 6) - 5(a + 4) = 0$.

$$D = (a - 6)^2 + 2 \cdot 5(a + 4) \cdot 4 = a^2 + 28a + 196 = (a + 14)^2, x_1 = -\frac{a}{2} - 2; \\ x_2 = 5.$$

Рассмотрим множество точек $(x; a)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2(x + 0,5a + 2)(x - 5) \geq 0, & (1) \\ (a^2 + x^2 - 4)(a^2 + x^2 - 16) \leq 0. & (2) \end{cases}$$

Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству (1), — это тупые углы, ограниченные прямыми $x = 5$ и $x = -\frac{a}{2} - 2$. Координаты точек, принадлежащих кольцу между окружностями $x^2 + a^2 = 4$ и $x^2 + a^2 = 16$ (см. рис. 441), удовлетворяют неравенству (2) системы. Тогда координаты точек заштрихованной фигуры являются решениями системы. Найдём значения a для точек A и D :

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{2} - 2, & \frac{a^2}{4} + 2a + 4 + a^2 = 16; \quad 5a^2 + 8a - 48 = 0; \quad a_1 = -4, \\ x^2 + a^2 = 16; \end{cases}$$

$$a_2 = -2,4.$$

Система имеет решения при $a \in [-4; 2,4]$.

Ответ: $a \in [-4; 2,4]$.

1515. Рассмотрим точки на координатной плоскости, координаты которых $(a; x)$ таковы, что система имеет решения. Преобразуем второе неравенство системы $D = (a + 5)^2 - 4(4a + 4) = a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$.

$\begin{cases} x = -4, \\ x = -a - 1, \end{cases} (x + 4)(x + a + 1) \leq 0$. Точки, координаты которых удовлетворяют второму неравенству системы, — это углы, ограниченные прямыми $x = -4$ и $x = -a - 1$. $(a^2 + x^2 - 9)(a^2 + x^2 - 4x - 5) = 0$, если $a^2 + x^2 = 9$; $a^2 + (x - 2)^2 = 9$, это окружности радиуса 3 и центрами $(0; 0)$ и $(2; 0)$. Точки, координаты которых удовлетворяют первому неравенству, — это часть кругов, ограниченных данными окружностями (см. рис. 442). Точки, координаты которых удовлетворяют системе, — общие для (1) и (2) (см. рис. 443). Найдём a для точек A и D . Для

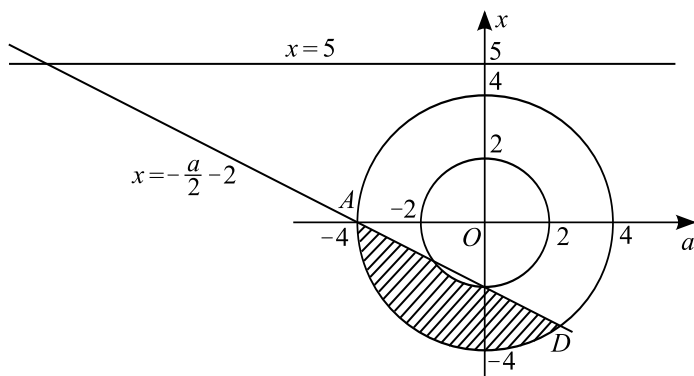


Рис. 441.

точки A : $\begin{cases} x = -a - 1, \\ x^2 + a^2 - 9 = 0; \end{cases} \quad 2a^2 + 2a - 8 = 0; \quad a^2 + a - 4 = 0;$
 $a = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, a = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$. Ордината точки A больше нуля, следовательно, $a = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$.

Точка D имеет координаты $(0; -3)$. Система имеет решения при $-3 \leq a \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$, так как дуга AD содержит решения;
 при $a > \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ или $a < -3$ решений нет.

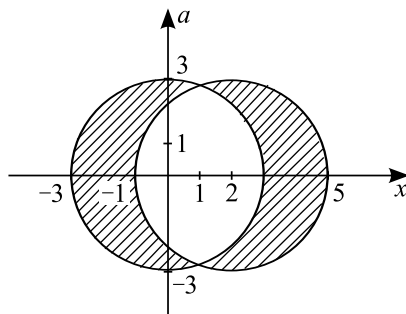


Рис. 442.

Ответ: $a \in \left[-3; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right]$.

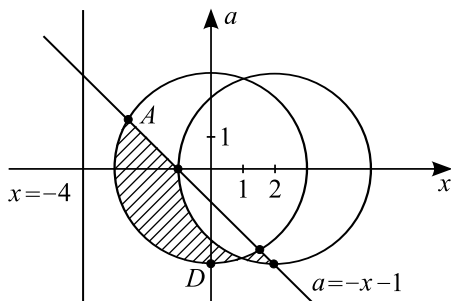


Рис. 443.

1516. $\sqrt{x^2 + ax} > x - 2$. Так как $x \in [4; 7]$, то $x - 2 > 0$. Тогда полученное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} (\sqrt{x^2 + ax})^2 > (x - 2)^2, \\ x^2 + ax \geq 0. \end{cases}$ Из неравенства $x^2 + ax > x^2 - 4x + 4$ следует $(a + 4)x - 4 > 0$.

Требование наличия в решении полученного неравенства отрезка $[4; 7]$ равносильно тому, что функция $y = (a + 4)x - 4$, графиком которой является прямая линия, в точках 4 и 7 принимает положительные значения.

$$\begin{cases} (a + 4) \cdot 4 - 4 > 0, \\ (a + 4) \cdot 7 - 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 - 1 > 0, \\ 7a + 24 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -3, \\ a > -\frac{24}{7}; \end{cases} \quad a > -3.$$

При $a > -3$ неравенство $x^2 + ax \geq 0$ для $x \in [4; 7]$ выполняется.

Ответ: $(-3; +\infty)$.

1517. ОДЗ второго выражения: $x \in R$.

$x^2 - 3x + 3 \neq a\sqrt{x^2 - 3x + 6}$ для любого $x \in (1; 5]$.

Пусть $x^2 - 3x + 3 = t$. Тогда $t \neq a\sqrt{t + 3}$. Найдём множество значений $t(x)$ при $x \in (1; 5]$.

$$t = \left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}. \quad \frac{3}{2} \in (1; 5]. \quad t\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4},$$

$t(1) = 1, t(5) = 13$. Таким образом, если $x \in (1; 5]$, то $t \in \left[\frac{3}{4}; 13\right]$.

Отметим, что $a \leq 0$ удовлетворяют условию задачи (так как $x^2 - 3x + 3 > 0$ при всех значениях $x \in R$).

Пусть $a > 0$. $t^2 \neq a^2(t+3)$. Данная задача в этом случае равносильна следующей. Найдите все положительные значения a , при которых трёхчлен $f(t) = t^2 - a^2t - 3a^2$ не имеет корней на промежутке $\left[\frac{3}{4}; 13\right]$. Так как ветви параболы $y = f(t)$ направлены вверх и $f(0) = -3a^2 < 0$, то это выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f\left(\frac{3}{4}\right) > 0, \\ f(13) < 0. \end{cases}$$

Решим это объединение неравенств, учитывая $a > 0$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{9}{16} - \frac{3}{4}a^2 - 3a^2 > 0, \\ 169 - 13a^2 - 3a^2 < 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15a^2}{4} < \frac{9}{16}, \\ 16a^2 > 169; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{15} \cdot a}{2} < \frac{3}{4}, \\ 4a > 13; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{3}{2\sqrt{15}}, \\ a > \frac{13}{4}; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{\sqrt{15}}{10}, \\ a > \frac{13}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая, что $a \leq 0$ удовлетворяют условию задачи, получим ответ.

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{\sqrt{15}}{10}\right) \cup (3,25; +\infty).$$

1518. $3 - |x - a| > x^2$. Задача допускает довольно простое графическое решение. Перепишем неравенство в виде: $3 - x^2 > |x - a|$. (1) На одной координатной плоскости построим графики функций $y = 3 - x^2$ и $y = |x - a|$. Решением являются отрицательные значения x , при которых график квадратичной функции проходит выше графика функции $y = |x - a|$ (см. рис. 444).

График функции $y = |x - a|$ получается из графика $y = |x|$ смещением по оси Ox . Его вершина находится в точке $(a; 0)$. На рис. 444 изображены два крайних (с точки зрения существования решений) положения графика $y = |x - a|$. Луч AB касается параболы в точке B . При смещении графика вправо появляется область отрицательных значений x , отвечающих решению неравенства (1). Для отрицательных значений x точки параболы будут лежать выше графика $y = |x - a|$ вплоть до момента, когда луч DC пройдет через вершину параболы. При увеличении a , то есть при смещении луча DC вправо. Неравенство (1) еще может иметь решения, но среди них не будет отрицательных чисел. Таким образом, для получения необходимого результата a должно изменяться в промежутке $(x_A; x_D)$. B — точка графика функции $y = 3 - x^2$ с абс-

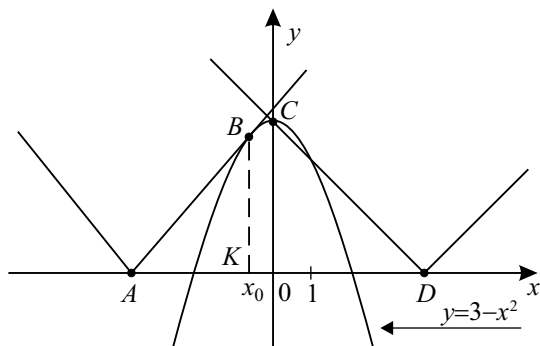


Рис. 444.

циссой x_0 . Касательная AB в этой точке наклонена к оси Ox под углом 45° , угловой коэффициент касательной равен 1. Найдём x_0 : $y = 3 - x^2$; $y' = -2x$; $-2x_0 = 1$; $x_0 = -\frac{1}{2}$. $\triangle AKB$ — прямоугольный, равнобедрен-

ный. $AK = KB = 3 - x_0^2 = 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$. $OA = AK + KO = 2\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{4}$.

Следовательно, $x_A = -3\frac{1}{4}$. Далее: $\triangle OCD$ — равнобедренный и прямоугольный. $C(0; 3)$ — вершина параболы. Значит $x_D = 3$. Таким образом, $a \in \left(-3\frac{1}{4}; 3\right)$.

Ответ: $\left(-3\frac{1}{4}; 3\right)$.

1519. 1) Выпишем ОДЗ.
$$\begin{cases} x^2 - 7x + 13 > 0, \\ \log_7(x^2 - 7x + 13) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 13 > 0, \\ x^2 - 7x + 13 \geq 1; \end{cases}$$

$$x^2 - 7x + 12 \geq 0; (x - 3)(x - 4) \geq 0; \begin{cases} x \geq 4, \\ x \leq 3. \end{cases}$$

2) $x = 3$ и $x = 4$ являются решениями, а при остальных x $\sqrt{\log_7(x^2 - 7x + 13)} > 0$, поэтому можно упростить исходное неравенство, поделив обе части его на положительное число.

$12^x \log_{12} x + 12 - 12 \log_{12} x - 12^x \leq 0$; $12^x(\log_{12} x - 1) - 12(\log_{12} x - 1) \leq 0$; $12(12^{x-1} - 1)(\log_{12} x - 1) \leq 0$. Решаем методом интервалов, учитывая ОДЗ (см. рис. 445). Решения неравенства $[1; 3] \cup [4; 12]$.

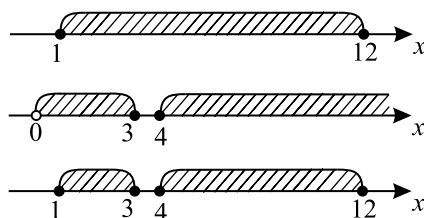


Рис. 445.

3) Так как число a не должно являться решением неравенства, то $a < 1$ или $a > 12$. Но при $a > 12$ имеем: $3^{a-2} > 3 + 3^{10}$ и между числами a и $3 + 3^{a-2}$ решений неравенства нет. Поэтому значения $a > 12$ не удовлетворяют условиям задачи и $a < 1$. Легко видеть, что $a = 0$ удовлетворяет всем условиям, то есть является искомым значением.

Ответ: 0.

1520. Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{3^x - 6a + 3}{a - 2} + \frac{12}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq \frac{10a + 2}{3 - a - 3^x},$$

$$\frac{(3^x - 6a + 3)(3^x + a - 3) + (a - 2)(10a + 2) + 12}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq 0,$$

$$\frac{(3^x)^2 - 2^x \cdot 5a + 4a^2 + 3a - 1}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq 0. \text{ Сделав замену } t = 3^x > 0, \text{ получим}$$

$$\text{неравенство } \frac{t^2 - t \cdot 5a + 4a^2 + 3a - 1}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq 0. \text{ Найдём корни трёхчлена}$$

$$t^2 - t \cdot 5a + 4a^2 + 3a - 1: t_{1,2} = \frac{5a \pm \sqrt{25a^2 - 4 \cdot (4a^2 + 3a - 1)}}{2},$$

$$t_{1,2} = \frac{5a \pm \sqrt{9a^2 - 12a + 4}}{2}, \quad t_{1,2} = \frac{5a \pm \sqrt{(3a - 2)^2}}{2},$$

$$t_{1,2} = \frac{5a \pm (3a - 2)}{2} \Rightarrow t_1 = a + 1, \quad t_2 = 4a - 1. \text{ Таким образом,}$$

$$\text{приходим к неравенству } \frac{(t - (a + 1))(t - (4a - 1))}{(a - 2)(t - (3 - a))} \leq 0. \text{ Воспользуемся}$$

методом интервалов для его решения. Знак левой части неравенства будет зависеть от знака выражения $(a - 2)$, поэтому рассмотрим два случая:

1) $a < 2$, тогда $a - 2 < 0$. В этом случае решение неравенства относительно t всегда будет содержать промежуток $[t_0; +\infty)$, где $t_0 > 0$, но тогда решение неравенства относительно x будет содержать промежуток

$[\log_3 t_0; +\infty)$ и множество решений исходного неравенства не будет являться отрезком.

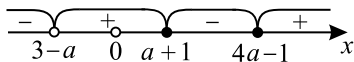


Рис. 446.

2) $a > 2$, то есть $a - 2 > 0$. Тогда $(4a - 1) - (a + 1) = 3a - 2 > 0$, $(a + 1) - (3 - a) = 2a - 2 > 0$, а значит, $3 - a < a + 1 < 4a - 1$. Тогда по методу интервалов (см. рисунок 446) решением неравенства относительно t будет множество $(-\infty; 3 - a) \cup [a + 1; 4a - 1]$, но $t > 0$, поэтому если $0 \in (-\infty; 3 - a) \cup [a + 1; 4a - 1]$, то среди решений неравенства относительно t будет содержаться промежуток $(0; t_0]$. Следовательно, множество решений исходного неравенства будет содержать промежуток $(-\infty; \log_3 t_0]$ и множество решений исходного неравенства не будет являться отрезком. Таким образом, чтобы множество решений исходного неравенства было отрезком, необходимо и достаточно выполнение условия $0 \in [3 - a; a + 1) \Rightarrow \begin{cases} 3 - a \leq 0, \\ a + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 3$. При этом решением неравенства относительно t будет отрезок $[a + 1; 4a - 1]$, а относительно x — отрезок $[\log_3(a + 1); \log_3(4a - 1)]$. Его длина равна $\log_3(4a - 1) - \log_3(a + 1) = \log_3 \frac{4a - 1}{a + 1}$, по условию она меньше 1.

Таким образом, значения a находим из неравенства $\log_3 \frac{4a - 1}{a + 1} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{4a - 1}{a + 1} < 3$. При $a \geq 3$ имеем $0 < \frac{4a - 1}{a + 1} < 3 \Leftrightarrow \frac{a - 4}{a + 1} < 0 \Leftrightarrow a \in [3; 4)$ при $a \geq 3$.

Ответ: $[3; 4)$.

1521. Если $3 - \sqrt{x} > 1$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_{0,5}(0,5|x - 5| - 1,5) < 1, \\ \log_{0,5}(0,5|x - 5| - 1,5) > 0, \\ 3 - \sqrt{x} > 1, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5|x - 5| - 1,5 > 0,5, \\ 0,5|x - 5| - 1,5 < 1, \\ \sqrt{x} < 2, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 5| > 4, \\ |x - 5| < 5, \\ x < 4, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

По определению модуля функции: $|x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{при } x \geq 5, \\ 5 - x, & \text{при } x < 5. \end{cases}$ Так как $x < 4$, то рассматриваем лишь тот случай, когда $x < 5$. Получим систему

$$\begin{cases} 5 - x > 4, \\ 5 - x < 5, \\ x < 4, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x > 0, \\ x < 4, \\ x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 1).$$

Если $0 < 3 - \sqrt{x} < 1$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_{0,5}(0,5|x - 5| - 1,5) > 1, \\ \log_{0,5}(0,5|x - 5| - 1,5) > 0, \\ 0 < 3 - \sqrt{x} < 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5|x - 5| - 1,5 < 0,5, \\ 0,5|x - 5| - 1,5 > 0, \\ \sqrt{x} > 2, \\ \sqrt{x} < 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 5| < 4, \\ |x - 5| > 3, \\ x > 4, \\ x < 9. \end{cases}$$

Для $x \geq 5$ получим систему

$$\begin{cases} x - 5 < 4, \\ x - 5 > 3, \\ x > 4, \\ x < 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 9, \\ x > 8, \\ x > 4, \\ x < 9. \end{cases} \Rightarrow x \in (8; 9).$$

Для $x < 5$ получим систему

$$\begin{cases} 5 - x < 4, \\ 5 - x > 3, \\ x > 4, \\ x < 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x < 2, \\ x > 4, \\ x < 9. \end{cases} \text{ Решений нет.}$$

Таким образом, решением логарифмического неравенства являются значения $x \in (0; 1) \cup (8; 9)$.

Преобразуем выражение:

$$\frac{a+1}{a-1} + 2 \frac{a+1}{(a-1)^2} = \frac{a+1}{a-1} \left(1 + \frac{2}{a-1} \right) = \left(\frac{1+a}{1-a} \right)^2.$$

Чтобы найти a , нужно решить следующие системы:

$$\begin{cases} 0 < \frac{1+a}{1-a} < 1, \\ 0 < \left(\frac{1+a}{1-a} \right)^2 < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 8 < \frac{1+a}{1-a} < 9, \\ 8 < \left(\frac{1+a}{1-a} \right)^2 < 9; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{1+a}{1-a} < 1, \\ 8 < \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2 < 9; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 8 < \frac{1+a}{1-a} < 9, \\ 0 < \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2 < 1. \end{array} \right.$$

Последние три системы решений не имеют.

В результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{1+a}{1-a} < 1, \\ 0 < \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2 < 1; \end{array} \right. \quad \text{Сделаем замену: } t = \frac{1+a}{1-a}. \text{ Тогда } \left\{ \begin{array}{l} 0 < t < 1, \\ 0 < t^2 < 1; \end{array} \right.$$

Эта система, очевидно, имеет решение $t \in (0; 1)$. Вторая система решений не имеет. С учетом замены получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+a}{1-a} > 0 \\ \frac{1+a}{1-a} < 1; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a > -1, \\ a < 0. \end{array} \right.$$

Ответ: $(-1; 0)$.

1522. $|x - a| + |y| \leq 2$ (1),

$(y + 3)(y - x + 2)(x^2 - 8x + 12 - y) \geq 0$ (2).

Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства (1) (см. рис. 447).

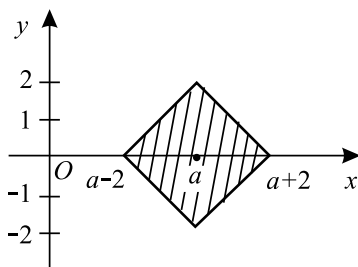


Рис. 447.

Так как для любого решения $(x; y)$ неравенства (1) выполняется условие $-2 \leq y \leq 2$, то для таких значений y имеем $y + 3 > 0$ и неравенство (2) примет вид $(y - x + 2)(x^2 - 8x + 12 - y) \geq 0$,

$(y - (x - 2))(y - (x^2 - 8x + 12)) \leq 0$ (3).

Изобразим на координатной плоскости графики функций $y = x - 2$ и $y = x^2 - 8x + 12$ (см. рис. 448).

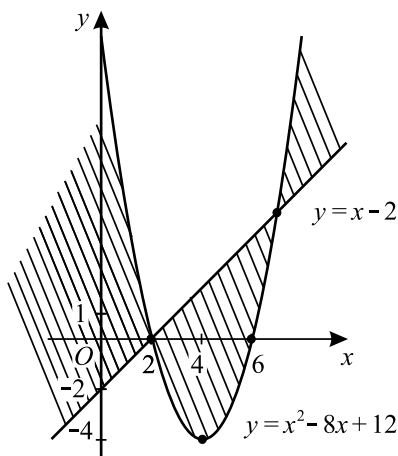


Рис. 448.

Решением неравенства (3) являются такие пары $(x; y)$, в которых значение y лежит между значениями выражений $x - 2$ и $x^2 - 8x + 12$, как показано на рисунке 448.

Итак, необходимо найти такие значения параметра a , при которых множество решений неравенства (1), изображённое на рисунке 447, содержится в множестве, изображённом на рисунке 448.

Нетрудно заметить, что искомыми значениями a будут $a \leq 0$, $a = 4$.

Ответ: $a \leq 0$, $a = 4$.

1523. $|x - a| + 2|y - 3| \leq 1,5$ (1),
 $(xy - 6)(x + 1)(2y - x - 4) \leq 0$ (2).

Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства (1) (см. рис. 449).

Так как для любого решения $(x; y)$ неравенства (1) выполняется условие $y \geq 2,25$, то неравенство (2) можно привести к виду

$$\left(x - \frac{6}{y}\right)(x + 1)(x - (2y - 4)) \geq 0 \quad (3).$$

Изобразим на координатной плоскости графики функций $x = \frac{6}{y}$, $x = -1$ и $x = 2y - 4$ (см. рис. 450).

При $y > 0$ решение неравенства (3) изображено на рисунке 450.

Необходимо найти такие значения параметра a , при которых множество решений неравенства (1), изображённое на рисунке 449, содержится в

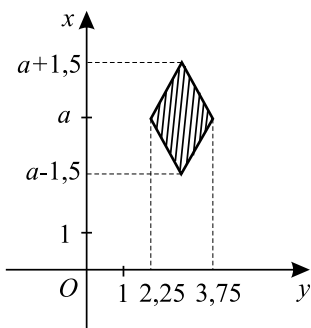


Рис. 449.

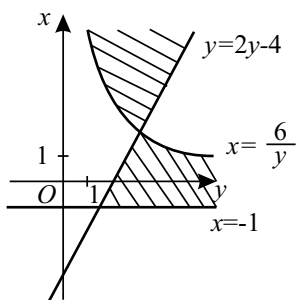


Рис. 450.

множестве, изображённом на рисунке 450. Нетрудно заметить, что искомыми значениями a будут $a \geq 3,5$, $a = 0,5$.

Ответ: $a = 0,5$, $a \geq 3,5$.

1524. Так как корнями трехчлена во 2-й строке системы являются $x = a$, $x = 3a - 3$, то систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} (x-2)^2 + a^2 = 5^2, \\ (x-a)(x-(3a-3)) \leq 0, \\ |x| + |a| \geq 4. \end{cases}$$

Изобразим соответствующие кривые в системе координат, где по оси абсцисс откладываются значения a , по оси ординат — значения x (см. рис. 451). Первая строка системы задает окружность радиуса 5 с центром в точке $(0; 2)$. Вторая строка системы задает часть плоскости между прямыми $x = 3a - 3$ и $x = a$, а именно внутри углов AEB и CEF . Третья строка системы задает часть плоскости вне квадрата с вершинами $(4; 0)$, $(0; 4)$, $(-4; 0)$, $(0; -4)$. Из построенных графиков ясно, что решениями

системы являются точки, соответствующие дугам AB и CD окружности. Найдем соответствующие значения параметра a .

$$\text{Точка } A: \begin{cases} (x-2)^2 + a^2 = 25, & (3a-5)^2 + a^2 = 25; \\ x = 3a-3; \end{cases}$$

$9a^2 - 30a + 25 + a^2 = 25; 10a^2 - 30a = 0; a(a-3) = 0$. Так как $a > 0$, то $a = 3$.

$$\text{Точки } B \text{ и } C: \begin{cases} (x-2)^2 + a^2 = 25, & (a-2)^2 + a^2 = 25; a^2 - 4a + 4 + a^2 = 25; \\ x = a; \end{cases}$$

$$2a^2 - 4a - 21 = 0; a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{46}}{2}. \text{ Для точки } C \text{ — значение } a = \frac{2 - \sqrt{46}}{2},$$

$$\text{для точки } B \text{ — значение } a = \frac{2 + \sqrt{46}}{2}.$$

$$\text{Точка } D: \begin{cases} (x-2)^2 + a^2 = 25, & (a+6)^2 + a^2 = 25; 2a^2 + 12a + 36 = 25; \\ x = -a-4; \end{cases}$$

$$2a^2 + 12a + 11 = 0; a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{14}}{2}. \text{ Так как из двух точек пересечения}$$

окружности и прямой $x = -a - 4$ нужно выбрать точку с бóльшим значением координаты a , то $a = \frac{-6 + \sqrt{14}}{2}$. Таким образом, система имеет

$$\text{решение при } a \in \left[\frac{2 - \sqrt{46}}{2}; \frac{-6 + \sqrt{14}}{2} \right] \cup \left[3; \frac{2 + \sqrt{46}}{2} \right].$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{2 - \sqrt{46}}{2}; \frac{-6 + \sqrt{14}}{2} \right] \cup \left[3; \frac{2 + \sqrt{46}}{2} \right].$$

1525. Так как корнями трехчлена во 2-й строке системы являются $x = -\frac{a}{2}$

и $x = -4a + 4$, то систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} (x+3)^2 + a^2 = 49, \\ \left(x + \frac{a}{2}\right)(x + 4a - 4) \leq 0, \\ |x| + |a| \geq 6. \end{cases}$$

Изобразим соответствующие кривые в системе координат, где по оси абсцисс откладываются значения a , по оси ординат — значения x (см. рис. 452). Первая строка системы задает окружность радиуса 7 с центром в точке $(0; -3)$. Вторая строка системы задает часть плоскости меж-

ду прямыми $x = -\frac{a}{2}$ и $x = -4a + 4$, а именно внутри углов AEB и CEF .

Третья строка системы задает часть плоскости вне квадрата с вершинами

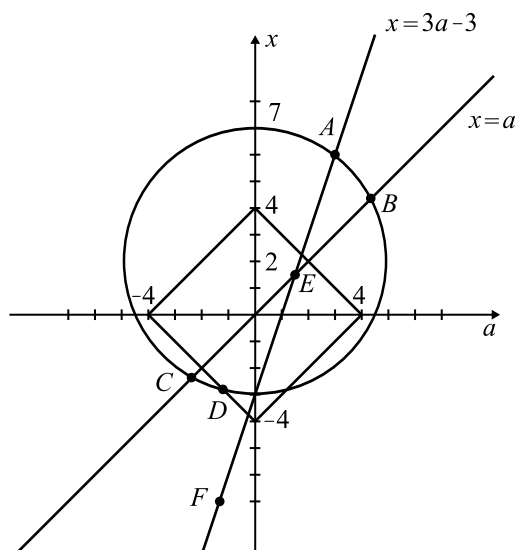


Рис. 451.

$(6; 0), (0; 6), (-6; 0), (0; 6).$

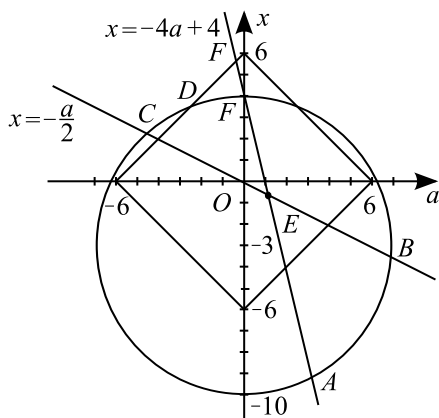


Рис. 452.

Из построенных графиков видно, что решениями системы являются точки, соответствующие дугам AB и CD окружности. Найдем соответствующие значения параметра a .

Точка А: $\begin{cases} x = -4a + 4, \\ (x + 3)^2 + a^2 = 49; \end{cases} \quad (4a - 7)^2 + a^2 = 49;$

$16a^2 - 56a + 49 + a^2 = 49; 17a^2 - 56a = 0; a\left(a - \frac{56}{17}\right) = 0.$ Так как $a > 0$,

то $a = \frac{56}{17}.$

Точки В и С: $\begin{cases} x = -\frac{a}{2}, \\ (x + 3)^2 + a^2 = 49; \end{cases} \quad \left(\frac{a}{2} - 3\right)^2 + a^2 = 49;$

$\frac{a^2}{4} - 3a + 9 + a^2 = 49; 5a^2 - 12a - 160 = 0; a_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{209}}{5}.$ Для точки

С — значение $a = \frac{6 - 2\sqrt{209}}{5}$, для точки В — значение $a = \frac{6 + 2\sqrt{209}}{5}.$

Точка D: $\begin{cases} x = a + 6, \\ (x + 3)^2 + a^2 = 49; \end{cases} \quad (a + 9)^2 + a^2 = 49; 2a^2 + 18a + 81 = 49;$

$a^2 + 9a + 16 = 0; a_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}.$

Так как из двух точек пересечения окружности и прямой $x = a + 6$ нужно выбрать точку с большим значением координаты a , то $a = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}.$

Таким образом, система имеет решения при

$$a \in \left[\frac{6 - 2\sqrt{209}}{5}; \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[\frac{56}{17}; \frac{6 + 2\sqrt{209}}{5} \right].$$

Ответ: $\left[\frac{6 - 2\sqrt{209}}{5}; \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[\frac{56}{17}; \frac{6 + 2\sqrt{209}}{5} \right].$

1526. $\sin x > 0$, а так как $\sin x \leq 1$, то $0 < \sin x \leq 1$, $\log_2 \sin x \leq 0$.

$$(\sin x)^{\log_2 \sin x - |a|} > 2^{\log_4(1 - \cos^2 x) + a(a-2)},$$

$$(2^{\log_2 \sin x})^{\log_2 \sin x - |a|} > 2^{\frac{1}{2} \log_2 \sin^2 x + a(a-2)},$$

$$\log_2 \sin x \cdot (\log_2 \sin x - |a|) > \log_2 \sin x + a(a-2).$$

Обозначим $\log_2 \sin x = m$, ($m \leq 0$), тогда $m^2 - m|a| > m + a(a-2)$, $m^2 - |a|m - m - a(a-2) > 0$. Это неравенство выполняется при всех $m \leq 0$. Обозначим $y(m) = m^2 - |a|m - m - a(a-2)$, эта функция определена при $m \leq 0$, её производная $y'(m) = 2m - |a| - 1 < 0$, следовательно, $y(m)$ монотонно убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, наименьшее значение $y_{\text{наим.}} = y(0) = -a(a-2)$. Если потребуем, чтобы $y_{\text{наим.}} = y(0)$ было положительным, тогда для всех $m \leq 0$ выполняется $y(m) > 0$. $y(0) > 0$,

$$-a(a-2) > 0, a(a-2) < 0, a \in (0; 2)$$

Ответ: $(0; 2)$.

1527. Допустимые значения параметра определяются из условий $\sin a > 0, \sin a \neq 1$.

$$0 < \sin a < 1, a \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

При допустимых значениях a исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x-2 > 0, \\ 5x+8 > 0, \\ (x-2)^2 \geq 5x+8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x > 1,6, \\ x^2 - 9x - 4 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq \frac{9-\sqrt{97}}{2}, \\ x \geq \frac{9+\sqrt{97}}{2}. \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\text{При } \alpha \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}, x \geq \frac{9+\sqrt{97}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[\frac{9+\sqrt{97}}{2}; +\infty\right) \text{ при } a \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

1528. 1) Заметим, что если $a = 1$, то исходная система имеет решения.

2) Пусть $0 < a < 1$. Второе уравнение системы можно записать в виде $y = \frac{\log_2 a}{x}$, при этом $\log_2 a < 0$. Решением неравенства $x^2 + y^2 \leq 4$ являются все точки круга с центром в начале координат и радиусом 2 (см. рис. 453).

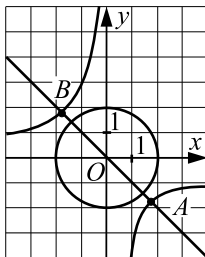


Рис. 453.

Графиком функции $y = \frac{\log_2 a}{x}$ является гипербола. Пусть A и B — точки пересечения этой гиперболы с её осью симметрии $y = -x$. Исходная

система имеет решения, если длина отрезка AB не превосходит диаметр круга, то есть 4.

Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Абсциссы точек A и B можно найти, решая уравнение $-x = \frac{\log_2 a}{x}$. Отсюда $x^2 = -\log_2 a$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\log_2 a}$.

Тогда $y_{1,2} = \mp\sqrt{-\log_2 a}$.

Итак, $AB \leq 4$; $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \leq 4$;

$\sqrt{-4\log_2 a - 4\log_2 a} \leq 4$; $\sqrt{-8\log_2 a} \leq 4$; $-8\log_2 a \leq 16$; $\log_2 a \geq -2$;
 $a \geq \frac{1}{4}$.

Таким образом, в этом случае $a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right)$.

3) Пусть $a > 1$. Второе уравнение системы можно записать в виде $y = \frac{\log_2 a}{x}$, при этом $\log_2 a > 0$. Графиком функции $y = \frac{\log_2 a}{x}$ является гипербола (см. рис. 454). Пусть A и B — точки пересечения этой гипер-

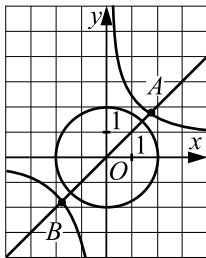


Рис. 454.

болы с её осью симметрии $y = x$. Исходная система имеет решения, если длина отрезка AB не превосходит диаметра круга, то есть 4.

Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Абсциссы точек A и B можно найти, решая уравнение $x = \frac{\log_2 a}{x}$. Отсюда $x^2 = \log_2 a$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\log_2 a}$. Тогда

$y_{1,2} = \pm\sqrt{\log_2 a}$.

Итак, $AB \leq 4$; $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \leq 4$;

$\sqrt{4\log_2 a + 4\log_2 a} \leq 4$; $\sqrt{8\log_2 a} \leq 4$; $8\log_2 a \leq 16$; $\log_2 a \leq 2$; $a \leq 4$.

Таким образом, в этом случае $a \in (1; 4]$.

При $a \leq 0$ решений нет, что очевидно, так как $2^{xy} > 0$.

Объединяя найденные решения, получим $a \in \left[\frac{1}{4}; 4\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$.

1529. 1) Заметим, что если $a = 1$, то исходная система имеет решения.

2) Пусть $0 < a < 1$. Второе уравнение системы можно записать в виде $y = \frac{\log_2 a}{x-3} + 3$, при этом $\log_2 a < 0$. Первое неравенство системы можно записать в виде $(x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 9$. Тогда его решением являются все точки круга с центром в точке с координатами $(3; 3)$ и радиусом 3 (см. рис. 455).

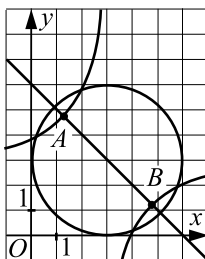


Рис. 455.

Графиком функции $y = \frac{\log_2 a}{x-3} + 3$ является гипербола. Пусть A и B — точки пересечения этой гиперболы с её осью симметрии $y = -x + 6$. Исходная система имеет решения, если длина отрезка AB не превосходит диаметра круга, то есть 6.

Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Абсциссы точек A и B можно найти, решая уравнение $-x + 6 = \frac{\log_2 a}{x-3} + 3$. Отсюда $-x + 3 = \frac{\log_2 a}{x-3}$;

$$(x-3)^2 = -\log_2 a; \quad x_{1,2} = \mp \sqrt{-\log_2 a} + 3. \quad \text{Тогда } y_{1,2} = \pm \sqrt{-\log_2 a} + 3.$$

Итак, $AB \leq 6$; $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \leq 6$;

$$\sqrt{-4\log_2 a - 4\log_2 a} \leq 6; \quad \sqrt{-8\log_2 a} \leq 6; \quad -8\log_2 a \leq 36; \quad \log_2 a \geq -\frac{9}{2};$$

$$a \geq 2^{-\frac{9}{2}}; \quad a \geq \frac{\sqrt{2}}{32}.$$

Таким образом, в этом случае $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{32}; 1\right)$.

3) Пусть $a > 1$. Второе уравнение системы можно записать в виде $y = \frac{\log_2 a}{x-3} + 3$, при этом $\log_2 a > 0$. Графиком функции $y = \frac{\log_2 a}{x-3} + 3$ является гипербола (см. рис. 456). Пусть A и B — точки пересечения этой

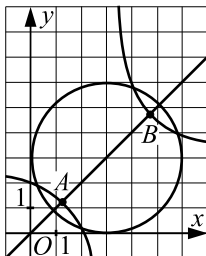


Рис. 456.

гиперболы с её осью симметрии $y = x$. Исходная система имеет решения, если длина отрезка AB не превосходит диаметра круга, то есть 6.

Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Абсциссы точек A и B можно найти, решая уравнение $x = \frac{\log_2 a}{x-3} + 3$. Отсюда $(x-3)^2 = \log_2 a$;

$x_{1,2} = \pm \sqrt{\log_2 a} + 3$. Тогда $y_{1,2} = \pm \sqrt{\log_2 a} + 3$.

Итак, $AB \leq 6$; $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \leq 6$;

$\sqrt{4\log_2 a + 4\log_2 a} \leq 6$; $\sqrt{8\log_2 a} \leq 6$; $8\log_2 a \leq 36$; $\log_2 a \leq \frac{9}{2}$;
 $a \leq 2^{\frac{9}{2}}$; $a \leq 16\sqrt{2}$.

Таким образом, в этом случае $a \in (1; 16\sqrt{2}]$.

Объединяя все три случая, получим $a \in [\frac{\sqrt{2}}{32}; 16\sqrt{2}]$. При $a \leq 0$ решений, очевидно, нет.

Ответ: $[\frac{\sqrt{2}}{32}; 16\sqrt{2}]$.

1530. $y = \left(x^{(2x+3)\log_x a} + (\sqrt[4]{x})^{12} \cdot a^8 - x^{3+2x\log_x a} - a(a^5)^{-\log_2(0,25)} \right)^{-0,5}$.

Основание степени с показателем $-0,5$ должно быть положительным:

$$x^{(2x+3)\log_x a} + (\sqrt[4]{x})^{12} \cdot a^8 - x^{3+2x\log_x a} - a(a^5)^{-\log_2(0,25)} > 0. \quad (1)$$

Начнем преобразование неравенства (1), заметив, что существование слагаемых в левой части возможно, если $x > 0$, $x \neq 1$. В этом случае с

использованием свойств степени и основного логарифмического тождества получим:

$a^{2x+3} + x^3 \cdot a^8 - x^3 \cdot a^{2x} - a^{11} > 0$; $a^{2x}(a^3 - x^3) + a^8(x^3 - a^3) > 0$;
 $(a^3 - x^3)(a^{2x} - a^8) > 0$; $(a - x)(a^2 + ax + x^2)(a^{2x} - a^8) > 0$. Так как второй множитель — неполный квадрат суммы — принимает только положительные значения при любых x и a , одновременно не равных 0, то последнее неравенство равносильно $(a - x)(a^{2x} - a^8) > 0$. (2)

Решим неравенство (2) методом интервалов. Одновременно можно провести отбор нужных значений параметра a . Нетрудно определить, что выражение в левой части (2) обращается в 0 при $x = a$ и при $x = 4$. Далее удобно рассмотреть три случая:

1) $0 < a < 1$. Расставим значения на промежутках с учетом свойства монотонности показательной функции с основанием $0 < a < 1$ (см. рис. 457). Напомним, что $x > 0$, $x \neq 1$. Тогда решение неравенства (2)



Рис. 457.

при $0 < a < 1$ будет иметь вид: $0 < x < a$; $x > 4$. Это решение содержит бесконечно много натуральных чисел. Следовательно, требования задачи не выполняются при $0 < a < 1$.

2) $1 < a \leq 4$ (см. рис. 458). $a < x < 4$ — решение неравенства. Очевидно,

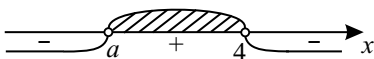


Рис. 458.

в этом случае $x > 0$, $x \neq 1$. Промежуток $(a; 4)$ должен содержать ровно 2 натуральных числа. Это могут быть числа 2 и 3, если $a < 2$. Таким образом, значения $1 < a < 2$ удовлетворяют требованиям задачи.

3) $a > 4$ (см. рис. 459). Для всех точек этого промежутка выполняются

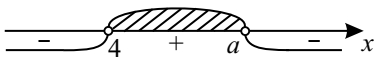


Рис. 459.

условия $x > 0$, $x \neq 1$. В промежуток $(4; a)$ могут войти натуральные числа 5 и 6, если $6 < a \leq 7$. Таким образом, требования задачи выполняются при

$1 < a < 2$ и при $6 < a \leq 7$.

Ответ: $(1; 2) \cup (6; 7]$.

$$1531. y = \left(a^x \cdot x^{(x+3) \log_x a} + a^{8+3 \log_x a} - (\sqrt[3]{x})^{9+6x \log_x a} - \sqrt{a^{22}} \right)^{-0,5}.$$

Основание степени с показателем $-0,5$ может принимать только положительные значения. Областью определения исходной функции служит множество решений неравенства:

$$a^x \cdot x^{(x+3) \log_x a} + a^{8+3 \log_x a} - (\sqrt[3]{x})^{9+6x \log_x a} - \sqrt{a^{22}} > 0.$$

Понятно, что $x > 0$, $x \neq 1$; $a > 0$, $a \neq 1$. Используя свойства степеней и основное логарифмическое тождество, получим

$$a^x \cdot x^{x+3} + a^8 \cdot x^3 - x^3 \cdot a^{2x} - a^{11} > 0; a^{2x}(a^3 - x^3) + a^8(x^3 - a^3) > 0,$$

$(a^3 - x^3)(a^{2x} - a^8) > 0$, $(a - x)(a^2 + ax + x^2)(a^{2x} - a^8) > 0$. Так как неполный квадрат $a^2 + ax + x^2$ принимает только положительные значения при рассматриваемых значениях x и a , то последнее неравенство равносильно неравенству

$$(a - x)(a^{2x} - a^8) > 0. \quad (1)$$

Выражение в левой части (1) обращается в 0 при $x = a$ и при $x = 4$. Для нахождения решения неравенства (2) методом интервалов, выбора нужных значений параметра рассмотрим 3 случая, расставляя знаки на промежутках в соответствии со свойством монотонности показательной функции.

1) $0 < a < 1$ (см. рис. 460). $x < a$; $x > 4$. Так как $x > 0$, то решение



Рис. 460.

неравенства (1) в данном случае имеет вид: $0 < x < a$; $x > 4$. Это решение не удовлетворяет требованиям задачи — промежуток $(4; \infty)$ содержит бесконечно много натуральных чисел.

2) $1 < a \leq 4$ (см. рис. 461). Решением неравенства (1) являются числа

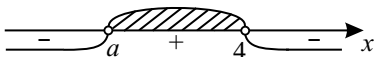


Рис. 461.

из промежутка $(a; 4)$. Условия $x > 0$, $x \neq 1$ выполняются. Так как $a > 1$, то на промежутке $(a; 4)$ может быть не более двух (2 и 3) натуральных чисел. Значит, при $1 < a \leq 4$ требования задачи не выполнены.

3) $a > 4$ (см. рис. 462). На промежутке $(4; a)$ условия $x > 0$, $x \neq 1$

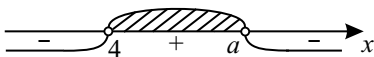


Рис. 462.

выполнены. Чтобы в этом промежутке содержались 3 натуральных числа (5, 6, 7) должно выполняться условие $7 < a \leq 8$.

Ответ: (7; 8].

1532. $y = \log_a \left(a^{\frac{1}{x-10}} - a^{\frac{ax}{12} + \frac{1}{x-10} - 2} \right)$. Область определения функции является решением неравенства $a^{\frac{1}{x-10}} - a^{\frac{ax}{12} + \frac{1}{x-10} - 2} > 0$. (1)

Так как a — основание логарифма, то должно выполняться условие $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения неравенства (1): $x \neq 10$. При этих ограничениях неравенство (1) равносильно неравенству: $a^{\frac{1}{x-10}} \left(1 - a^{\frac{ax}{12} - 2} \right) > 0$.

Так как $a^{\frac{1}{x-10}} > 0$, то $1 - a^{\frac{ax}{12} - 2} > 0$; $a^{\frac{ax}{12} - 2} < a^0$. (2)

Для решения неравенства (2) рассмотрим два случая:

1) $0 < a < 1$. Неравенство (2) равносильно неравенству: $\frac{ax}{12} - 2 > 0$;

$\frac{ax}{12} > 2$; $x > \frac{24}{a}$. Для решения неравенства необходимо определить, не

содержит ли промежуток $\left(-\frac{24}{a}; \infty \right)$ число 10 (см. область определения неравенства) и исключить его из решения. Для решения же поставленной в условии задачи этого делать не нужно, так как очевидно, что ни промежуток $\left(\frac{24}{a}; \infty \right)$, ни множество точек, полученное удалением из этого промежутка одной точки, требованиям задачи не удовлетворяют.

2) $a > 1$. Неравенство (2) равносильно неравенству: $\frac{ax}{12} - 2 < 0$, $x < \frac{24}{a}$. При наших значениях a промежуток $\left(-\infty; \frac{24}{a} \right)$ содержит одно-

значное натуральное число и не более одного двузначного: $1 < \frac{24}{a} \leq 12$.

Промежуток будет содержать двузначное число 11, так как число 10 не входит в область определения функции. Решая последнее неравенство, получим $2 \leq a < 24$.

Ответ: [2; 24).

1533. $y = \sqrt[n]{(5n-6-x)^3 \cdot (2x-32+3n)^{7n-5}}$. Очевидно, решение по-

ставленной задачи следует искать только для чётных значений $n \geq 2$. В этом случае область определения исходной функции есть множество решений неравенства: $(5n - 6 - x)^3 \cdot (2x - 32 + 3n)^{7x-5} \geq 0$. Так как показатели степеней — нечётные натуральные числа, то последнее неравенство равносильно неравенству $(5n - 6 - x)(2x - 32 + 3n) \geq 0$. (1)

Корни левой части: $x_1 = 5n - 6$ и $x_2 = \frac{32 - 3n}{2}$. Выражение принимает

неположительные значения на одном из промежутков $[x_1; x_2]$ или $[x_2; x_1]$. По условию задачи нужно найти такое чётное натуральное значение, чтобы расстояние между точками x_1 и x_2 равнялось n :

$$\left| 5n - 6 - \frac{32 - 3n}{2} \right| = n; \quad |13n - 44| = 2n; \quad 13n - 44 = 2n; \quad 11n = 44; \quad n = 4.$$

Ответ: 4.

1534. Найдём сначала область определения функции. Функция определена, когда подкоренное выражение определено и неотрицательно, то есть

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ \frac{(17x - 66 - x^2) \cdot 4 \log_{625} 5^{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{(x-5)^2 - 8}} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3, \\ \frac{-(x-11)(x-6) \cdot \sqrt{x-3}}{|x-5| - 8} \geq 0. \end{cases}$$

Определим промежутки знакопостоянства числителя и знаменателя дроби в левой части 2 — ого неравенства:

$$-(x-11)(x-6) \geq 0, \quad 6 \leq x \leq 11. \quad -(x-11)(x-6) < 0, \quad \begin{cases} x < 6, \\ x > 11. \end{cases}$$

$$|x-5| > 8, \quad \begin{cases} x-5 > 8, \\ 5-x > 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 13, \\ x < -3. \end{cases} \quad |x-5| < 8, \quad -8 < x-5 < 8, \quad -3 < x < 13.$$

Дробь положительна, когда числитель и знаменатель одного знака. Таким

$$\text{образом, } \begin{cases} x \geq 3, \\ \frac{-(x-11)(x-6) \cdot \sqrt{x-3}}{|x-5| - 8} \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 6, \\ 11 \leq x < 13. \end{cases}$$

$$\log_5^2 a - \frac{12}{\log_{5a} 125} + 10 = \log_5^2 a - \frac{4}{\log_{5a} 5} + 10 = \log_5^2 a - 4 \log_5 5a + 10 =$$

$$= \log_5^2 a - 4 \log_5 a + 6. \text{ Пусть } \log_5 a = t, \text{ тогда первое число равно } (t+2), \text{ а второе — } (t^2 - 4t + 6).$$

Найдём, при каких значениях t первое число принадлежит области определения данной функции:

$$\begin{cases} 3 \leq t+2 \leq 6, \\ 11 \leq t+2 < 13; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq t \leq 4, \\ 9 \leq t < 11. \end{cases}$$

Найдём, при каких значениях t второе число принадлежит области опре-

деления данной функции:

$$\begin{cases} 3 \leq t^2 - 4t + 6 \leq 6, & (1) \\ 11 \leq t^2 - 4t + 6 < 13; & (2). \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} t^2 - 4t + 6 \geq 3, \\ t^2 - 4t + 6 \leq 6; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 4t + 3 \geq 0, \\ t^2 - 4t \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (t-1)(t-3) \geq 0, \\ t(t-4) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} t \leq 1, \\ t \geq 3, \end{cases} & \begin{cases} 0 \leq t \leq 1, \\ 3 \leq t \leq 4. \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 4; \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} t^2 - 4t + 6 \geq 11, \\ t^2 - 4t + 6 < 13; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 4t - 5 \geq 0, \\ t^2 - 4t - 7 < 0; \end{cases}$$

решая оба неравенства этой системы методом интервалов, получаем:

$$\begin{cases} \begin{cases} t \leq -1, \\ t \geq 5, \end{cases} & \begin{cases} 2 - \sqrt{11} < t \leq -1, \\ 5 \leq t < 2 + \sqrt{11}. \end{cases} \\ 2 - \sqrt{11} < t < 2 + \sqrt{11}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \leq t^2 - 4t + 6 \leq 6, \\ 11 \leq t^2 - 4t + 6 < 13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1, \\ 3 \leq t \leq 4, \\ 2 - \sqrt{11} < t \leq -1, \\ 5 \leq t < 2 + \sqrt{11}. \end{cases}$$

Значения t , при которых оба числа принадлежат области определения

$$\text{данной функции: } \begin{cases} \begin{cases} 0 \leq t \leq 1, \\ 3 \leq t \leq 4, \\ 2 - \sqrt{11} < t \leq -1, \\ 5 \leq t < 2 + \sqrt{11}, \end{cases} & \begin{cases} t = 1, \\ 3 \leq t \leq 4. \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leq t \leq 4, \\ 9 \leq t < 11; \end{cases} \end{cases}$$

Вернемся к замене: $t = 1, \log_5 a = 1, a = 5. 3 \leq t \leq 4, 3 \leq \log_5 a \leq 4, 5^3 \leq a \leq 5^4, 125 \leq a \leq 625.$

Ответ: $\{5\} \cup [125; 625].$

1535. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3a(a-2)x + a; g(x) = x^3 - 3x^2 - 3(a^2-1)x + a + 1.$ Найдём точки экстремума этих функций. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3a(a-2); x^2 - 2x - a(a-2) = 0; (x-a)(x-(2-a)) = 0; x = a, x = 2-a.$ $g'(x) = 3x^2 - 6x - 3(a^2-1); x^2 - 2x + (a+1)(1-a) = 0; (x-(a+1))(x-(1-a)) = 0; x = a+1, x = 1-a.$

Рассмотрим три случая.

1) $a > 2 - a$, т. е. $a > 1$ (см. рис. 463). $f(a) > g(1-a); a^3 - 3a^2 - 3a^2(a-2) + a > (1-a)^3 - 3(1-a)^2 - 3(a^2-1)(1-a) + a + 1.$ Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $4a^3 - 6a^2 + 2 < 0; (a-1)^2(2a+1) < 0$, что невозможно при $a > 1.$

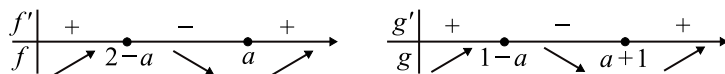


Рис. 463.

2) $a + 1 < 1 - a$, то есть $a < 0$ (см. рис. 464). $f(2 - a) > g(a + 1)$;
 $(2 - a)^3 - 3(a - 2)^2 + 3a(a - 2)^2 + a >$
 $> (a + 1)^3 - 3(1 + a)^2 - 3(a + 1)^2(a - 1) + a + 1$; $4a^3 - 6a^2 + 12a - 6 > 0$
 при $a < 0$. Так как $-6a^2 - 6 < 0$ при любых a , $4a^3 + 12a < 0$ при $a < 0$, то
 неравенство не имеет решений.

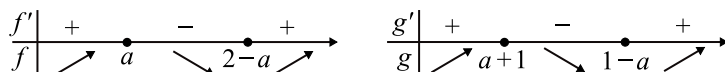


Рис. 464.

3) $0 < a < 1$ (см. рис. 465). $f(2 - a) > g(1 - a)$;
 $(2 - a)^3 - 3(a - 2)^2 + 3a(a - 2)^2 + a >$
 $> (1 - a)^3 - 3(1 - a)^2 + 3(a - 1)(a^2 - 1) + a + 1$;
 $-6a^2 + 12a - 6 > 0$; $-6(a - 1)^2 > 0$, что невозможно.

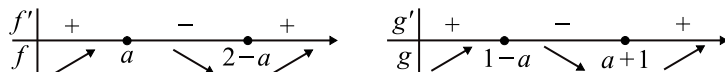


Рис. 465.

Подставив $a = 0$ и $a = 1$ в исходные функции, убеждаемся, что они также не удовлетворяют условию задачи.

Ответ: таких a нет.

1536. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3(a - 1)(3 - a)x + 2a^2 - 5a + 29$;
 $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6a(1 - a)x + (\sqrt{(2a - 1)(a - 2)})^2$. Ясно, что до-
 пустимыми значениями параметра a являются $a \leq \frac{1}{2}$ и $a \geq 2$, так как
 $(2a - 1)(a - 2) \geq 0$. При этих значениях a функция $g(x)$ примет вид
 $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6a(1 - a)x + 2a^2 - 5a + 2$. Найдём точки экстремума
 этих функций. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3(a - 1)(3 - a)$;
 $x^2 - 2x + (a - 1)(3 - a) = 0$; $x = a - 1$, $x = 3 - a$.
 $g'(x) = 6x^2 - 6x + 6a(1 - a)$; $x^2 - x + a(1 - a) = 0$; $x = a$, $x = 1 - a$.

Рассмотрим два случая.

1) $a > 2$ (см. рис. 466). $f(a - 1) > g(1 - a)$;

$(a-1)^3 - 3(a-1)^2 + 3(a-1)^2(3-a) + 27 > 2(1-a)^3 - 3(a-1)^2 + 6a(a-1)^2;$
 $3(a-1)^3 + (a-1)^2(9-3a-6a) + 27 > 0; -2(a-1)^3 + 9 > 0;$
 $(a-1)^3 < 4,5; a < 1 + \sqrt[3]{4,5}.$ Учитывая, что $a > 2, a \in (2; 1 + \sqrt[3]{4,5}).$

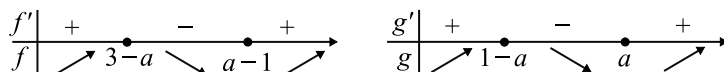


Рис. 466.

2) $a < \frac{1}{2}$ (см. рис. 467). $f(3-a) > g(a);$

$(3-a)^3 - 3(3-a)^2 + 3(a-1)(3-a)^2 + 27 > 2a^3 - 3a^2 + 6a^2(1-a);$
 $6a^3 - 18a^2 + 36a > 0; a(a^2 - 3a + 6) > 0; a > 0.$ Учитывая, что $a < \frac{1}{2},$
 $a \in (0; 0,5).$

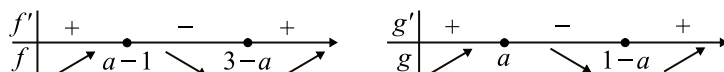


Рис. 467.

Подставив $a = \frac{1}{2}$ и $a = 2$ в исходные функции, убеждаемся, что они не удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a \in (0; 0,5) \cup (2; 1 + \sqrt[3]{4,5}).$

1537. Заметим, что имеет место представление $f(x) = \sqrt{x - g_1(a)} + \sqrt{x - g_2(a)},$ где $g_1(a) = 2a^2 - 14a - 3, g_2(a) = a^2 - 2a - 21,$ при этом область определения $f(x)$ находится из системы $\begin{cases} x \geq g_1(a), \\ x \geq g_2(a). \end{cases}$

Очевидно, что $f(x)$ является возрастающей функцией на своей области определения (как сумма двух возрастающих функций). Обозначив $f_{\text{наим}}$ наименьшее значение $f(x),$ справедливо утверждать следующее:

если $g_1(a) \geq g_2(a),$ то $f_{\text{наим}} = f(g_1(a)) = \sqrt{g_1(a) - g_2(a)},$

если $g_1(a) < g_2(a),$ то $f_{\text{наим}} = f(g_2(a)) = \sqrt{g_2(a) - g_1(a)}.$

Отсюда получим, что для всех a $f_{\text{наим}} = \sqrt{|g_1(a) - g_2(a)|}.$

Таким образом, решение исходной задачи равносильно решению неравенства $\sqrt{|a^2 - 12a + 18|} \geq 3 \Leftrightarrow |a^2 - 12a + 18| \geq 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 12a + 18 \geq 9, \\ a^2 - 12a + 18 \leq -9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 12a + 9 \geq 0, \\ a^2 - 12a + 27 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6 + 3\sqrt{3}, \\ a \leq 6 - 3\sqrt{3}, \\ 3 \leq a \leq 9; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in (-\infty; 6 - 3\sqrt{3}] \cup [3; 9] \cup [6 + 3\sqrt{3}; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 6 - 3\sqrt{3}] \cup [3; 9] \cup [6 + 3\sqrt{3}; +\infty).$$

1538. Заметим, что имеет место представление $f(x) = \sqrt{g_1(a) - x} + \sqrt{g_2(a) - x}$, где $g_1(a) = 2a^2 - 8a + 16$, $g_2(a) = 3a^2 + 8a + 7$, при этом область определения $f(x)$ находится из системы $\begin{cases} g_1(a) \geq x, \\ g_2(a) \geq x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq g_1(a), \\ x \leq g_2(a). \end{cases}$$

Очевидно, что $f(x)$ является монотонно убывающей функцией на своей области определения (как сумма двух монотонно убывающих). Обозначив $f_{\text{наиб}}$ наибольшее значение $f(x)$, справедливо утверждать следующее:

$$\text{если } g_1(a) \geq g_2(a), \text{ то } f_{\text{наиб}} = f(g_2(a)) = \sqrt{g_1(a) - g_2(a)},$$

$$\text{если } g_1(a) < g_2(a), \text{ то } f_{\text{наиб}} = f(g_1(a)) = \sqrt{g_2(a) - g_1(a)}.$$

$$\text{Отсюда получим, что для всех } a \text{ } f_{\text{наиб}} = \sqrt{|g_2(a) - g_1(a)|}.$$

Таким образом, решение исходной задачи равносильно решению неравенства $\sqrt{|a^2 + 16a - 9|} < 5 \Leftrightarrow |a^2 + 16a - 9| < 25 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -25 < a^2 + 16a - 9 < 25 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 16a + 16 > 0, \\ a^2 + 16a - 34 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a > -8 + 4\sqrt{3}, \\ a < -8 - 4\sqrt{3}, \end{bmatrix} \\ -8 - 7\sqrt{2} < a < -8 + 7\sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in (-8 - 7\sqrt{2}; -8 - 4\sqrt{3}) \cup (-8 + 4\sqrt{3}; -8 + \sqrt{2}).$$

$$\text{Ответ: } (-8 - 7\sqrt{2}; -8 - 4\sqrt{3}) \cup (-8 + 4\sqrt{3}; -8 + 7\sqrt{2}).$$

1539. $a|x + 2| - 4a + 1 \geq ax(x + 4) + |x + 2|$. Преобразуем неравенство к виду $a(x + 2)^2 - (a - 1)|x + 2| - 1 \leq 0$. (1)

Заметим вначале, что для удовлетворения требований задачи нам нужно найти такие значения a , при которых во множество решений войдут числа $-4,8$ и 0 и некоторый промежуток слева от 0 (причем, не обязательно прилегающий к нулю), в котором можно будет поместить несколько точек, равномерно расположенных друг относительно друга (включая 0).

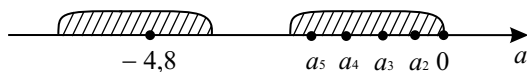


Рис. 468.

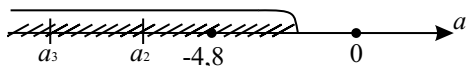


Рис. 469.

Например, рис. 468 или рис. 469. Здесь a_i — члены арифметической прогрессии, $a_1 = 0$. Ключевыми точками являются $x = -4,8$ и $x = 0$. Они должны входить в решение. Рассмотрим различные значения параметра a .

1) $a = 0$. Неравенство (1) в этом случае превращается в неравенство $|x + 2| \leq 1$, решение которого $-3 \leq x \leq -1$. Ни 0, ни $-4,8$ не входят в это решение.

2) $a > 0$. Сделаем замену в (1) $|x + 2| = t$, $t \geq 0$, имея в виду, что $(x + 2)^2 = |x + 2|^2$: $f(t) = at^2 - (a - 1)t - 1 \leq 0$. (2)

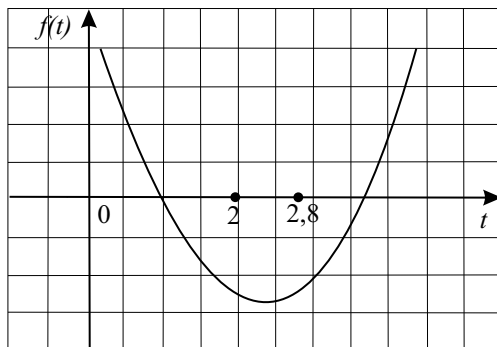


Рис. 470.

Когда $x = 0$, $t = 2$. Когда $x = -4,8$, $t = 2,8$. Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх (см. рис. 470).

Следовательно, должны одновременно выполняться неравенства:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(2) \leq 0, \\ f(2,8) \leq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - 1)^2 + 4a > 0, \\ 4a - 2(a - 1) - 1 \leq 0, \\ 7,84a - 2,8(a - 1) - 1 \leq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + 1)^2 > 0, \\ a \leq -\frac{1}{2}, \\ a \leq -\frac{5}{14}. \end{cases}$$

Учитывая $a > 0$, в этом случае нет значений a , удовлетворяющих условию задачи.

3) $a < 0$, $a \neq -1$. В этом случае парабола $y = f(t)$ имеет вид (см.

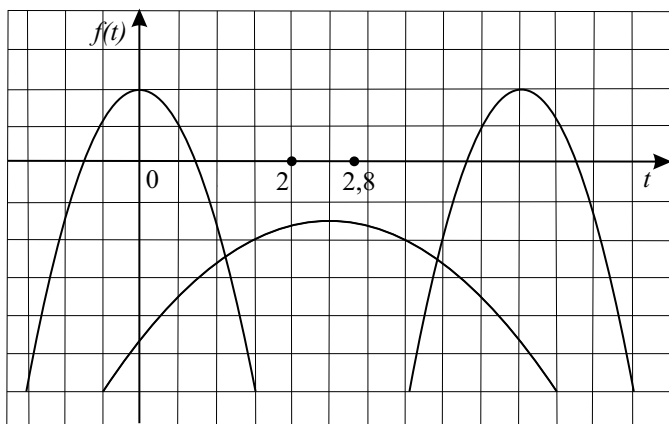


Рис. 471.

рис. 471). То есть,

$$\begin{cases} f(2) \leq 0, \\ f(2,8) \leq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -\frac{1}{2}, \\ a \leq -\frac{5}{14}; \end{cases} \Rightarrow a \leq -\frac{1}{2}. \text{ Это даёт, } a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right].$$

Объединяя решение случаев 1) – 3), получим $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. Остается открытым вопрос, что делать со значением $a = -1$, где $D = 0$. Подставим $a = -1$ в неравенство (2). Получим: $t^2 - 2t + 1 \geq 0$; $(t-1)^2 \geq 0$. Это верно для всех значений t . Значит, $a = -1$ входит в решение.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

1540. $|\log_2(|x-6|-a)| - a < 0$; $\log_a(|x-6|-a) < a$. (1)

Решение неравенства может существовать, если $a > 0$. Область определения неравенства задается условием $|x-6| > a$. (3)

Неравенство (1) равносильно неравенству $-a < \log_2(|x-6|-a) < a$; $\log_2 2^a$. По свойству монотонности логарифма функции с основанием 2 получим

$$2^{-a} < |x-6|-a < 2^a; a+2^{-a} < |x-6| < a+2^a. \quad (4)$$

Очевидно, что условие (3) соблюдено.

Замечание. Для удовлетворения требований задачи нужно найти такие значения a , при которых во множестве решений неравенства (4) содер-

жится число $9\frac{1}{8}$ и некоторый промежуток $[0; \varepsilon]$, в котором всегда можно будет расположить k членов арифметической прогрессии a_n ($a_1 = 0$) с разностью $\frac{\varepsilon}{k-1}$. При $x < 6$ неравенство (4) равносильно неравенству $a + 2^{-a} < -x + 6 < a + 2^a$; $6 - a - 2^a < x < 6 - a - 2^{a-1}$. При $x \geq 6$: $a + 2^{-a} < x - 6 < a + 2^a$; $a + 6 + 2^{-a} < x < a + 6 + 2^a$. Естественно потребовать, чтобы в промежутке $(6 - a - 2^a; 6 - a - 2^{a-1})$ содержался некоторый отрезок $[0; \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, а промежутку $(a + 6 + 2^{-a}; a + 6 + 2^a)$ принадлежало число $9\frac{1}{8}$. Это достигается, если выполняются условия:

$$\begin{cases} 6 - a - 2^a < 0, \\ 6 - a - 2^{-a} > 0, \\ a + 6 + 2^{-a} < 9\frac{1}{8}, \\ a + 6 + 2^a > 9\frac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-a} < 6 - a < 2^a, \\ 2^{-a} < 3\frac{1}{8} - a < 2^a. \end{cases} \quad (5)$$

Решим графически систему (5). На координатной плоскости Oxy построим графики функций $y = 2^a$, $y = 2^{-a}$, $y = 6 - a$, $y = 3\frac{1}{8} - a$. Напомним, что рассматриваются значения $a > 0$ (рис. 472).

Все рассматриваемые функции, относятся к элементарным. Их свойства известны (в том числе свойства монотонности). В первой координатной четверти каждая из прямых по одному разу пересекает графики $y = 2^a$ и $y = 2^{-a}$. При этом графики $y = 2^a$ и $y = 6 - a$ пересекаются в точке $A(2; 4)$. Ее координаты легко определяются подбором. Графики функции $y = 2^{-a}$ и $y = 3\frac{1}{8} - a$ пересекаются в точке $B(3; \frac{1}{8})$, что также нетрудно установить. В соответствии с условиями системы (5) находятся значения отрезка обеих прямых, заключенных между графиками функций $y = 2^a$ и $y = 2^{-a}$. Очевидно, что это $x_a < a < x_b$, то есть $2 < a < 3$.

Ответ: $(2; 3)$.

1541. $x + 4a > 5\sqrt{ax}$. (1)

Убедимся в самом начале, что значение $a = 0$ не удовлетворяет требованиям задачи. При $a = 0$ неравенство имеет вид: $x > 0$. В этот промежуток не входит никакого числа, которое можно принять за первый член прогрессии — по условию он должен быть меньше a , то есть меньше 0. Решим неравенство (1) при $a \neq 0$. Неравенство (1) равносильно системе

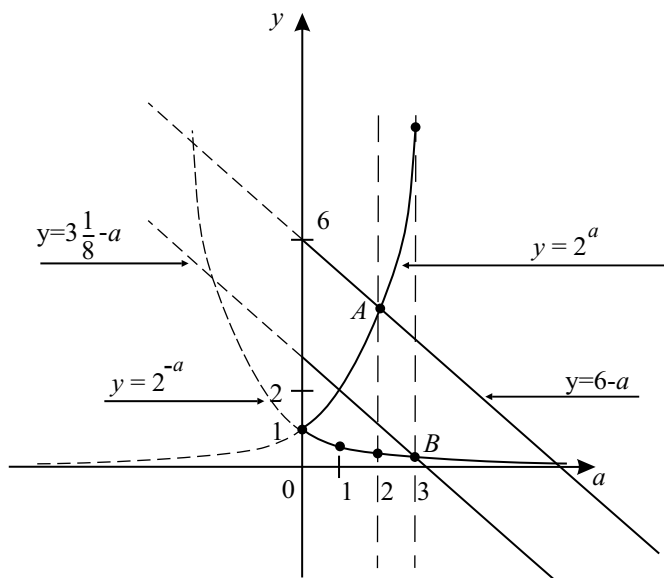


Рис. 472.

$$\begin{cases} x + 4a > 0, \\ ax \geq 0, \\ (x + 4a)^2 > 25ax; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4a, \\ ax \geq 0, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0; \end{cases} \quad (2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -4a, \\ ax \geq 0, \\ (x - a)(x - 16a) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим два случая.

1) $a < 0$, тогда система принимает вид
$$\begin{cases} x > -4a, \\ x \leq 0, \\ x < 16a, \quad x > a. \end{cases}$$

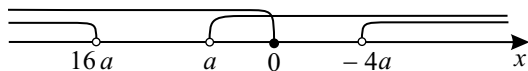


Рис. 473.

Система решений не имеет (см. рис. 473).

2) $a > 0$. В этом случае:
$$\begin{cases} x > -4a, \\ x \geq 0, \\ x < a, \quad x > 16a. \end{cases}$$

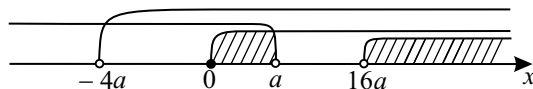


Рис. 474.

Итак, при $a > 0$ решение неравенства: $[0; a) \cup (16a; \infty)$.

В промежутке $[0; a)$ найдется число $a_1 < a$, которое может быть первым членом прогрессии. Для попадания следующего члена прогрессии в промежуток $(16a; \infty)$ нужно, чтобы расстояние между точками 0 и $16a$ было меньше разности прогрессии, то есть $16a - a < 225$; $15a < 225$; $a < 15$.

Таким образом, условиям задачи удовлетворяют значения параметра $0 < a < 15$.

Ответ: $(0; 15)$.

1542. Пусть a_n — n -й член данной прогрессии, d — её разность. $a_1, a_2 \notin (8; 10)$, так как в противном случае $a_5 \in (8; 10)$ (прогрессия возрастающая) и потому $a_3, a_4 \in (8; 10)$, что не так. Значит, $a_1, a_2 \in (1; 3)$. Заметим, что из условий $a_2 < 3$ и $a_6 > 10$ следует, в частности, что

$$a_6 - a_2 = (a_1 + 5d) - (a_1 + d) = 4d > 7, \text{ то есть } d > \frac{7}{4}, \text{ а из соотношений}$$

$$a_1 = a_2 - d, a_2 < 3, d > \frac{7}{4} \text{ следует, что } a_1 < 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}.$$

Таким образом, искомое множество возможных значений a_1 содержится внутри интервала $\left(1; \frac{5}{4}\right)$. Покажем, что на самом деле для любого $a_1 \in (1; \frac{5}{4})$ существует такое значение d , что прогрессия $a_n = a_1 + d(n-1)$ удовлетворяет всем требуемым в задаче условиям.

Пусть $a_1 = \frac{5}{4} - l$, тогда $l = \frac{5}{4} - a_1$, $0 < l < \frac{1}{4}$. Возьмем $d = \frac{7}{4} + \frac{l}{2}$, имеем:

$$a_2 = a_1 + d = \frac{5}{4} - l + \frac{7}{4} + \frac{l}{2} = 3 - \frac{l}{2},$$

$$a_3 = a_2 + d = 3 - \frac{l}{2} + \frac{7}{4} + \frac{l}{2} = \frac{19}{4},$$

$$a_4 = a_3 + d = \frac{19}{4} + \frac{7}{4} + \frac{l}{2} = \frac{26}{4} + \frac{l}{2} < \frac{26}{4} + \frac{1}{2} < 8,$$

$$a_5 = a_4 + d = \frac{26}{4} + \frac{l}{2} + \frac{7}{4} + \frac{l}{2} = \frac{33}{4} + l < \frac{33}{4} + \frac{1}{8} < 10,$$

$$a_6 = \frac{33}{4} + l + \frac{7}{4} + \frac{l}{2} = 10 + \frac{3}{2}l.$$

Легко видеть, что все требуемые условия задачи выполнены.

Ответ: (1; 1,25).

$$1543. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x - 3 > 0, \ x - 3 \neq 1, \\ 2x + 1 > 0, \ 2x + 1 \neq 1, \\ 3x + 1 > 0, \ 3x + 1 \neq 1, \\ x^2 > 0, \\ 6,2x - 8,4 > 0. \end{cases} \Rightarrow x > 3, \ x \neq 4.$$

Решим неравенство

$$\left(\log_{x-3}(2x+1)\right)\left(\log_{2x+1}x^2\right) \geq \left(\log_{x-3}(3x+1)\right)\left(\log_{3x+1}(6,2x-8,4)\right).$$

Для $x \in \text{ОДЗ}$ данное неравенство равносильно неравенству

$\log_{x-3}x^2 \geq \log_{x-3}(6,2x-8,4)$. Рассмотрим два случая.

1) $x - 3 > 1$. Тогда так как логарифм с основанием большим единицы — возрастающая функция, то $\begin{cases} \log_{x-3}x^2 \geq \log_{x-3}(6,2x-8,4), \\ x - 3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - 6,2x + 8,4 \geq 0, \\ x > 4. \end{cases} \quad x_{1,2} = 3,1 \pm \sqrt{9,61 - 8,4} = 3,1 \pm 1,1 \Rightarrow x_1 = 2,$$

$$x_2 = 4,2. \text{ Поэтому } \begin{cases} x^2 - 6,2x + 8,4 \geq 0, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4,2) \geq 0, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [4,2; +\infty), \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow x \in [4,2; +\infty) \subset \text{ОДЗ}.$$

2) $0 < x - 3 < 1$. Тогда так как логарифм с основанием меньшим единицы — убывающая функция, то $\begin{cases} \log_{x-3}x^2 \geq \log_{x-3}(6,2x-8,4), \\ 0 < x - 3 < 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6,2x + 8,4 \leq 0, \\ 3 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4,2) \leq 0, \\ 3 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2; 4,2], \\ 3 < x < 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (3; 4) \subset \text{ОДЗ}.$$

Объединяя решения в случаях 1) и 2), получаем, что данное в условии неравенство имеет решение $x \in (3; 4) \cup [4,2; +\infty)$. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия, удовлетворяющая требованиям задачи. Пусть a — её первый член, а $d(> 0)$ — её разность. Если только первый и четвертый член этой прогрессии не являются решениями исходного неравенства, то есть не входят во множество $(3; 4) \cup [4,2; +\infty)$, то это означает

$$\text{выполнение системы неравенств} \quad \begin{cases} a_1 \leq 3, \\ 3 < a_2 < 4, \\ 3 < a_3 < 4, \\ 4 \leq a_4 < 4,2, \\ a_5 \geq 4,2, \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq 3, \\ 3 < a + d < 4, \\ 3 < a + 2d < 4, \\ 4 \leq a + 3d < 4,2, \\ a + 4d \geq 4,2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq 3, \\ 3 - a < d < 4 - a, \\ \frac{3-a}{2} < d < \frac{4-a}{2}, \\ \frac{4-a}{3} \leq d < \frac{4,2-a}{3}, \\ d \geq \frac{4,2-a}{4}. \end{cases} \quad \text{Найдём те значения } a \leq 3, \text{ при которых систе-}$$

$$\text{ма неравенств} \quad \begin{cases} 3 - a < d < 4 - a, \\ \frac{3-a}{2} < d < \frac{4-a}{2}, \\ \frac{4-a}{3} \leq d < \frac{4,2-a}{3}, \\ \frac{4,2-a}{4} \leq d \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение от-}$$

носительно d , а это выполняется когда

$$\max\{3 - a, \frac{3-a}{2}, \frac{4-a}{3}, \frac{4,2-a}{4}\} < \min\{4 - a, \frac{4-a}{2}, \frac{4,2-a}{3}\}. \text{ Так как}$$

$$4 - a > \frac{4-a}{2} \text{ при } a \leq 3, 3 - a \geq \frac{3-a}{2} \text{ при } a \leq 3, \frac{4-a}{3} - \frac{4,2-a}{4} =$$

$$= \frac{3,4-a}{12} > 0 \text{ при } a \leq 3, \frac{4-a}{2} - \frac{4,2-a}{3} = \frac{3,6-a}{6} > 0 \text{ при } a \leq 3,$$

$$\text{то } \max\{3 - a, \frac{3-a}{2}, \frac{4-a}{3}, \frac{4,2-a}{4}\} < \min\{4 - a, \frac{4-a}{2}, \frac{4,2-a}{3}\} \Leftrightarrow$$

$$\max\{3 - a, \frac{4-a}{3}\} < \frac{4,2-a}{3} \text{ при } a \leq 3. \text{ Последнее неравенство равно-}$$

$$\text{сильно системе} \quad \begin{cases} \frac{4,2-a}{3} > \frac{4-a}{3}, \\ \frac{4,2-a}{3} > 3 - a, \end{cases} \quad \begin{cases} 0,2 > 0, \\ 2a > 4,8, \end{cases} \quad a > 2,4. \text{ Таким обра-}$$

зом, множество возможных значений первого члена арифметической про-

грессии — $(2, 4; 3]$.

Ответ: $(2, 4; 3]$.

1544. Преобразуем неравенство $5a > 4x + 2a\sqrt{5a - 4x} + 3a^2$.

$$5a - 4x - 2a\sqrt{5a - 4x} - 3a^2 > 0, (\sqrt{5a - 4x})^2 - 2a\sqrt{5a - 4x} - 3a^2 > 0.$$

Сделаем замену $t = \sqrt{5a - 4x} \geq 0$. Тогда неравенство примет вид $t^2 - 2at - 3a^2 > 0$. $t_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 + 3a^2} = a \pm 2a \Rightarrow t_1 = -a, t_2 = 3a$. Следовательно, $t^2 - 2at - 3a^2 > 0 \Leftrightarrow (t + a)(t - 3a) > 0$. Рассмотрим два случая $a \geq 0$ и $a < 0$.

1) $a \geq 0$. Тогда $3a \geq 0 \geq -a$. Поэтому решением неравенства $(t + a)(t - 3a) > 0$ является промежуток $(-\infty; -a) \cup (3a; +\infty)$. Учитывая, что $t \geq 0$, получаем, что $t > 3a$. Вернемся к переменной x : $\sqrt{5a - 4x} > 3a \Leftrightarrow 5a - 4x > 9a^2 \Rightarrow x < \frac{5a - 9a^2}{4}$. Так как не менее одного члена, но не более девяти членов арифметической прогрессии с первым членом, равным $-|a| - 4,5$, и разностью прогрессии, равной $0,5$, являются решением исходного неравенства, то в силу вида решения при $a > 0$: $(-\infty; \frac{5a - 9a^2}{4})$, требование задачи равносильно одновременному выполнению двух условий: первый член прогрессии, равный

$-|a| - 4,5 = -a - 4,5$, принадлежит промежутку $(-\infty; \frac{5a - 9a^2}{4})$, десятый член прогрессии, равный $-|a| - 4,5 + 9 \cdot 0,5 = -a$ не принадлежит промежутку $(-\infty; \frac{5a - 9a^2}{4})$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} -a - 4,5 < \frac{5a - 9a^2}{4}, \\ \frac{5a - 9a^2}{4} \leq -a, \\ a \geq 0, \end{cases} \begin{cases} \frac{9a^2 - 9a - 18}{4} < 0, \\ \frac{9a^2 - 9a}{4} \geq 0, \\ a \geq 0, \end{cases} \begin{cases} a^2 - a - 2 < 0, \\ a^2 - a \geq 0, \\ a \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a - 2)(a + 1) < 0, \\ a(a - 1) \geq 0, \\ a \geq 0, \end{cases} \begin{cases} a \in (-1; 2), \\ a \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty), \\ a \geq 0, \end{cases} \Rightarrow a \in \{0\} \cup [1; 2).$$

2) $a < 0$. Тогда $3a < 0 < -a$. Поэтому решением неравенства $(t + a)(t - 3a) > 0$ является промежуток $(-\infty; 3a) \cup (-a; +\infty)$. Учитывая, что $t \geq 0$, получаем, что $t > -a$. Вернемся к переменной x : $\sqrt{5a - 4x} > -a \Leftrightarrow 5a - 4x > a^2 \Rightarrow x < \frac{5a - a^2}{4}$. Так как не менее одного члена, но не более девяти членов арифметической прогрессии с первым членом, равным

$-|a| - 4,5$, и разностью прогрессии, равной $0,5$, являются решением исходного неравенства, то в силу вида решения при $a < 0$: $\left(-\infty; \frac{5a - a^2}{4}\right)$, требование задачи равносильно одновременному выполнению двух условий: первый член прогрессии, равный

$-|a| - 4,5 = a - 4,5$, принадлежит промежутку $\left(-\infty; \frac{5a - a^2}{4}\right)$, десятый член прогрессии, равный $-|a| - 4,5 + 9 \cdot 0,5 = a$ не принадлежит промежутку $\left(-\infty; \frac{5a - a^2}{4}\right)$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} a - 4,5 < \frac{5a - a^2}{4}, \\ \frac{5a - a^2}{4} \leq a, \\ a < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a^2 - a - 18}{4} < 0, \\ \frac{a^2 - a}{4} \geq 0, \\ a < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - a - 18 < 0, \\ a^2 - a \geq 0, \\ a < 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(a - \frac{1 - \sqrt{73}}{2}\right) \left(a - \frac{1 + \sqrt{73}}{2}\right) < 0, \\ a(a - 1) \geq 0, \\ a < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a \in \left(\frac{1 - \sqrt{73}}{2}; \frac{1 + \sqrt{73}}{2}\right), \\ a \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty), \\ a < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \in \left(\frac{1 - \sqrt{73}}{2}; 0\right).$$

Объединяя случаи 1) и 2), приходим к окончательному ответу

$$a \in \left(\frac{1 - \sqrt{73}}{2}; 0\right] \cup [1; 2).$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1 - \sqrt{73}}{2}; 0\right] \cup [1; 2).$$

1545. План решения:

- 1) Найдём ОДЗ.
- 2) Решим исходное неравенство.
- 3) Выпишем условия на d и a , где a — первый член прогрессии.
- 4) Получим ограничения на d и приведем примеры арифметических

прогрессий с такими разностями.

$$1) \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 6 - x \geq 0, \\ \log_3 x - 2 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 6, \\ x \neq 9; \end{cases} \quad x \leq 6.$$

$$2) \frac{(2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4)(\log_2 x - 2)}{\log_3 x - 2} \leq 0;$$

$\frac{(2^x - 1)(2^x - 4)(\log_2 x - 2)}{\log_3 x - 2} \leq 0$. Решаем методом интервалов (см. рис. 475). Учитывая ОДЗ, получаем $[0; 2] \cup [4; 6]$.

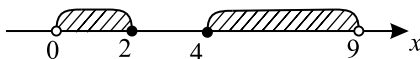


Рис. 475.

3) Пусть a — первый член арифметической прогрессии. Тогда условия на прогрессию эквивалентны следующим неравенствам для a и d : $d > 0$; $a \geq 0$; $a + d \leq 2$; $a + 2d > 2$; $a + 3d < 4$; $a + 4d \geq 4$; $a + 5d \leq 6$; $a + 6d > 6$.

$$4) \begin{cases} a \geq 0, \\ a + 5d \leq 6; \end{cases} \text{ откуда } d \leq \frac{6}{5}. \begin{cases} a + d \leq 2, \\ a + 6d > 6; \end{cases} \text{ откуда } d > \frac{4}{5}. \text{ Теперь}$$

покажем, что эти ограничения на d являются достаточными.

При $1 < d \leq \frac{6}{5}$ положим $a = 0$. Легко видеть, что прогрессия $a, a + d, \dots, a + kd, \dots$ удовлетворяет неравенствам из пункта 3).

При $\frac{4}{5} < d \leq 1$ положим $a = 2 - d$. Легко видеть, что прогрессия $a, a + d, \dots, a + kd, \dots$ также удовлетворяет неравенствам из пункта 3).

Примечание: При оформлении решения для нахождения множества возможных значений d мы не выписывали все неравенства, которым должны удовлетворять члены данной прогрессии (из соображений большей прозрачности решения), а сразу выбрали те из них, которые дают самые «сильные» ограничения на значения параметра d .

$$\text{Ответ: } \frac{4}{5} < d \leq \frac{6}{5}.$$

$$1546. y = x^2 - (a + 6)|x| + 6a \leq 0. \quad (1)$$

Обозначим $|x| = t$, $t \geq 0$, тогда $x^2 = |x|^2 = t^2$. Запишем неравенство (1) в новой переменной $t^2 - (a + 6)t + 6a \leq 0$, $t \geq 0$. (2)

Для решения квадратного неравенства методом интервалов найдем корни трёхчлена $t^2 - (a + 6)t + 6a = 0$. $D = a^2 + 12a + 36 - 24a = (a - 6)^2$;

$t_{1,2} = \frac{a+6 \pm (a-6)}{2}$; $t_1 = a$, $t_2 = 6$. Или по теореме, обратной теореме

Виета, корни: a и 6 . В зависимости от значения a решение неравенства (2) будет иметь вид либо $a \leq t \leq 6$, либо $6 \leq t \leq a$. Рассмотрим все возможные значения a , осуществим переход к переменной x и выберем значения параметра, отвечающие требованиям задачи.

1) Пусть $a < 0$, тогда с учетом условия $t \geq 0$ получим $0 \leq t \leq 6$, $0 \leq |x| \leq 6$, $-6 \leq x \leq 6$. В этот промежуток можно поместить все члены данной последовательности a_n . Действительно, так как по условию знаменатель прогрессии b_n положителен, то $0 < b_n < 7,5$. Тогда $-6 < -6 + b_n \leq 1,5$, то есть $-6 < a_n \leq 1,5$. Таким образом, требования задачи удовлетворены при $a < 0$.

2) Пусть $0 \leq a < 6$, тогда решение неравенства (2) имеет вид $a \leq t \leq 6$. Следовательно, $a \leq |x| \leq 6$ или $-6 \leq x \leq -a$, $a \leq x \leq 6$.

Первый член последовательности $a_1 = -6 + 7,5 = 1,5$ должен попасть в один из этих промежутков, очевидно во второй. Поэтому $a \leq 1,5$. Таким образом, $0 \leq a \leq 1,5$. В этом случае подбором значения знаменателя прогрессии q можно добиться, чтобы остальные члены последовательности содержались в промежутке $[-6; -a]$. Действительно, потребуем чтобы a_2 принадлежало этому промежутку: $-6 \leq -6 + 7,5q \leq -a$, откуда

$$0 < q \leq \frac{2(b-a)}{15}. \text{ Заметим, так как } 0 \leq a \leq 1,5, \text{ то } \frac{3}{5} \leq \frac{2(6-a)}{15} \leq \frac{4}{5},$$

что удовлетворяет требованию $|q| < 1$. Покажем, хотя это достаточно очевидно, что a_n при $n > 2$ также будут содержаться в промежутке $[-6; -a]$.

Если $-6 \leq a_n \leq -a$, то $0 \leq b_n \leq 6 - a$. Умножим последнее неравенство на $n - 2 > 0$, $n > 2$. Получим $0 \leq b_n \leq (6 - a)q^{n-2}$ или $-6 \leq -6 + b_n \leq (6 - a)q^{n-2} - 6$. Число $(6 - a)q^{n-2} - 6$ для любого $n > 2$ меньше $-a$, так как их разность отрицательна,

$(6 - a)q^{n-2} - 6 - (-a) = (q^{n-2} - 1)(6 - a) < 0$. Первый множитель отрицателен, а второй положителен ($0 < q < 1$, $0 \leq a \leq 1,5$). Таким образом, при $0 \leq a \leq 1,5$ требования задачи могут быть удовлетворены.

3) Пусть $a \geq 6$. Решение неравенства (2) имеет вид $6 \leq t \leq a$. Тогда $6 \leq |x| \leq a$, $-a \leq x \leq -6$ или $6 \leq x \leq a$. Ни один из этих промежутков не содержит $a_1 = 1,5$.

Суммируя результаты п. 1 – 3 получаем, что $a \leq 1,5$.

Ответ: $(-\infty; 1,5]$.

$$1547. (x-2)^2 - (a+2)|x-2| + 2a \leq 0. \quad (1)$$

Обозначим $|x-2| = t$, $t > 0$. $(x-2)^2 = |x-2|^2 = t^2$, тогда неравенство

примет вид:

$$f(t) = t^2 - (a + 2)t + 2a \leq 0, t \geq 0. \quad (2)$$

Решения исходного неравенства (1) должны содержать все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 2,9 и положительным знаменателем. То есть должны содержать промежуток $x \in (0; 2,9]$. Так как мы обозначили $|x - 2| = t$, то $t \in [0,9; 2)$. Итак, задача свелась к следующей: надо отыскать все a , такие что решения неравенства (2) содержат и все значения $t \in [0,9; 2)$. Это возможно только когда: $D > 0$; $f(0,9) \leq 0$; $f(2) \leq 0$. То есть должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} D = (a + 2)^2 - 4 \cdot 2a = (a - 2)^2 > 0, \\ f(2) = 4 - 2(a + 2) + 2a \leq 0, \\ f(0,9) = 0,81 - 0,9(a - 2) + 2a \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2, \\ 0 \leq 0, \\ 1,1a \leq 0,99; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2, \\ a \leq 0,9. \end{cases}$$

Значит, при $a \leq 0,9$ будут выполняться все условия задачи.

Ответ: $(-\infty; 0,9]$.

1548. $x(x - 10) \leq (a + 5)(|x - 5| - 5)$. Преобразуем неравенство:

$$x^2 - 10x + 25 - (a + 5)|x - 5| + 5a \leq 0,$$

$$(x - 5)^2 - (a + 5)|x - 5| + 5a \leq 0. \quad (1)$$

Для решения неравенства (1) используем введение новой переменной:

$$|x - 5| = t; t \geq 0. \text{ Тогда получим } t^2(a + 5)t + 5a \leq 0. \quad (2)$$

Очевидно, корнями квадратного трёхчлена в левой части (2) будут числа a и 5. Тогда, в зависимости от величины a , решением неравенства (2) может быть $a \leq t \leq 5$ или $5 \leq t \leq a$. В первом случае необходимо помнить об ограничении $t \geq 0$. Используем полученные результаты для записи решения неравенства (1) и выберем значения параметра, отвечающие требованиям задачи. Возможны 3 случая.

1) $a \leq 0$, тогда $a \leq t \leq 5$. Но так как $t \geq 0$, то получаем $0 \leq t \leq 5$. Для переменной x получим: $|x - 5| \leq 5$; $0 \leq x \leq 10$. Этот промежуток удовлетворяет требованиям задачи, так как содержит число 9,8 — первый член прогрессии и, очевидно, все остальные члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительным знаменателем.

2) $0 < a < 5$. В этом случае $a \leq t \leq 5$; $a \leq |x - 5| \leq 5$. Для переменной x получим два непересекающихся промежутка: $0 \leq x \leq 5 - a$ и $a + 5 \leq x \leq 10$. Второй промежуток содержит число 9,8 при условии $a + 5 \leq 9,8$, то есть $a \leq 4,8$. Подбором знаменателя прогрессии можно убедиться, что все остальные члены бесконечно убывающей гео-

метрической прогрессии будут содержаться в промежутке $[0; 5 - a]$. Для этого достаточно потребовать, чтобы $a_2 = 9,8 \cdot q$ попало в этот промежуток. $0 \leq 9,8q \leq 5 - a$, то есть $q \leq \frac{5-a}{9,8}$. Очевидно, что $\frac{5-a}{9,8} < 1$ при $0 < a \leq 4,8$. Все остальные члены прогрессии будут располагаться между 0 и a_2 .

3) $a \geq 5$; $5 \leq t \leq a$; $5 \leq |x - 5| \leq a$. Получаем для переменной x : $5 - a \leq x \leq 0$ и $10 \leq x \leq x + 5$. Ни в одном из этих промежутков не могут быть расположены члены прогрессии с заданными свойствами. В итоге объединяем результаты, полученные в п. 1) – 2): $a \leq 4,8$.

Ответ: $(-\infty; 4,8]$.

1549. Пусть $b = b_1$ — первый член, а x — знаменатель указанной прогрессии, $0 < x < 1$. $b_1, b_2 \notin \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{7}\right)$, так как в противном случае $b_4 \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{7}\right)$ и поэтому $b_3 \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{9}\right)$, что не так. Так что $b_1, b_2 \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$, то есть $\frac{1}{3} < b < 1$, $\frac{1}{3} < bx < 1$.

Если $b_4 \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$, то и $b_3 \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$, что не так $\Rightarrow b_4 \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{7}\right)$, то есть $\frac{1}{9} < bx^3 < \frac{1}{7}$.

Тогда $b_3 \in \left[\frac{1}{7}; \frac{1}{3}\right]$, то есть $\frac{1}{7} \leq bx^2 \leq \frac{1}{3}$. $b_5 \in \left(0; \frac{1}{9}\right]$, то есть $0 < bx^4 \leq \frac{1}{9}$.

Теперь переформулируем задачу в эквивалентную ей: «Найдите все значения параметра b , $\frac{1}{3} < b < 1$, при которых система неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{3} < bx < 1, \\ \frac{1}{7} \leq bx^2 \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{9} < bx^3 < \frac{1}{7}, \\ bx^4 \leq \frac{1}{9}; \end{cases}$$

имеет решение на промежутке $(0; 1)$ ».

$$\text{Система равносильна такой: } \left\{ \begin{array}{l} bx^2 \leq \frac{1}{3}, \\ bx^3 < \frac{1}{7}, \\ bx^4 \leq \frac{1}{9}, \\ bx > \frac{1}{3}, \\ bx^2 \geq \frac{1}{7}, \\ bx^3 > \frac{1}{9}. \end{array} \right.$$

$$\text{Решаем ее. } \left\{ \begin{array}{l} x^2 \leq \frac{1}{3b}, \\ x^3 < \frac{1}{7b}, \\ x^4 \leq \frac{1}{9b}, \\ x > \frac{1}{3b}, \\ x^2 \geq \frac{1}{7b}, \\ x^3 > \frac{1}{9b}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{1}{\sqrt{3b}}, \\ x < \frac{1}{\sqrt[3]{7b}}, \\ x \leq \frac{1}{\sqrt[4]{9b}}, \\ x > \frac{1}{3b}, \\ x \geq \frac{1}{\sqrt{7b}}, \\ x > \frac{1}{\sqrt[3]{9b}}; \end{array} \right.$$

1. Найдём наименьшее из чисел: $\frac{1}{\sqrt{3b}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{7b}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{9b}}$, учитывая, что $\frac{1}{3} < b < 1$.

1.1) Решим неравенство $\frac{1}{\sqrt[3]{7b}} < \frac{1}{\sqrt{3b}}$. $\sqrt[3]{7b} > \sqrt{3b}$, $7^2 b^2 > 3^3 b^3$,
 $b < \frac{49}{27} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{7b}} < \frac{1}{\sqrt{3b}}$ на промежутке $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

1.2) Решим неравенство $\frac{1}{\sqrt[3]{7b}} < \frac{1}{\sqrt[4]{9b}}$. $\sqrt[3]{7b} > \sqrt[4]{9b}$, $7^4 b^4 > 9^3 b^3$,

$b > \frac{9^3}{7^4}$. Так как $\frac{9^3}{7^4} < \frac{1}{3}$, то на промежутке $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ $\frac{1}{\sqrt[3]{7b}} < \frac{1}{\sqrt[4]{9b}}$. Таким образом подсистема, состоящая из трёх первых неравенств последней подсистемы, равносильна неравенству $x < \frac{1}{\sqrt[3]{7b}}$.

2. Найдём наибольшее из чисел $\frac{1}{3b}$, $\frac{1}{\sqrt{7b}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{9b}}$ на промежутке $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

2.1) Решим неравенство $\frac{1}{\sqrt[3]{9b}} > \frac{1}{\sqrt{7b}}$. $\sqrt[3]{9b} < \sqrt{7b}$, $81b^2 < 7^3b^3$, $b > \frac{81}{343}$. Так как $\frac{81}{343} < \frac{1}{3}$, то $\frac{1}{\sqrt[3]{9b}} > \frac{1}{\sqrt{7b}}$ на промежутке $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

2.2) Решим неравенство $\frac{1}{\sqrt[3]{9b}} \geq \frac{1}{3b}$. $\sqrt[3]{9b} \leq 3b$, $9b \leq 27b^3$, $b^2 \geq \frac{1}{3}$, $b \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Так как $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$, то:

$\frac{1}{\sqrt[3]{9b}}$ — наибольшее число на промежутке $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$;

$\frac{1}{3b}$ — наибольшее число на промежутке $\left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

То есть подсистема, состоящая из трёх последних неравенств последней системы равносильна неравенству: $x > \frac{1}{\sqrt[3]{9b}}$ на промежутке $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$;

$x > \frac{1}{3b}$ на промежутке $\left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Рассмотрим два случая.

I. $b \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$. Исходная система неравенств равносильна системе

$$\begin{cases} x < \frac{1}{\sqrt[3]{7b}}, \\ x > \frac{1}{\sqrt[3]{9b}}; \end{cases} \quad \text{которая имеет решения тогда и только тогда, когда}$$

$\frac{1}{\sqrt[3]{9b}} < \frac{1}{\sqrt[3]{7b}}$. Решаем это неравенство. $9b > 7b$, $b > 0 \Rightarrow$ условию задачи

в этом случае удовлетворяют все $b \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$.

II. $b \in \left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Исходная система неравенств равносильна системе

$$\begin{cases} x < \frac{1}{\sqrt[3]{7b}}, \\ x > \frac{1}{3b}; \end{cases} \quad \text{которая имеет решения тогда и только тогда, когда}$$

$\frac{1}{3b} < \frac{1}{\sqrt[3]{7b}}$. Решаем это неравенство. $3b > \sqrt[3]{7b}$, $27b^3 > 7b$, $b^2 > \frac{7}{27}$,

$b > \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$, $b > \frac{\sqrt{21}}{9}$. Так как $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{21}}{9} < \frac{\sqrt{3}}{3}$, то в этом случае усло-

вию задачи удовлетворяют все $b \in \left[\frac{\sqrt{21}}{9}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Объединяя случаи I и II

получаем $b \in \left(\frac{\sqrt{21}}{9}; 1\right)$.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{21}}{9}; 1\right)$.

1550. Рассмотрим $\triangle ABC$ (см. рис. 476).

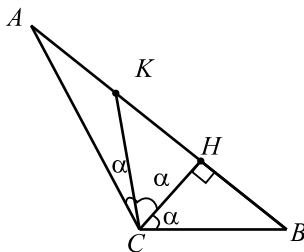


Рис. 476.

В $\triangle KCB$ высота CH является также биссектрисой, значит $\triangle KCB$ равнобедренный, CH — медиана и $KH = HB = \frac{1}{4}AB$. В $\triangle ACH$ CK —

биссектриса, тогда $\frac{CH}{AC} = \frac{KH}{AK} = \frac{1}{2}$, $CH = \frac{1}{2}AC$ и $\triangle ACH$ — прямоугольный с гипотенузой AC , тогда $\angle HAC = 30^\circ$, $\angle ACH = 60^\circ$, $2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Итак, $\triangle ABC$ — прямоугольный с гипотенузой AB и острым углом 30° (см. рис. 477).

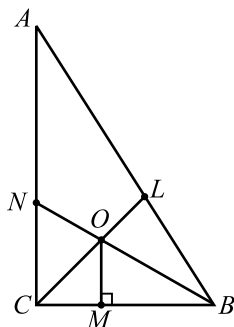


Рис. 477.

Пусть O — центр вписанной окружности $\triangle ABC$, CL и BN — биссектрисы. $OM = r$ — радиус вписанной окружности $\triangle ABC$.

$$\begin{aligned} \angle OCM = 45^\circ, \text{ тогда } CM = OM = r, OC = r\sqrt{2}, \text{ откуда } r &= \frac{3\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{3} + 1}. \angle OBM = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ, \text{ тогда } BM = OM\sqrt{3} = r\sqrt{3}, \\ BC = r + r\sqrt{3} &= r(\sqrt{3} + 1), AC = BC\sqrt{3} = r\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1). \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot r^2 \sqrt{3} (\sqrt{3} + 1)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{(\sqrt{3} + 1)^2} \cdot (\sqrt{3} + 1)^2 = \\ &= 4,5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $4,5\sqrt{3}$.

1551. Рассмотрим $\triangle ABC$ (см. рис. 478).

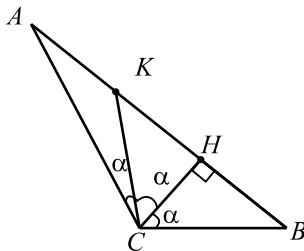


Рис. 478.

В $\triangle KCB$ высота CH является также биссектрисой, значит, $\triangle KCB$ равнобедренный, CH — медиана и $KH = HB = \frac{1}{4}AB$. В $\triangle ACH$ CK —

биссектриса, тогда $\frac{CH}{AC} = \frac{KH}{AK} = \frac{1}{2}$, $CH = \frac{1}{2}AC$ и $\triangle ACH$ — прямоугольный с гипотенузой AC , тогда $\angle HAC = 30^\circ$, $\angle ACH = 60^\circ$, $2\alpha = 60^\circ$; $\alpha = 30^\circ$.

Итак, $\triangle ABC$ — прямоугольный с гипотенузой AB и острым углом 30° (см. рис. 479).

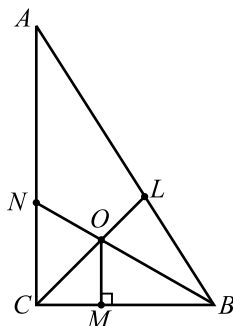


Рис. 479.

Пусть O — центр вписанной окружности $\triangle ABC$, CL и BN — биссектрисы, $OM = r$ — радиус вписанной окружности $\triangle ABC$.

$\angle OCM = 45^\circ$, тогда $CM = OM = r$.

$\angle OBM = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$, тогда $BM = OM\sqrt{3} = r\sqrt{3}$, $BC = r + r\sqrt{3} = r(\sqrt{3} + 1)$, $AC = BC\sqrt{3} = r\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot r^2 \sqrt{3} (\sqrt{3} + 1)^2 = 1,5 + \sqrt{3}.$$

$$r^2 \sqrt{3} (\sqrt{3} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{3}, r^2 (\sqrt{3} + 1)^2 = \sqrt{3} + 2, r^2 = \frac{1}{2}, r = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1552. Возможны два случая:

случай I (см. рис. 480). Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30° ($AB = BC = a$). Тогда $\angle B = 120^\circ$ и по теореме косинусов

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos \angle B} = \sqrt{a^2 + a^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2} = a\sqrt{3}.$$

Пусть r — радиус вписанной окружности. С одной стороны,
 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} a^2 \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$, с другой стороны,
 $S_{\triangle ABC} = p \cdot r = \frac{a + a + a\sqrt{3}}{2} \cdot r$. Тогда $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} ar \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})r = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}$.

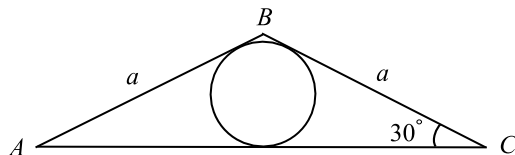


Рис. 480.

случай II (см. рис. 481). Угол, противолежащий основанию AC , равен 30° . Тогда $\cos \angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и по теореме косинусов:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cos \angle B \cdot AB \cdot BC} = \sqrt{a^2 + a^2 - a^2 \sqrt{3}} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Пусть r — радиус вписанной окружности. Тогда, с одной стороны,
 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4}$. С другой стороны,
 $S_{\triangle ABC} = p \cdot r = \frac{a + a + a\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \cdot r$. Тогда $\frac{a^2}{4} = \frac{2a + a\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \cdot r \Leftrightarrow$
 $(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}})r = \frac{a}{2} \Leftrightarrow r = \frac{a}{4 + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{a(2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}})(2 - \sqrt{3})}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}$; $\frac{a(2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}})(2 - \sqrt{3})}{2}$.

1553. Возможны два случая:

случай I (см. рис. 482). Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30° ($AB = BC = a$). Пусть R — радиус описанной окружности. По теореме синусов $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{a}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow a = R$

случай II (см. рис. 483). Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . $AB = BC = a$. $\angle B = 30^\circ$. По теореме

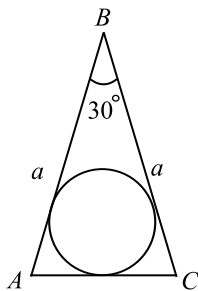


Рис. 481.

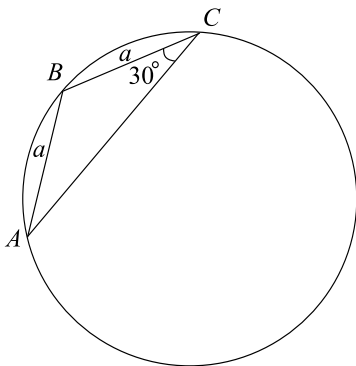


Рис. 482.

косинусов $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos \angle B} =$
 $= \sqrt{a^2 + a^2 - a^2 \sqrt{3}} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Пусть R — радиус описанной окруж-
ности. По теореме синусов $\frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{a\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow$

$$R = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Ответ: $a; a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

1554. $S_{ABC} = r \cdot p$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK$ (см. рис. 484),

$$r = \frac{AC \cdot BK \cdot 2}{2(AB + BC + AC)} = \frac{16 \cdot \sqrt{400 - 64}}{(40 + 16)} = \frac{16 \cdot \sqrt{336}}{56} = \frac{8\sqrt{21}}{7}.$$

$\triangle ABK \sim \triangle ODM$ ($\angle BAK = \angle DOM$, $\angle AKB = \angle OMD = 90^\circ$), то-
гда $\frac{BK}{DM} = \frac{AB}{DO}$, $DM = \frac{BK \cdot DO}{AB} = \frac{4\sqrt{21} \cdot 8\sqrt{21}}{7 \cdot 20} = \frac{21 \cdot 8}{35} = \frac{24}{5} = 4,8$.

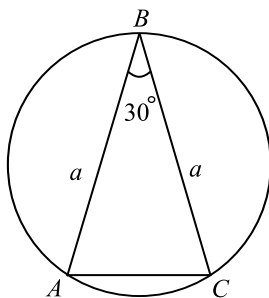


Рис. 483.

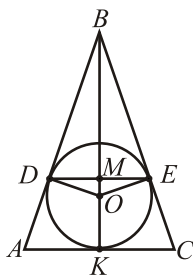


Рис. 484.

$$DE = 4,8 \cdot 2 = 9,6.$$

Ответ: 9,6.

1555. Пусть $AB = x$, $ME = 4$ (см. рис. 485),

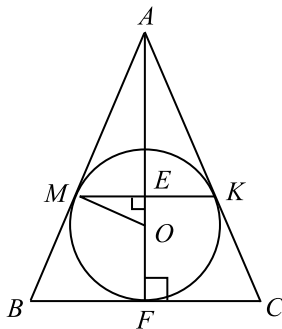


Рис. 485.

$$\triangle MEO \sim \triangle BFA, \frac{ME}{AF} = \frac{MO}{AB}, MO = r, \frac{4}{\sqrt{x^2 - 81}} = \frac{r}{x}.$$

$$S_{ABC} = r \cdot p, S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot BC = BF \cdot AF, r = \frac{\sqrt{x^2 - 81} \cdot 9}{x + 9}.$$

$$4 \cdot x = \frac{\sqrt{x^2 - 81} \cdot 9 \cdot \sqrt{x^2 - 81}}{x + 9},$$

$$4x = (x - 9) \cdot 9; 5x = 81, x = 16,2.$$

$$AB = 16,2; P = 2 \cdot 16,2 + 18 = 50,4.$$

Ответ: 50,4.

1556. Пусть $AR \cap BC = K$ (см. рис. 486). Дуги AB и AC равны по 120° , углы BRA и ARC опираются на эти дуги и равны 60° . На продолжении BR за точку R отметим точку D так, что $RD = RC$. $\triangle RCD$ — правильный и $KR \parallel DC$. $\triangle RBK \sim \triangle DBC$, поэтому $\frac{BR}{RK} = \frac{BD}{DC} = \frac{BR + RD}{DC} =$

$$= \frac{BR}{DC} + \frac{RD}{DC} = \frac{BR}{DC} + 1; \text{ при } RC > RB. \frac{BR}{RK} = \frac{BR}{RC} + 1; \frac{RC - 40}{21} =$$

$$= \frac{RC - 40}{RC} + 1; RC^2 - 82RC + 840 = 0; RC = 70, RB = 30. RC = 12 \text{ (не подходит). Если } RC < RB, RB = 70.$$

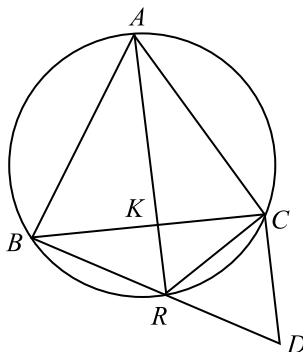


Рис. 486.

Ответ: 30 или 70.

1557. Пусть $AB = 5$, $BC = 9$, $AC = 7$, точка O — центр вписанной окружности, MN — касательная, отсекающая от $\triangle ABC$ треугольник MNC .

$CM + CN + NM = (9 - BM) + (7 - AN) + (BM + AN - 5) = 11$
(использована теорема об окружности, вписанной в четырёхугольник).

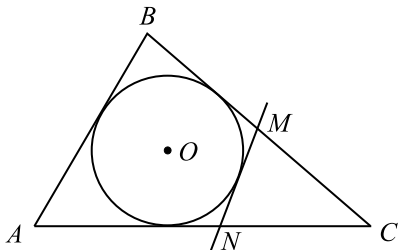


Рис. 487.

Ответ: 11.

1558. $BP = 15$, $MO = 6$, $BO = BP - OP = 15 - 6 = 9$ (см. рис. 488).

Точка O — центр вписанной окружности, $\sin \angle BAP = \frac{BP}{AB}$,

$$\sin \angle ABP = \frac{AP}{AB} = \frac{MO}{BO} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}. \quad \cos \angle ABP = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\operatorname{tg} \angle ABP = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Найдём } AP \text{ из } \triangle ABP: AP = BP \cdot \operatorname{tg} \angle ABP = 15 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5},$$

$$AC = 2AP = 12\sqrt{5}.$$

$$\begin{aligned} \angle ABC &= 2\angle ABP; \sin(2\angle ABP) = 2 \sin \angle ABP \cdot \cos \angle ABP = \\ &= 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}, \text{ то есть } \sin \angle ABC = \frac{4\sqrt{5}}{9}. \end{aligned}$$

$$\text{По теореме синусов } \frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R, \quad \frac{12\sqrt{5} \cdot 9}{4\sqrt{5}} = 2R, \quad 2R = 27,$$

$$R = \frac{27}{2} = 13,5.$$

Ответ: 13,5.

1559. Так как центр окружности, вписанной в треугольник BCD , лежит на диагонали AC , AC — биссектриса угла BCD . Пусть O — точка пересечения диагоналей (см. рис. 489).

Если описать вокруг треугольника BCD окружность, то точка A будет лежать на серединном перпендикуляре к хорде BD (так как $AB = BD$), и так как AC — биссектриса угла BCD , точка A лежит на этой окружности.

1) По условию $\angle COB = 55^\circ$;

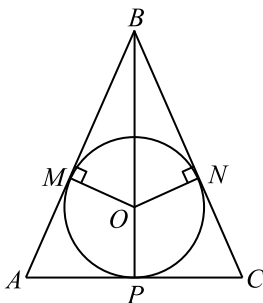


Рис. 488.

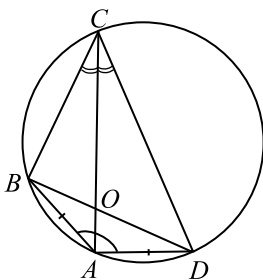


Рис. 489.

$$\begin{aligned}\angle CDB &= \angle CAB = 180^\circ - \angle BOA - \angle ABD = \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \angle COB) - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAD) = 55^\circ - 35^\circ = 20^\circ.\end{aligned}$$

2) Пусть $\angle COD = 55^\circ$. Аналогично первому случаю получаем $\angle CDB = 125^\circ - 35^\circ = 90^\circ$.

Ответ: 20° ; 90° .

1560. Так как вокруг четырёхугольника $ABCD$ описана окружность, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $\angle ABC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$. Значит, один из углов между диагоналями AC и BD равен 65° .

Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника (см. рис. 490).

$\smile AB = \smile BC$ (так как DB — биссектриса угла CDA), значит, $\angle BAC = \angle BCA$.

$$\begin{aligned}1) \text{ Пусть } \angle COB &= 65^\circ. \angle DCB = \angle DCA + \angle ACB = \angle DCA + \angle CAB = \\ &= \angle DCA + \angle CDB = \angle COB = 65^\circ\end{aligned}$$

$$2) \angle BOA = 65^\circ. \angle DCB = \angle COB = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$

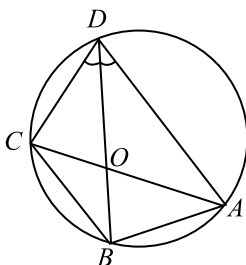


Рис. 490.

Ответ: 65° ; 115° .

$$\begin{aligned}
 1561. \quad & \begin{cases} S_{ABC} = S_{APC} + S_{BPC}, \\ S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC; \end{cases} \quad (\text{см. рис. 491}), \\
 & \begin{cases} \frac{1}{2} AC \cdot \frac{36}{11} + \frac{1}{2} BC \cdot \frac{40}{11} = 30, \\ AB \cdot BC = 60; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{36}{11} AC + \frac{40}{11} BC = 60, \\ AB \cdot BC = 60; \end{cases} \\
 & \begin{cases} 9AC + 10BC = 165, \\ AC = \frac{60}{BC}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{540}{BC} + 10BC = 165, \\ AC = \frac{60}{BC}; \end{cases} \\
 & \begin{cases} 2BC^2 - 33BC + 108 = 0, \\ AC = \frac{60}{BC}; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} BC = 12, \\ BC = 4,5; \end{cases} \\ AC = \frac{60}{BC}; \end{cases} \quad \begin{cases} AC = 5, \\ BC = 12; \end{cases} \quad \text{или} \\
 & \begin{cases} AC = 13\frac{1}{3}, \\ BC = 4\frac{1}{2}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: 5; 12 или $13\frac{1}{3}$; $4\frac{1}{2}$.

1562. 1. По условию треугольник ABC равнобедренный, $MN \parallel AC$, значит $AMNC$ — равнобедренная трапеция. Обозначим $AH = x$, $NH = y$, $AD = HC = z$, тогда $MN = DH = x - z$ (см. рис. 492).

$$2. S_{AMNC} = \frac{MN + AC}{2} \cdot NH,$$

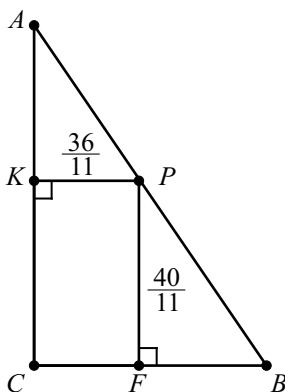


Рис. 491.

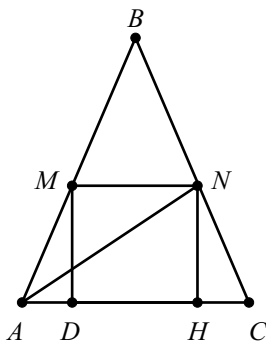


Рис. 492.

$$\frac{x - z + x + z}{2} \cdot y = 60, xy = 60.$$

$$3. \text{ В } \triangle AHN: AN^2 = AH^2 + NH^2, x^2 + y^2 = 169.$$

$$4. \begin{cases} x^2 + y^2 = 169, \\ xy = 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 49, \\ xy = 60; \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 60; \\ x - y = -7, \\ xy = 60; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = 12, \\ y = 5; \\ x = 5, \\ y = 12. \end{cases} \right]$$

Имеем: $NH = 12$ или $NH = 5$.

Ответ: 12 или 5.

1563. Докажем, что $S_{ABC} = (p - a)r_a$, где p — полупериметр $\triangle ABC$,

a — сторона треугольника, r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a (см. рис. 493).

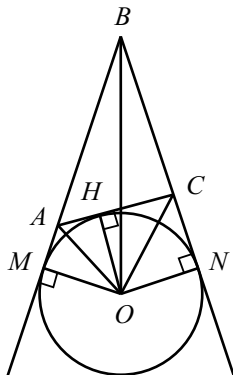


Рис. 493.

$AB = b$, $BC = c$, $CA = a$, $OM = OH = ON = r_a$, тогда

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{COB} - S_{AOC} = \frac{1}{2}b \cdot r_a + \frac{1}{2}c \cdot r_a - \frac{1}{2}a \cdot r_a =$$

$$= \left(\frac{1}{2}(a + b + c) - a \right) \cdot r_a = (p - a) \cdot r_a.$$

По формуле Герона

$$S_{ABC} = \sqrt{7,5 \cdot 3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5} = \frac{15}{4}\sqrt{7}.$$

По условию, $a = 4$, $b = 6$, $c = 5$;

$$\frac{15}{4}\sqrt{7} = (7,5 - 4)r_a, r_a = \frac{15}{14}\sqrt{7}; \quad \frac{15}{4}\sqrt{7} = (7,5 - 5)r_c, r_c = \frac{15}{10}\sqrt{7};$$

$$\frac{15}{4}\sqrt{7} = (7,5 - 6)r_b, r_b = \frac{15}{6}\sqrt{7};$$

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{225}{8}\sqrt{7}.$$

Ответ: $\frac{225\sqrt{7}}{8}$.

1564. Докажем, что $S_{ABC} = (p - a)r_a$, где p — полупериметр $\triangle ABC$, a — сторона треугольника, r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a (см. рис. 494).

$AB = b$, $BC = c$, $CA = a$, $OM = OH = ON = r_a$, тогда

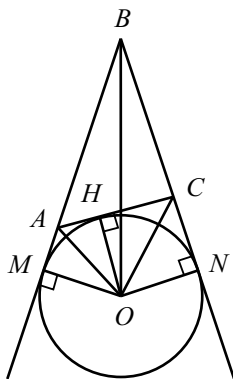


Рис. 494.

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{COB} - S_{AOC} = \frac{1}{2}b \cdot r_a + \frac{1}{2}c \cdot r_a - \frac{1}{2}a \cdot r_a =$$

$$= \left(\frac{1}{2}(a + b + c) - a \right) \cdot r_a = (p - a) \cdot r_a.$$

Радиусы вневписанных окружностей равны 9, 18 и 21. Подставляя их в полученную формулу, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} S = (p - a) \cdot 9, \\ S = (p - b) \cdot 18, \\ S = (p - c) \cdot 21, \\ p = \frac{1}{2}(a + b + c). \end{cases}$$

Учитывая следствие формулы Герона $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, можно выразить стороны треугольника a , b и c через полупериметр p и подставив их в последнее уравнение системы, получить $p = 27$. Затем, найдём стороны $a = 13$, $b = 20$ и $c = 21$, откуда их произведение равно $13 \cdot 20 \cdot 21 = 5460$.

Ответ: 5460.

1565. 1) Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 — медианы $\triangle ABC$; O — точка пересечения медиан; F — точка пересечения прямой, проведённой через вершину A параллельно CC_1 , и прямой, проведённой через точку A_1 параллельно BB_1 . Покажем, что $AF = C_1C$ и $B_1B = A_1F$ (см. рис. 495).

2) Пусть K — точка пересечения прямых BB_1 и AF . Тогда $\triangle AB_1K = \triangle OB_1C$ ($\angle AB_1K = \angle OB_1C$ — вертикальные, $\angle OCB_1 = \angle B_1AK$ — накрест лежащие, $AB_1 = B_1C$). Следовательно, $AK = OC$; $OB_1 = B_1K$;

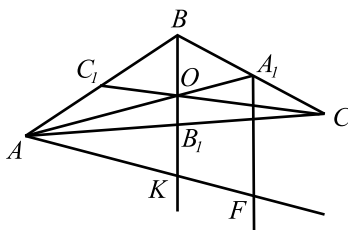


Рис. 495.

$OK = 2OB_1 = \frac{2}{3}BB_1$. Так как O — точка пересечения медиан, то $AO : OA_1 = 2 : 1$. Поскольку $OK \parallel A_1F$, то по теореме Фалеса $AK : KF = 2 : 1$. Получим: $KF = \frac{AK}{2} = \frac{OC}{2} = OC_1$;
 $AF = AK + KF = CO + OC_1 = CC_1$.

$\triangle AA_1F \sim \triangle AOK$ ($\angle A_1AF$ — общий, $OK \parallel A_1F$). Следовательно,
 $\frac{A_1F}{OK} = \frac{AA_1}{AO} = \frac{3}{2}$;

$$A_1F = \frac{3}{2}OK = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = BB_1.$$

3) Так как $BK \parallel A_1F$ и $CC_1 \parallel AF$, то $\angle AFA_1 = 180^\circ - \angle BKF = 180^\circ - \angle BOC$; $\sin \angle AFA_1 = \sin \angle BOC$.

$$\angle AA_1F = \angle AOK = 180^\circ - \angle BOA; \sin \angle A_1AF = \sin \angle BOA.$$

$$\angle A_1AF = \angle A_1OC = 180^\circ - \angle AOC; \sin \angle A_1AF = \sin \angle AOC.$$

4) Пусть $AA_1 = x$, $CC_1 = y$, $BB_1 = z$. Тогда искомая площадь

$$S = S_{AA_1F} = \frac{1}{2}AA_1 \cdot AF \sin \angle A_1AF = \frac{1}{2}xy \sin \angle AOC; \sin \angle AOC = \frac{2S}{xy};$$

$$S = \frac{1}{2}AA_1 \cdot A_1F \sin \angle AA_1F = \frac{xz}{2} \sin \angle BOA; \sin \angle BOA = \frac{2S}{xz};$$

$$S = \frac{1}{2}AF \cdot A_1F \sin \angle AFA_1 = \frac{yz}{2} \sin \angle BOC; \sin \angle BOC = \frac{2S}{yz}.$$

$$\begin{aligned} 5) S_{ABC} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = \\ &= \frac{1}{2}AO \cdot OB \sin \angle AOB + \frac{1}{2}OB \cdot OC \sin \angle BOC + \frac{1}{2}OC \cdot AO \sin \angle AOC = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}(xy \sin \angle AOB + yz \sin \angle BOC + xz \sin \angle AOC) = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{9} \left(\frac{xz \cdot 2S}{xz} + \frac{yz \cdot 2S}{yz} + \frac{xy \cdot 2S}{xy} \right) = \frac{4}{3} S.$$

По условию $S_{ABC} = 18$, следовательно $\frac{4}{3}S = 18$; $S = 13,5$.

Ответ: 13,5.

1566. По условию в $\triangle ABC$ $AB = BC = 17$, $AC = 16$, тогда высота $BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABC} \cdot r$, где r — радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH}{AB + BC + AC} = \frac{16 \cdot 15}{50} = 4,8.$$

Пусть MN — указанная в условии прямая. $OE \perp BC$, $OK \perp MN$ по свойству касательной к окружности, $MN \perp BC$ по условию, $OK = OE$, следовательно, $KOEN$ — квадрат.

Рассмотрим два случая:

1. Прямая MN перпендикулярна боковой стороне BC , пересекает основание AC (см. рис. 496).

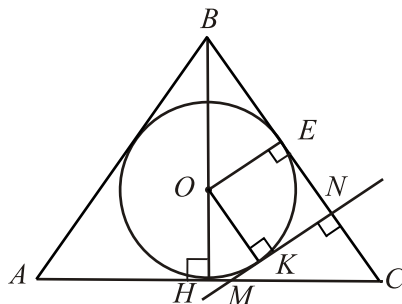


Рис. 496.

$EC = HC = 8$ по свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки. $EN = OK = 4,8$, $NC = EC - EN = 8 - 4,8 = 3,2$.

В прямоугольных треугольниках HBC и NMC $\angle C$ — общий, значит, $\triangle HBC \sim \triangle NMC$. Из подобия следует

$$\frac{HC}{NC} = \frac{BH}{MN}, MN = \frac{NC \cdot BH}{HC} = \frac{3,2 \cdot 15}{8} = 6.$$

$$S_{AMNB} = S_{ABC} - S_{MNC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH - \frac{1}{2} MN \cdot NC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3,2 = 120 - 9,6 = 110,4.$$

2. Прямая MN перпендикулярна боковой стороне BC , пересекает боковую сторону AB (см. рис. 497).

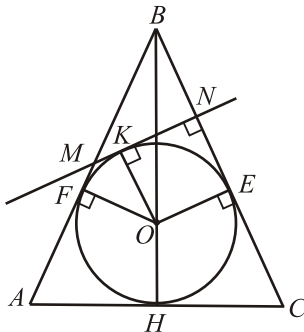


Рис. 497.

$AF = AH = 8$, $BF = AB - AF = 17 - 8 = 9$, $EN = OK = 4,8$,
 $HC = EC = 8$, $BN = BC - EC - NE = 17 - 8 - 4,8 = 4,2$.

Пусть $MK = x$, $MK = MF$, тогда $MN = 4,8 + x$, $MB = 9 - x$.

В $\triangle MBN$: $MB^2 = MN^2 + BN^2$, $(9 - x)^2 = (4,8 + x)^2 + 4,2^2$.

$$81 - 18x + x^2 = 23,04 + 9,6x + x^2 + 17,64,$$

$$27,6x = 40,32; \quad x = \frac{4032}{2760} = \frac{168}{115},$$

$$MN = \frac{24}{5} + \frac{168}{115} = \frac{720}{115} = \frac{144}{23}.$$

$$S_{AMNC} = S_{ABC} - S_{MBN} = 120 - \frac{1}{2} \cdot MN \cdot BN =$$

$$= 120 - \frac{1 \cdot 144 \cdot 21}{2 \cdot 23 \cdot 5} = 120 - \frac{1512}{115} = \frac{12288}{115} = 106 \frac{98}{115}.$$

Ответ: 110,4; $106 \frac{98}{115}$.

1567. Найдём высоту DH треугольника CDE (см. рис. 498).

$$DH = \frac{2S_{CDE}}{CE} = \frac{2 \cdot 84}{15} = 11,2, \text{ тогда радиус вписанной окружности}$$

равен $\frac{11,2}{1,4 \cdot 2} = 4$. $S_{CDE} = p \cdot r$ (p — полупериметр $\triangle CDE$, r — ра-

диус вписанной окружности), отсюда $p = \frac{S_{CDE}}{r} = \frac{84}{4} = 21$, тогда $CD + DE = 2p - CE = 2 \cdot 21 - 15 = 27$.

Пусть $CD = x$, тогда $DE = 27 - x$. Используя формулу Герона, имеем $84^2 = 21 \cdot (21 - 15)(21 - x)(21 - 27 + x)$, $84^2 = 21 \cdot 6 \cdot (21 - x)(x - 6)$, $x^2 - 27x + 182 = 0$, $x_1 = 13$, $x_2 = 14$. Значит, $CD = 13$ или $CD = 14$.

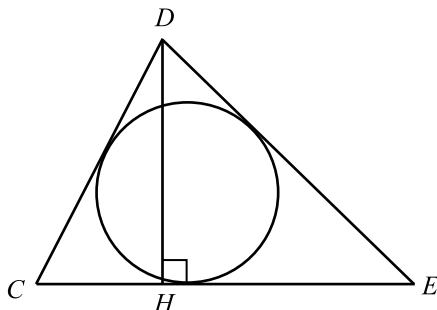


Рис. 498.

Ответ: 13 или 14.

1568. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R$, где R — радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности. Отсюда $R = \frac{3}{2}BC$. Найдём сторону BC .

Возможны два случая:

1) $\cos \angle BAC > 0$, тогда $\cos \angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ и по теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC; BC^2 = 288 - 288 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$BC = 4\sqrt{18 - 12\sqrt{2}}; R = 6\sqrt{18 - 12\sqrt{2}}.$$

2) $\cos \angle BAC < 0$, тогда $\cos \angle BAC = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Аналогично первому случаю

$$R = 6\sqrt{18 + 12\sqrt{2}}.$$

Ответ: $6\sqrt{18 \pm 12\sqrt{2}}$.

1569. Возможны 2 случая:

1) Пусть $BH = 4$ — высота (см. рис. 499). $AH = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$;
 $CH = AC - AH = 8 - 4\sqrt{3}$,

$$BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{16 + 64 - 64\sqrt{3} + 16 \cdot 3} = 8\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

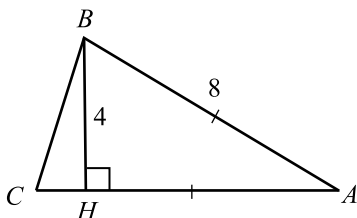


Рис. 499.

2) Пусть $BH = 4$ — высота (см. рис. 500). $AH = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$;
 $CH = AC + AH = 8 + 4\sqrt{3}$,

$$BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{16 + 64 + 64\sqrt{3} + 16 \cdot 3} = 8\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

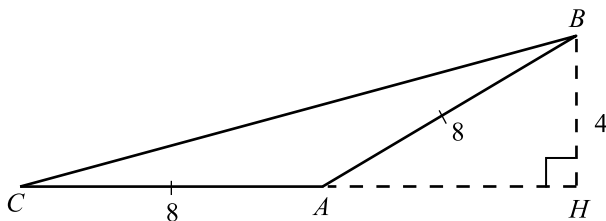


Рис. 500.

Ответ: $8\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$.

1570. Треугольники APC и QBC (см. рис. 501) подобны по двум углам, тогда $\frac{PN}{BH} = \frac{AC}{QC}$, $PN \cdot QC = AC \cdot BH$, $\frac{1}{2}PN \cdot QC = \frac{1}{2}AC \cdot BH = S_{ABC}$, то есть $S_{QPC} = 13$.

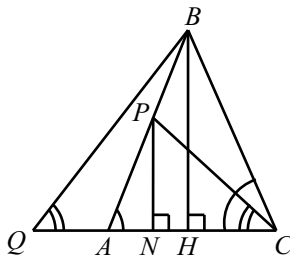


Рис. 501.

Ответ: 13.

1571. Пусть $\triangle MNP$ (см. рис. 502) тот, периметр которого требуется определить. Найдем MN . Треугольник AMC подобен треугольнику BNC (угол ACB — общий, $\angle AMC = \angle BNC = 90^\circ$), $\Rightarrow \frac{BC}{NC} = \frac{AC}{MC}$. Отсюда следует, что $\triangle MNC \sim \triangle ABC$ ($\angle ACB$ — общий, а стороны, его заключающие, пропорциональны).

Пусть $AB = 7$, $BC = 5$, $AC = 6$, R — радиус описанной около $\triangle ABC$, а R_1 — около $\triangle MNC$ окружности, тогда $\frac{MN}{R_1} = \frac{7}{R}$,

$MN = \frac{7R_1}{R}$; $R = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4S}$, где S — площадь $\triangle ABC$, $R_1 = \frac{OC}{2}$ (так как окружность, описанная около $\triangle MNC$ пройдет через O , причем OC — диаметр, так как $\angle OMC = \angle ONC = 90^\circ$).

$$MN = \frac{7R_1}{R} = \frac{7 \cdot OC}{2R} = \frac{7(PC - PO)}{2R} = \frac{7PC - 7PO}{2R} =$$

$$= \frac{2S - 2S_{\triangle ABO}}{2R}. \quad \text{Аналогично} \quad NP = \frac{S - S_{\triangle BCO}}{R},$$

$$PM = \frac{S - S_{\triangle ACO}}{R} \Rightarrow$$

$$P = MN + NP + PM = \frac{3S - (S_{\triangle ABO} + S_{\triangle BCO} + S_{\triangle ACO})}{R} =$$

$$= \frac{2S}{R} = \frac{8S^2}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{8(\sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2})^2}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{288}{35} \quad (S \text{ вычисляется по формуле Герона}).$$

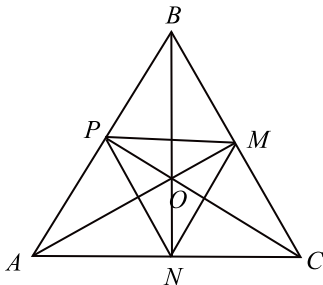


Рис. 502.

Ответ: $\frac{288}{35}$.

1572. Пусть в исходном $\triangle ABC$ стороны $AC = 10$, $AB = 4$, $BC = 8$, CM , AN , BH — высоты $\triangle ABC$. По теореме косинусов для $\triangle ABC$ имеем: $16 = 100 + 64 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cos \angle BCA$, откуда $\cos \angle BCA = \frac{37}{40}$. Тогда

$$BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{8^2 - \frac{37^2}{5^2}} = \frac{\sqrt{231}}{5}. \text{ Введём прямоугольную декартову систему координат (см. рис. 503), в которой } H(0;0), A\left(-\frac{13}{5};0\right),$$

$$C\left(\frac{37}{5};0\right), B\left(0;\frac{\sqrt{231}}{5}\right).$$

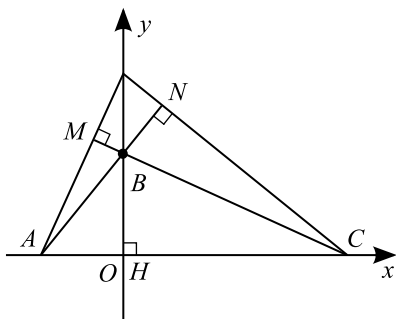


Рис. 503.

Тогда уравнение прямой AB , проходящей через точки $A\left(-\frac{13}{5};0\right)$ и $B\left(0;\frac{\sqrt{231}}{5}\right)$, имеет вид $y = \frac{\sqrt{231}}{13}x + \frac{\sqrt{231}}{5}$. Перпендикулярная ей прямая CN имеет угловой коэффициент $-\frac{13}{\sqrt{231}}$, а так как она проходит через $C\left(\frac{37}{5};0\right)$, то её уравнение имеет вид $y = -\frac{13}{\sqrt{231}}x + \frac{481}{5\sqrt{231}}$. Найдём координаты N , учитывая, что $N = AB \cap CN$.

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{231}}{13}x + \frac{\sqrt{231}}{5}, \\ y = -\frac{13}{\sqrt{231}}x + \frac{481}{5\sqrt{231}}; \end{cases} \quad \frac{\sqrt{231}}{13}x + \frac{\sqrt{231}}{5} = -\frac{13}{\sqrt{231}}x + \frac{481}{5\sqrt{231}};$$

$$\frac{400}{13\sqrt{231}}x = \frac{250}{5\sqrt{231}}; x = \frac{13}{8}; \text{отсюда } y = \frac{13\sqrt{231}}{40} \text{ и } N\left(\frac{13}{8}; \frac{13\sqrt{231}}{40}\right).$$

Уравнение прямой BC , проходящей через точки $B\left(0; \frac{\sqrt{231}}{5}\right)$ и

$C\left(\frac{37}{5}; 0\right)$, имеет вид $y = -\frac{\sqrt{231}}{37}x + \frac{\sqrt{231}}{5}$. Перпендикулярная ей пря-

мая AM имеет угловой коэффициент $\frac{37}{\sqrt{231}}$, а так как она проходит через

$A\left(-\frac{13}{5}; 0\right)$, то её уравнение имеет вид $y = \frac{37}{\sqrt{231}}x + \frac{481}{5\sqrt{231}}$. Найдём ко-

ординаты M , учитывая, что $M = BC \cap AM$.

$$\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{231}}{37}x + \frac{\sqrt{231}}{5}, \\ y = \frac{37}{\sqrt{231}}x + \frac{481}{5\sqrt{231}}; \end{cases}$$

$$-\frac{\sqrt{231}}{37}x + \frac{\sqrt{231}}{5} = \frac{37}{\sqrt{231}}x + \frac{481}{5\sqrt{231}}; \frac{1600}{37\sqrt{231}}x = -\frac{50}{\sqrt{231}}; x = -\frac{37}{32},$$

отсюда $y = \frac{37\sqrt{231}}{160}$ и $M\left(-\frac{37}{32}; \frac{37\sqrt{231}}{160}\right)$.

Найдём длины отрезков NH , MH , MN :

$$NH^2 = \frac{13^2}{8^2} + \frac{13^2 \cdot 231}{40^2} = \frac{26^2}{5^2};$$

$$NH = \frac{26}{5};$$

$$MH^2 = \frac{37^2}{32^2} + \frac{37^2 \cdot 231}{160^2} = \frac{37^2}{160^2}(5^2 + 231) = \frac{37^2 \cdot 16^2}{160^2} = \frac{37^2}{10^2};$$

$$MH = \frac{37}{10};$$

$$MN^2 = \left(\frac{37}{32} + \frac{13}{8}\right)^2 + \left(\frac{37\sqrt{231}}{160} - \frac{13\sqrt{231}}{10}\right)^2 = \frac{25^2}{8^2}; MN = \frac{25}{8}.$$

$$P = NH + MH + MN = \frac{26}{5} + \frac{37}{10} + \frac{25}{8} = \frac{481}{40}.$$

Ответ: $\frac{481}{40}$.

1573. Обозначим $AC = x$, тогда $AB = BC = \frac{3}{2}x$; $QC = y$, тогда

$AP = 2y$, и из подобия треугольников AKP и QNC исходному треугольнику ABC следует $AK = KP = 3y$, $QN = NC = \frac{3}{2}y$. Рассмотрим два случая.

1) Точки P и Q расположены на отрезке AC , как показано на рисунке 504 ($x > 3y$). Тогда $BT = OL = QN = \frac{3}{2}y$, $BL = OT = KP = 3y$, откуда

$$OP = KT = \frac{3}{2}x - 3y - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}x - 4,5y, \quad PQ = x - 3y \text{ и}$$

$$P_{BLOT} = 2\left(\frac{3}{2}y + 3y\right) = 9y, \quad P_{POQ} = 3x - 9y + (x - 3y) = 4x - 12y,$$

$$\frac{P_{BLOT}}{P_{POQ}} = \frac{9y}{4x - 12y} = \frac{7}{4}; \quad \frac{9y}{x - 3y} = 7; \quad 9y = 7x - 21y; \quad 30y = 7x; \quad \frac{y}{x} = 7 : 30.$$

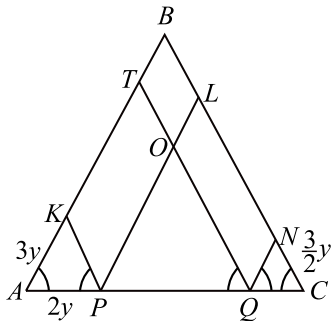


Рис. 504.

2) Точки P и Q расположены на отрезке AC , как показано на рисунке 505 ($x < 3y$). $PC = x - 2y > 0$, значит, $x > 2y$. Тогда $BT = QN = OL = \frac{3}{2}y$;

$$QP = 3y - x; \quad OP = \frac{3}{2}(3y - x), \quad PC = QC - QP = y - (3y - x) = x - 2y;$$

$$LC = \frac{3}{2}(x - 2y) = \frac{3}{2}x - 3y.$$

$$P_{BLOT} = 2BT + 2BL = 3y + 2\left(\frac{3}{2}x - LC\right) = 3y + 3x - 2LC =$$

$$= 3y + 3x - 3x + 6y = 9y. \quad P_{POQ} = 4(3y - x). \quad \frac{P_{BLOT}}{P_{POQ}} = \frac{9y}{4(3y - x)} = \frac{7}{4};$$

$\frac{9y}{3y-x} = 7$; $9y = 21y - 7x$; $7x = 12y$, $\frac{y}{x} = \frac{7}{12}$, $x > 2y$ не выполняется.

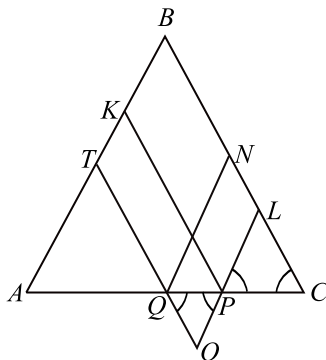


Рис. 505.

Ответ: 7 : 30.

1574. Требуется найти отношение $PT : TL : LQ$ (см. рис. 506). Из подобий $\triangle PRT \sim \triangle PKQ$, $\triangle APR \sim \triangle AMO$ и $\triangle APK \sim \triangle AMC$ следует, что $\frac{PT}{PQ} = \frac{PR}{PK} = \frac{MO}{MC}$. Так как O — точка пересечения медиан, то

$\frac{PT}{PQ} = \frac{MO}{MC} = \frac{1}{3}$. Аналогично $\frac{QL}{QP} = \frac{1}{3}$, откуда $PT = TL = LQ$.

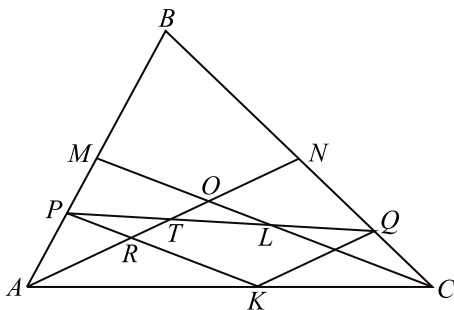


Рис. 506.

Ответ: 1 : 1 : 1.

1575. Так как угол BKC — вписанный, опирающийся на диаметр, то $\angle BKC = 90^\circ$ и $BK = \sqrt{BC^2 - KC^2}$ (см. рис. 507), $BC = 10 + 9 = 19$.

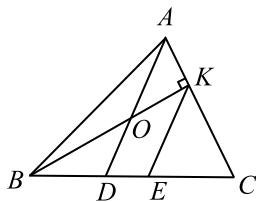


Рис. 507.

Проведём $KE \parallel AD$, тогда по теореме Фалеса имеем $\frac{DE}{DC} = \frac{AK}{AC}$ и $\frac{OK}{BK} = \frac{DE}{BE}$, отсюда $DE = \frac{AK \cdot DC}{AC}$ и $OK = \frac{DE \cdot BK}{BE}$.

Возможны 2 случая:

- 1) $AK = 1, KC = 5$. Тогда $BK = \sqrt{19^2 - 5^2} = 4\sqrt{21}$; $DE = \frac{1 \cdot 9}{6} = 1,5$; $BE = BD + DE = 11,5$; $OK = \frac{1,5 \cdot 4\sqrt{21}}{11,5} = \frac{12\sqrt{21}}{23}$;
- 2) $AK = 5, KC = 1$. Тогда $BK = \sqrt{19^2 - 1^2} = 6\sqrt{10}$; $DE = \frac{5 \cdot 9}{6} = 7,5$; $BE = BD + DE = 17,5$; $OK = \frac{7,5 \cdot 6\sqrt{10}}{17,5} = \frac{18\sqrt{10}}{7}$.

Ответ: $\frac{18\sqrt{10}}{7}$ или $\frac{12\sqrt{21}}{23}$.

1576. Сторона квадрата равна меньшей стороне прямоугольника и равна 4 (большая сторона прямоугольника соответственно равна 8). Отсюда радиус каждой из окружностей равен 2 (см. рис.508).

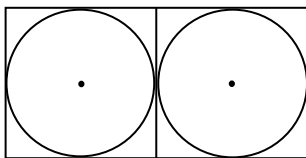


Рис. 508.

По условию $\triangle ABC$ — равносторонний. Проведём высоту CP ,

$$CP = \frac{\sqrt{3}}{2}AB, \quad AP = \frac{1}{2}AB.$$

Возможны два случая:

1 случай (см. рис. 509).

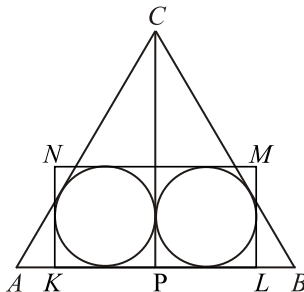


Рис. 509.

Обозначим $AB = x$. $CP = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $AP = \frac{x}{2}$.

$S_{APC} = \frac{1}{2}AP \cdot PC = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2$. С другой стороны $S_{APC} = \frac{1}{2}Pr$, где P — периметр $\triangle ABC$, r — радиус вписанной в него окружности.

$P = x + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{x}{2}(3 + \sqrt{3})$. Отсюда $\frac{\sqrt{3}}{8}x^2 = \frac{x}{2}(3 + \sqrt{3})$, $x > 0$, $\sqrt{3}x = 4(3 + \sqrt{3})$, $x = 4(\sqrt{3} + 1)$.

2 случай (см.рис. 510).

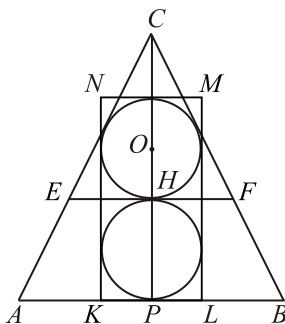


Рис. 510.

Пусть H — точка касания окружностей, тогда $EF \perp CP$, значит,

$EF \parallel AB$. $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ по первому признаку подобия, значит, $\triangle CEF$ — равносторонний, в который вписана окружность с центром в точке O . Так как O является точкой пересечения медиан $\triangle CEF$, CH — медиана, то $CO = 2OH = 2 \cdot 2 = 4$; $HP = 4$ как диаметр окружности радиуса 2. $CP = CO + OH + HP = 4 + 2 + 4 = 10$. Так как $CP = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$,

$$\text{то } AB = \frac{2CP}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } 4(\sqrt{3} + 1) \text{ или } \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

1577. Рассмотрим несколько случаев взаимного расположения треугольников.

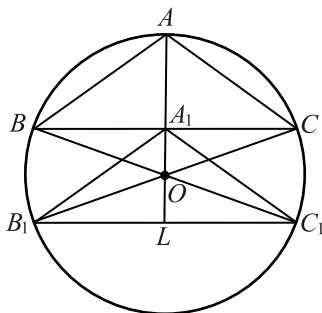


Рис. 511.

1) $BA_1 = CA_1$ (см. рис. 511). Так как окружность проходит через точки B и C , то её центр O лежит на серединном перпендикуляре к BC . При этом треугольник BOB_1 — равнобедренный ($BO = B_1O$), а поэтому O — середина высоты A_1L треугольника $A_1B_1C_1$. Пусть $AA_1 = x$, тогда $AO = \frac{3}{2}x$, $OB = OB_1 = OC = OC_1 = \sqrt{A_1C^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{x^2}{4}}$, но $OA = OB$; $\sqrt{9 + \frac{x^2}{4}} = \frac{3}{2}x$; $9 + \frac{x^2}{4} = \frac{9}{4}x^2$; $2x^2 = 9$; $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Тогда по теореме Пифагора $AB = \sqrt{BA_1^2 + AA_1^2} = \sqrt{9 + \frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

2) $BA_1 < CA_1$, $A_1 \neq B$ (см. рис. 512). Центр окружности O также лежит на серединном перпендикуляре к BC , с другой стороны точка O лежит на серединном перпендикуляре к B_1C_1 , что невозможно.

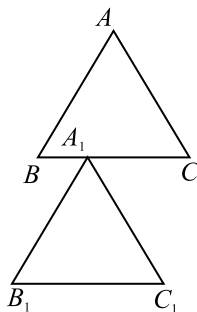


Рис. 512.

3) $BA_1 > CA_1$, $A_1 \neq C$ — аналогично случаю 2) этот случай также невозможен.

4) Вершина A_1 совпадает с вершиной B . Центр окружности O лежит на серединном перпендикуляре к B_1A и на серединном перпендикуляре к C_1C , но $C_1C \parallel B_1A$, значит, это возможно, только если серединные перпендикуляры совпадут (см. рис. 513).

Но тогда $\triangle BKC_1 = \triangle BKC$ по двум катетам и $B_1B = BC_1 = 6$, то есть треугольник ABC равносторонний и $AB = 6$.

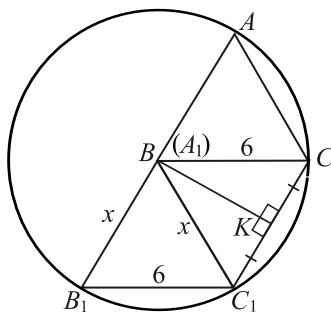


Рис. 513.

5) Вершина A_1 совпадает с вершиной C . Этот случай аналогичен предыдущему.

Ответ: $6; \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

1578. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 514). CH — данная высота h , проведённая из вершины C к основанию AD . Пусть $2CH = AC$, тогда $\angle CAD = 30^\circ$ и угол между диагоналями парал-

лелограмма, в три раза больший $\angle CAD$, — прямой. Следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

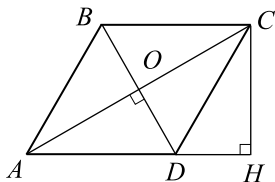


Рис. 514.

Найдём меньшую диагональ BD . $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$, $\angle ABD = \angle ADB = \angle CBD = \angle CDB = 60^\circ$, значит, треугольники ABD и BDC равносторонние и площадь ромба $S_{ABCD} = BD \cdot BD \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$, отсюда $BD = 2$.

(Если бы изначально $2CH = BD$, то $\angle BDA = 30^\circ$, что не поменяло бы ход решения и полученный ответ, но рисунок 514 ему бы не соответствовал, и меньшей диагональю ромба являлась бы диагональ AC .)

Ответ: 2.

1579. Рассмотрим два случая.

1) Пусть угол $\angle BDA = 60^\circ$ (см. рис. 515). Так как угол между диагоналями в три раза больше угла между стороной AD и одной из диагоналей параллелограмма, то возможно 2 случая:

- а) $\angle AOD = 3\angle OAD$; $\angle OAD + 3\angle OAD + 60^\circ = 180^\circ$; $\angle OAD = 30^\circ$.
- б) $\angle DOC = 3\angle OAD$; $\angle OAD + (180^\circ - 3\angle OAD) + 60^\circ = 180^\circ$; $\angle OAD = 30^\circ$.

Поэтому $\angle AOD = 90^\circ$, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

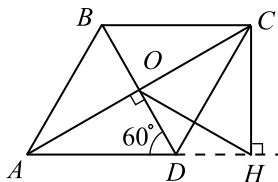


Рис. 515.

$\angle OCH = 90^\circ - \angle BCA = 60^\circ$ ($\angle BCA = \angle CAD$ как накрест лежащие при пересечении двух параллельных прямых секущей и $\angle BCA =$

$= \angle CAD = 30^\circ$). Так как $AC = \frac{CH}{\sin 30^\circ} = 2CH$, то $OC = CH = 4\sqrt{3}$.

Следовательно, $\triangle OCH$ — равносторонний, и $OH = CH = 4\sqrt{3}$.

2) Пусть угол $\angle CAD = 60^\circ$ (см. рис. 516), тогда аналогично 1-му случаю $\angle BDC = 30^\circ$, угол между диагоналями также равен 90° , и, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

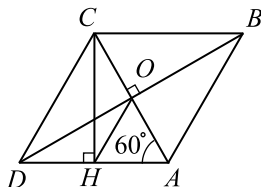


Рис. 516.

$$DB = \frac{CH}{\sin 30^\circ} = 2CH; OB = CH = 4\sqrt{3};$$

$$CB = \frac{OB}{\sin 60^\circ} = 4\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 8. \text{ По теореме Пифагора } CO^2 = CB^2 - OB^2$$

и $CO = \sqrt{64 - 16 \cdot 3} = 4$. В треугольнике CHO $\angle HCO = 30^\circ$, $CO = 4$ и $CH = 4\sqrt{3}$. По теореме косинусов $HO^2 = CH^2 + CO^2 - 2CH \cdot CO \cdot \cos 30^\circ$;

$$HO^2 = 48 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48 + 16 - 48 = 16; HO = 4.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$; 4.

1580. 1. BD и MC — хорды (см. рис. 517). Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Тогда $MO \cdot OC = BO \cdot OD$, $MO \cdot 4 = 2 \cdot 2$, $MO = 1$, $AM = 3$.

2. Найдем ND — радиус окружности, описанной вокруг $\triangle AMD$. По теореме синусов $2ND = \frac{AM}{\sin \angle ADM}$, $ND = \frac{AM}{2 \sin \angle ADM} = 3$.

3. Докажем, что $BD \perp ND$. $MO \cdot OC = \frac{MO \cdot OA}{\sin \angle AOM} = \frac{OD^2}{\sin \angle AOM} \Rightarrow OD$ — касательная (OA — секущая). $BN = \sqrt{BD^2 + ND^2} = 5$.

Ответ: 5.

1581. 1) Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. BD , MC — хорды (рис. 518). $MO \cdot OC = BO \cdot OD$, $MO \cdot 9 = 3 \cdot 3$, $MO = 1$, $AM = 8$.

$$2) \text{ По теореме синусов } 2NB = \frac{AM}{\sin \angle ABM}; NB = \frac{AM}{2 \sin \angle ABM} =$$

$$= 8 : \frac{2}{3} = 12.$$

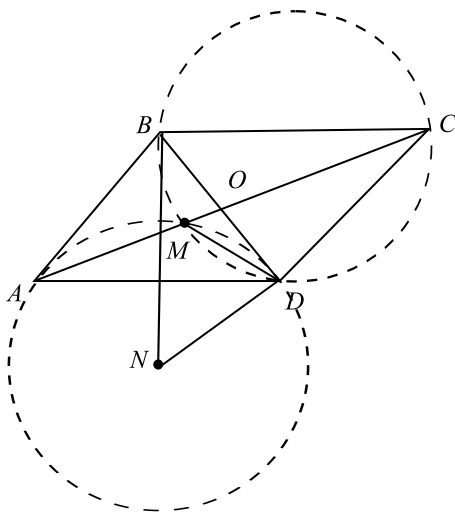


Рис. 517.

3) $NB \perp BD$, т. к. $OM \cdot OA = OB^2$, тогда $ND = \sqrt{BD^2 + NB^2} = \sqrt{36 + 144} = 6\sqrt{5}$.

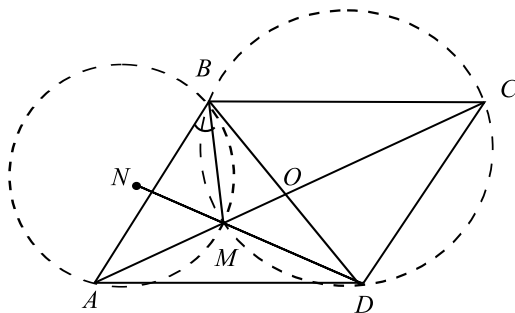


Рис. 518.

Ответ: $6\sqrt{5}$.

1582. Так как $AB = CD = BD$, то $\angle DBC = \angle DCB$. Треугольники BCK и BDT (см. рис. 519) подобны по двум углам, откуда $\frac{DH}{NK} = \frac{BT}{BC}$,

$$NK \cdot BT = DH \cdot BC = S_{ABCD}, S_{BKT} = \frac{1}{2} NK \cdot BT = 12,5.$$

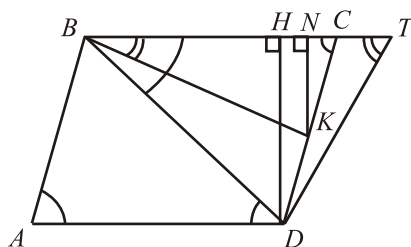


Рис. 519.

Ответ: 12,5.

1583. Диагональ BD — общая сторона равных треугольников BAD и DCB , поэтому центры O_1 и O_2 описанных около них окружностей расположены по разные стороны от прямой BD , а так как BD — общая хорда, то $O_1O_2 \perp BD$ и $BK = KD$, K — точка пересечения O_1O_2 и BD . Следовательно, $O_1O_2 = 2O_1K$.

Рассмотрим два случая

1. $\angle BAD = 30^\circ$, тогда центр O_1 лежит во внутренней области треугольника BAD (см. рис. 520).

$\angle BAD$ — вписанный, $\angle BO_1D$ — центральный, следовательно, $\angle BO_1D = 2\angle BAD = 60^\circ$, тогда $\triangle BO_1D$ равносторонний, O_1K — высота, $O_1K = \frac{BD\sqrt{3}}{2}$, значит, $O_1O_2 = BD\sqrt{3}$.

Найдём BD из $\triangle ABD$ по теореме косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD;$$

$$BD^2 = 5^2 + (7\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 67; \quad BD = \sqrt{67}.$$

Следовательно, $O_1O_2 = \sqrt{67} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{201}$.

2. $\angle ABC = 30^\circ$, тогда $\angle BAD = 150^\circ$ и центр O_1 лежит во внешней области $\triangle BAD$ (см. рис. 521). $\angle BO_1D = 360^\circ - 2\angle BAD = 60^\circ$.

$$O_1K = \frac{BD\sqrt{3}}{2}, \quad O_1O_2 = BD\sqrt{3}.$$

Аналогично случаю 1. найдём BD из $\triangle ABD$ по теореме косинусов.

$$BD^2 = 5^2 + (7\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 227; \quad BD = \sqrt{227}.$$

Значит, $O_1O_2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{227} = \sqrt{831}$.

Ответ: $\sqrt{201}$; $\sqrt{831}$.

1584. Возможны два случая.

1) Треугольники построены на сторонах BC и AD (см. рис. 522).

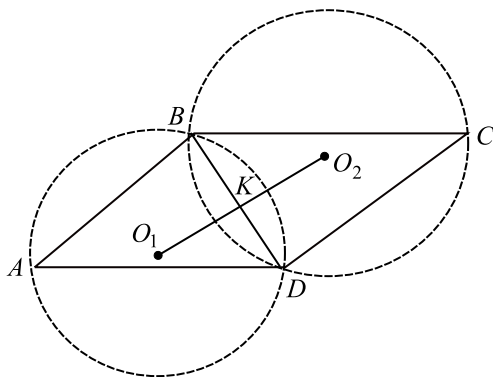


Рис. 520.

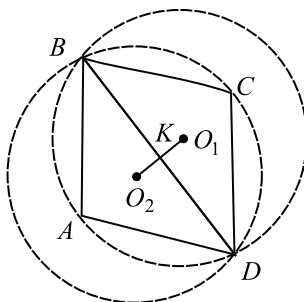


Рис. 521.

Построим прямоугольный треугольник с гипотенузой MN . MK и NF — высоты равных равнобедренных треугольников MBC и AND . По построению $KF \parallel AB$, $KF = AB$ (вершина равнобедренного треугольника проектируется на середину основания).

$\angle KFE = \angle BAD = 60^\circ$, $FK = 2$, отсюда $KE = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}$; $FE = 2 \cos 60^\circ = 1$. $MK = NF$ как соответствующие высоты равных треугольников. $\angle KMC = \frac{1}{2} \angle BMC = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$; $CK = \frac{1}{2} BC = 2$;

$$MK = \frac{KC}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

По теореме Пифагора для $\triangle MHN$ $MN^2 = MH^2 + HN^2 =$
 $= (MK + KE + NF)^2 + EF^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 1;$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{2\sqrt{39}}{3}.$$

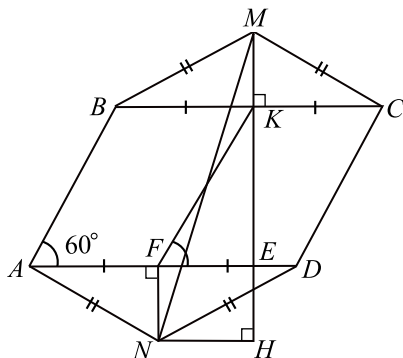


Рис. 522.

2) Треугольники построены на сторонах AB и DC (см. рис. 523).

Аналогично первому случаю построим прямоугольный треугольник с гипотенузой MN . $FK \parallel AD$ и $FK = AD = 4$. $KE = 4 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$,

$$EF = 4 \cos 60^\circ = 2. \quad \angle KMC = \frac{1}{2} \angle BMC - \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ;$$

$$CK = \frac{1}{2} DC = 2; \quad MK = \frac{KC}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{По теореме Пифагора для } \triangle MHN \quad MN^2 &= MH^2 + HN^2 = \\ &= (MK + KE + NF)^2 + EF^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2^2; \end{aligned}$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4} = \frac{2\sqrt{57}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{39}}{3}; \frac{2\sqrt{57}}{3}.$$

1585. Обозначим сторону ромба через a , тогда его площадь $S = a^2 \sin \angle A$, отсюда $a^2 = \frac{S}{\sin \angle A} = \frac{10}{0,6} = \frac{50}{3}$, $a = \frac{5\sqrt{6}}{3}$. Точки A и C симметричны относительно BE , поэтому BE — диаметр окружности и $\angle BCE = 90^\circ$. По теореме Пифагора $CE = \sqrt{BE^2 - BC^2} = \sqrt{(2R)^2 - a^2}$, где R — радиус окружности. Заметим, что $\sin \angle B = \sin(180^\circ - \angle A) = \sin \angle A = 0,6$.

Возможны 2 случая (см. рис. 524).

1) $\angle B$ — острый. Тогда $\cos \angle B = \sqrt{1 - \sin^2 \angle B} = \sqrt{0,64} = 0,8$. Из

2) $\angle B$ — тупой. Тогда $\cos \angle B = -\sqrt{1 - \sin^2 \angle B} = -\sqrt{0,64} = -0,8$.

Из $\triangle ABC$ имеем $AC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \angle B = 2a^2 \cdot 1,8 = 3,6a^2 = \frac{18}{5}a^2$;

$AC = 3a\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{3a\sqrt{10}}{5}$. По теореме синусов $2R = \frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{3a\sqrt{10}}{5 \cdot 0,6} = a\sqrt{10}$. Тогда $CE = \sqrt{10a^2 - a^2} = 3a = 5\sqrt{6}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{6}}{9}; 5\sqrt{6}$.

1586. 1) Пусть $DC > AB$ (см. рис. 525). Положим $AK = KB = x$, $DM = MC = y$. Тогда $x < y$.

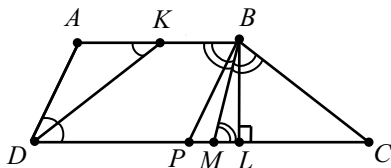


Рис. 525.

2) Так как DK — биссектриса $\angle ADC$, то $\angle ADK = \angle KDM$; $\angle KDM = \angle AKD$ (как накрест лежащие). Следовательно, в $\triangle ADK$ $\angle ADK = \angle AKD$ и $AD = AK = x$.

Проводя аналогичные рассуждения для $\triangle MBC$, получим: $BC = MC = y$.

3) Проведём $BP \parallel AD$. Тогда $BP = AD = x < y = BC \Rightarrow \angle BPC > \angle BCP \Rightarrow \angle ADC > \angle BCD \Rightarrow \angle ADC = 60^\circ$.

4) $PC = DC - DP = 2y - 2x$.

5) Из $\triangle BPC$ по теореме косинусов

$$BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2BP \cdot PC \cos \angle BPC;$$

$$y^2 = x^2 + (2y - 2x)^2 - 2x(2y - 2x) \cos 60^\circ;$$

$$y^2 = x^2 + 4y^2 - 8xy + 4x^2 - 4xy \cdot \frac{1}{2} + 4x^2 \cdot \frac{1}{2};$$

$$3y^2 + 7x^2 - 10xy = 0.$$

6) Из $\triangle BPL$ находим $BL = BP \sin \angle BPL = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

По условию $BL = 3\sqrt{3}$; $\frac{x\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$; $x = 6$.

Тогда $3y^2 + 7 \cdot 6^2 - 10 \cdot 6y = 0$; $y_1 = 6$; $y_2 = 14$.

Значение $y = 6$ не удовлетворяет условию $y > x$.

Значит, $y = 14$.

$$7) P_{ABCD} = DC + BC + AB + AD = 2y + y + 2x + x = 3(14 + 6) = 60.$$

Ответ: 60.

1587. Дано: $ABCD$ — трапеция; AB, DC — основания трапеции; $AK = KB$; $DM = MC$; $P_{ABCD} = 30$; DK — биссектриса $\angle ADC$; BM — биссектриса $\angle ABC$. Косинус меньшего угла при нижнем основании равен $\frac{3}{4}$.

Найти: KM .

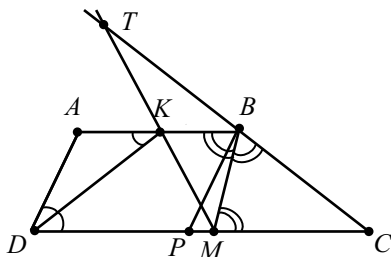


Рис. 526.

Решение. 1) Пусть $DC > AB$ (см. рис. 526). Положим $AK = KB = x$, $DM = MC = y$. Тогда $x < y$.

2) Так как DK — биссектриса $\angle ADC$, то $\angle ADK = \angle KDC$; $\angle KDC = \angle DKA$ (накрест лежащие).

Следовательно, в $\triangle DAK$ $\angle DAK = \angle AKD$ и $AD = AK = x$. Проводя аналогичные рассуждения для $\triangle MBC$, получаем $MC = BC = y$.

3) Проведём $BP \parallel AD$. Тогда $BP = AD = x < y = BC \Rightarrow \angle BPC > \angle BCP \Rightarrow \angle ADC > \angle BCD$. Значит, $\cos \angle BCD = \frac{3}{4}$.

$$4) PC = DC - DP = 2y - 2x.$$

5) Из $\triangle BPC$ по теореме косинусов

$$BP^2 = BC^2 + PC^2 - 2BC \cdot PC \cos \angle BCP \Rightarrow$$

$$x^2 = y^2 + (2y - 2x)^2 - 2y(2y - 2x) \cdot \frac{3}{4};$$

$$x^2 = y^2 + 4y^2 - 8xy + 4x^2 - 3y^2 + 3xy;$$

$$2y^2 + 3x^2 - 5xy = 0.$$

6) По условию периметр $P_{ABCD} = 30$.

Так как $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 3x + 3y$, то $3x + 3y = 30$;
 $x + y = 10$.

7) Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 + 3x^2 - 5xy = 0, \\ x + y = 10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - y, \\ 10(y - 5)(y - 6) = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 = 5, y_1 = 5, x_2 = 4, y_2 = 6.$$

Значения x_1 и y_1 не удовлетворяют условию $x < y$.

Следовательно, $x = 4, y = 6$.

8) Продолжим прямые MK и BC до пересечения в точке T .

$\triangle TKB \sim \triangle TMC$ ($\angle T$ — общий, $\angle TBK = \angle TCM$ и $\angle TKB = \angle TMC$

как сонаправленные). Значит, $\frac{TC}{TB} = \frac{TM}{TK} = \frac{MC}{KB} = \frac{y}{x} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$TC = \frac{3}{2}TB$. С другой стороны, $TC = TB + BC = TB + y = TB + 6$.

Получаем $TB + 6 = \frac{3}{2}TB$; $TB = 12$; $TC = 18$.

9) Из $\triangle TMC$ по теореме косинусов

$$TM^2 = TC^2 + MC^2 - 2TC \cdot MC \cos \angle TCM;$$

$$TM^2 = 18^2 + 6^2 - 2 \cdot 18 \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} = 198;$$

$$TM = \sqrt{198} = 3\sqrt{22}.$$

Из соотношения $\frac{TM}{TK} = \frac{3}{2}$, находим $TK = \frac{2TM}{3} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{22}}{3} = 2\sqrt{22}$.

$$KM = TM - TK = 3\sqrt{22} - 2\sqrt{22} = \sqrt{22}.$$

Ответ: $\sqrt{22}$.

1588. Дано: $ABCD$ — трапеция; $BC = 12$; $AD = 18$; $AC \perp BD$. Тангенс угла между боковыми сторонами равен $\frac{1}{3}$.

Найти: S_{ABCD} .

Решение. 1) Проведём прямую $CK \parallel AB$ (см. рис. 527).

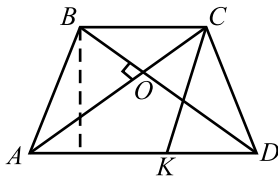


Рис. 527.

Согласно условию $\operatorname{tg} \angle KCD = \frac{1}{3}$.

2) Пусть h — высота трапеции $ABCD$.

$$\text{Тогда } S_{KCD} = \frac{AD - AK}{2} \cdot h = \frac{AD - BC}{2} \cdot h = \frac{18 - 12}{2} \cdot h = 3h;$$

$$h = \frac{S_{KCD}}{3}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{18 + 12}{2} \cdot h = 15h = \frac{15 \cdot S_{KCD}}{3} = 5S_{KCD}.$$

3) Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции. Так как по условию $AC \perp BD$, то $\triangle ABO$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$ и $\triangle AOD$ — прямоугольные.

$$\text{Из } \triangle ABO: AB^2 = AO^2 + BO^2;$$

$$\text{из } \triangle BOC: BO^2 = BC^2 - OC^2 \Rightarrow AB^2 = AO^2 + BC^2 - OC^2.$$

$$\text{Из } \triangle COD: CD^2 = OD^2 + OC^2;$$

$$\text{из } \triangle AOD: OD^2 = AD^2 - AO^2 \Rightarrow CD^2 = AD^2 - AO^2 + OC^2.$$

$$\text{По теореме косинусов } KD^2 = KC^2 + CD^2 - 2KC \cdot CD \cos \angle KCD \Rightarrow$$

$$KC \cdot CD = \frac{KC^2 + CD^2 - KD^2}{2 \cos \angle KCD} = \frac{AB^2 + CD^2 - KD^2}{2 \cos \angle KCD} =$$

$$= \frac{AO^2 + BC^2 - OC^2 + AD^2 - AO^2 + OC^2 - KD^2}{2 \cos \angle KCD} =$$

$$= \frac{BC^2 + AD^2 - (AD - BC)^2}{2 \cos \angle KCD} = \frac{12^2 + 18^2 - (18 - 12)^2}{2 \cos \angle KCD} = \frac{216}{\cos \angle KCD}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{KCD} = \frac{1}{2} KC \cdot CD \sin \angle KCD = \frac{216 \cdot \sin \angle KCD}{2 \cos \angle KCD} =$$

$$= 108 \operatorname{tg} \angle KCD = \frac{108}{3} = 36.$$

$$\text{Получаем: } S_{ABCD} = 5S_{KCD} = 5 \cdot 36 = 180.$$

Ответ: 180.

1589. Пусть Q — точка пересечения биссектрис, $PF = x$, $FT = y$, $TK = z$. $MP = AK$, $AM = PK$. Точка F лежит между P и T , так как

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} < 1.$$

Возможны два случая.

1. Точка Q лежит внутри параллелограмма (см. рис. 528). Треугольники MPT и AKF равнобедренные (для треугольника AKF : $\angle 1 = \angle 2$, так как AF — биссектриса $\angle A$; $\angle 1 = \angle 3$ как накрест ле-

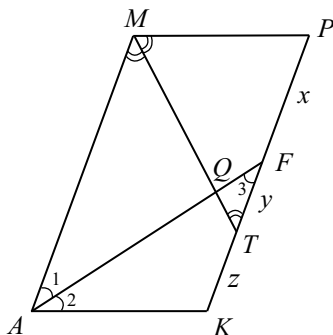


Рис. 528.

жащие при параллельных прямых AM и KP . Для треугольника MPT аналогично).

Тогда $x + y = MP = 24$; $y + z = AK = 24$; $x = z$; $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$; $x = 9$; $y = 15$; $z = 9$; $PK = x + y + z = 9 + 15 + 9 = 33$.

2. Точка Q лежит вне параллелограмма (см. рис. 529). Треугольники

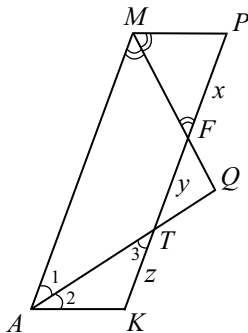


Рис. 529.

MPF и AKT равнобедренные. Тогда $x = MP = 24$; $z = AK = 24$; $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$; $y = \frac{5}{3}x = 40$; $PK = x + y + z = 24 + 40 + 24 = 88$.

Ответ: 33; 88.

1590. Пусть Q — точка пересечения биссектрис, $PF = x$, $FT = y$, $TK = z$. $MP = AK$, $AM = PK$. Точка F лежит между P и T , так как

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{11} < 1.$$

Возможны два случая.

1. Точка Q лежит внутри параллелограмма (см. рис. 530).

Треугольники MPT и AKF равнобедренные (в треугольнике AKF : $\angle 1 = \angle 2$, так как AF — биссектриса $\angle A$; $\angle 1 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллельных прямых AM и KP . Для треугольника MPT аналогично). Тогда $x + y = MP = 26$; $y + z = AK = 26$; $\frac{x}{y} = \frac{2}{11}$; $x = 4$; $y = 22$; $z = 4$; $AM = x + y + z = 4 + 22 + 4 = 30$.

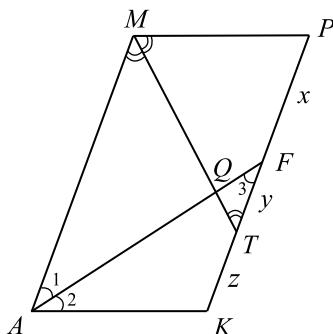


Рис. 530.

2. Точка Q лежит вне параллелограмма (см. рис. 531). Треугольники

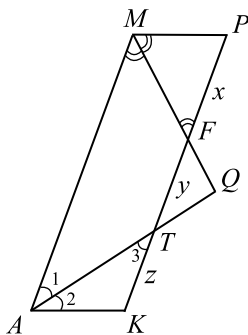


Рис. 531.

MPF и AKT равнобедренные. Тогда $x = MP = 26$; $z = AK = 26$;

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{11}; y = \frac{11 \cdot 26}{2} = 143; AM = PK = x + y + z = 26 + 143 + 26 = 195.$$

Ответ: 30; 195.

1591. Возможны два случая.

1. Точка D лежит на отрезке BC (см. рис. 532). Тогда $BD = \frac{2}{5}BC = 4$, $DC = BC - BD = 6$.

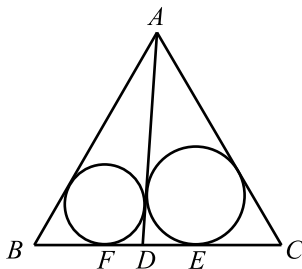


Рис. 532.

По теореме косинусов для треугольника ADC :

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos C;$$

$AD = \sqrt{10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}} = 2\sqrt{19}$. Так как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны, то из треугольника ADC следует, что $2DE = AD + DC - AC$;

$DE = \frac{AD + DC - AC}{2}$. Аналогично из треугольника ABD получаем:

$$2DF = AD + BD - AB; DF = \frac{AD + BD - AB}{2}. \text{ Тогда } EF = DF + DE = \frac{1}{2}(2AD + BD + DC - AC - AB) = \frac{1}{2}(2 \cdot 2\sqrt{19} + 4 + 6 - 10 - 10) = 2\sqrt{19} - 5.$$

2. Точка D лежит вне отрезка BC (см. рис. 533).

Тогда, обозначив $BD = x$, получим: $\frac{BD}{DC} = \frac{x}{x+10} = \frac{2}{3}$. Отсюда $x = BD = 20$, $DC = 30$. Аналогично п.1 получим:

$$DE = \frac{AD + DC - AC}{2}, DF = \frac{AD + BD - AB}{2}. \text{ Тогда } EF =$$

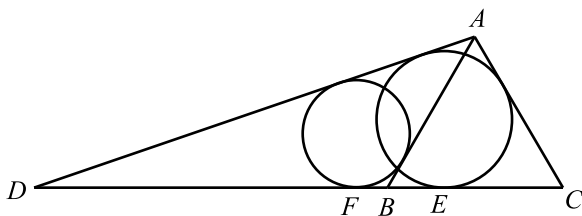


Рис. 533.

$$\begin{aligned}
 &= DE - DF = \frac{1}{2}(AD + DC - AC - AD - BD + AB) = \\
 &= \frac{1}{2}(AB + DC - AC - BD) = \frac{1}{2}(10 + 30 - 10 - 20) = 5.
 \end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{19} - 5$; 5.

1592. Возможны два случая.

1. Точка D лежит на отрезке BC (см. рис. 534).

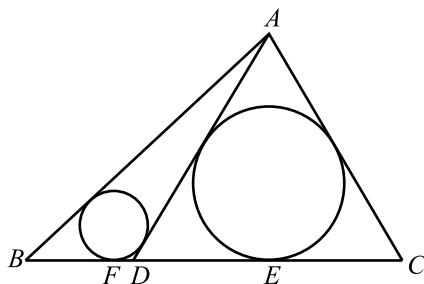


Рис. 534.

Тогда $BD = \frac{2}{7}BC = 4$; $DC = BC - BD = 10$. По теореме косинусов для треугольника ABC : $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C$; $\cos C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC} = \frac{14^2 + 10^2 - 4 \cdot 39}{2 \cdot 14 \cdot 10} = \frac{1}{2}$. По теореме косинусов для треугольника ADC : $AD^2 = DC^2 + AC^2 - 2 \cdot DC \cdot AC \cdot \cos C$; $AD = \sqrt{10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}} = 10$. Так как отрезки касательных, проведенные к окружностям из одной точки, равны, то из треугольника ADC следует, что $2DE = AD + DC - AC$; $DE = \frac{AD + DC - AC}{2} = 5$.

Аналогично, из треугольника ABD получаем: $2DF = AD + BD - AB$;
 $DF = \frac{AD + BD - AB}{2} = 7 - \sqrt{39}$. Тогда $EF = DF + DE = 12 - \sqrt{39}$.

2. Точка D лежит вне отрезка BC (см. рис. 535).

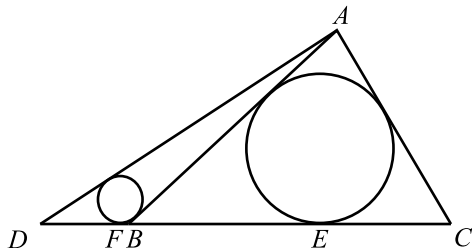


Рис. 535.

Тогда, обозначив $BD = x$, получим: $\frac{BD}{DC} = \frac{x}{x + 14} = \frac{2}{5}$.

$x = BD = \frac{28}{3}$, $DC = \frac{70}{3}$. Аналогично п. 1 получим:

$$DE = \frac{AD + DC - AC}{2}, DF = \frac{AD + BD - AB}{2}. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} EF = DE - DF &= \frac{1}{2}(AD + DC - AC - AD - BD + AB) = \\ &= \frac{1}{2}(AB + DC - AC - BD) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{39} + \frac{70}{3} - 10 - \frac{28}{3}\right) = \sqrt{39} + 2. \end{aligned}$$

Ответ: $12 - \sqrt{39}$; $2 + \sqrt{39}$.

1593. Возможны два случая.

1) Биссектрисы при стороне AD пересекаются внутри параллелограмма (см. рис. 536). $\angle DAN = \angle BNA$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и

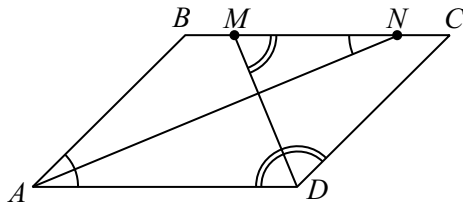


Рис. 536.

секущей AN) $\Rightarrow \triangle ABN$ равнобедренный: $BN = AB = 20$. Аналогично, $MC = CD = 20$. Так как $BM : MN = 2 : 3$, то $MN = 1,5BM$; $BN = BM + MN = 2,5BM$; $2,5BM = 20$; $BM = 8$; $MN = 1,5 \cdot 8 = 12$; $BC = BM + MC = 8 + 20 = 28$.

2) Биссектрисы при стороне AD не пересекаются внутри параллелограмма (см. рис. 537). Аналогично предыдущему случаю $BM = AB = 20$

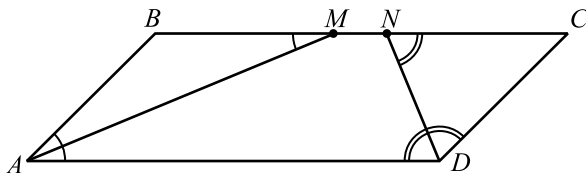


Рис. 537.

и $CN = CD = 20$. Так как $BM : MN = 2 : 3$, то $MN = 1,5BM = 30$. $BC = BM + MN + CN = 20 + 30 + 20 = 70$.

Ответ: 28 или 70.

1594. Возможны два случая.

1) Биссектрисы при стороне AD пересекаются внутри параллелограмма (см. рис. 538). $\angle DAN = \angle BNA$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AN) $\Rightarrow \triangle ABN$ равнобедренный и $BN = AB = 40$. Аналогично, $MC = CD = 40$. Так как $BM : MN = 3 : 5$, то $MN = \frac{5}{3}BM$;

$BN = BM + MN = \frac{8}{3}BM$; $\frac{8}{3}BM = 40$; $BM = 15$; $MN = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25$;
 $BC = BM + MC = 15 + 40 = 55$.

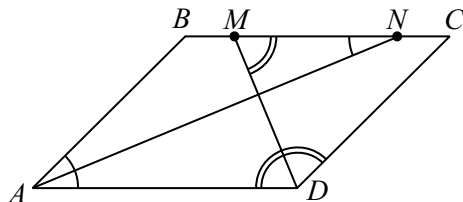


Рис. 538.

2) Биссектрисы при стороне AD не пересекаются внутри параллелограмма (см. рис. 539). Аналогично предыдущему случаю $BM = AB = 40$ и $CN = CD = 40$. Так как $BM : MN = 3 : 5$, то $MN = \frac{5}{3}BM = \frac{200}{3}$.

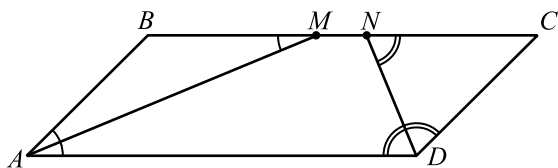


Рис. 539.

$$BC = BM + MN + CN = 40 + \frac{200}{3} + 40 = 146\frac{2}{3}.$$

Ответ: 55; $146\frac{2}{3}$.

1595. Для треугольника ABC выполняется равенство $AC^2 + BC^2 = AB^2$, значит, он прямоугольный с прямым углом C .

Возможны два случая.

1) Точка D лежит вне отрезка BC (см. рис. 540).

Пусть $DB = x$, тогда $CD = 4 + x$. Так как $BC : BD = 3 : 1$, то $(4 + x) : x = 3 : 1$, $4 + x = 3x$, $x = 2$. Итак, $DB = 2$, $CD = 6$.

$$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = 3\sqrt{5}.$$

Так как отрезки касательных, проведенные из одной точки, равны, то $HC = 3 - a$, $DH = DE = DA - AE = 3\sqrt{5} - a$. $DC = CH + DH$, $6 = (3 - a) + (3\sqrt{5} - a)$, $a = \frac{3\sqrt{5} - 3}{2}$.

Аналогично находим $b = \frac{3\sqrt{5} - 3}{2}$ и тогда

$$EF = AD - AE - FD = AD - a - b = 3.$$

2) Точка D лежит внутри CB (см. рис. 541).

Аналогично первому случаю, находим $BD = 1$, $AD = 3\sqrt{2}$,

$$AE = \frac{3\sqrt{2}}{2}, FD = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \text{ и тогда } EF = AD - AE - FD = 2.$$

Ответ: 2; 3.

1596. Возможны два случая.

1) Точка D лежит на отрезке BC (см. рис. 542).

$BC = 5$, $BD : DC = 2 : 3$, значит, $BD = 2$, $DC = 3$.

Пусть $AE = x$, $DF = y$. Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, то $x = AD - ED = AD - (3 - (7 - x)) = AD + 4 - x$,

$$x = \frac{AD}{2} + 2.$$

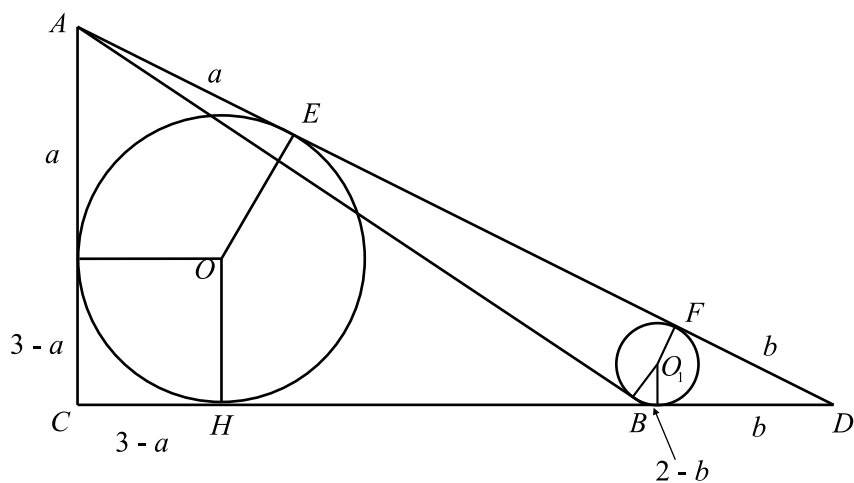


Рис. 540.

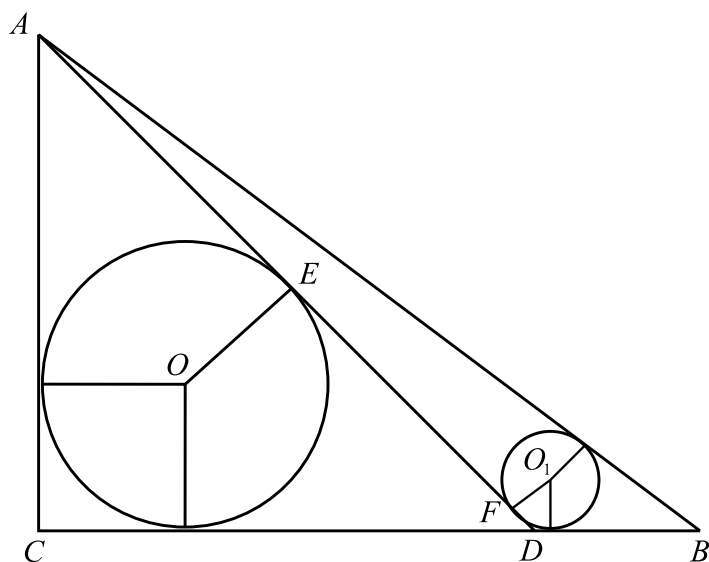


Рис. 541.

Аналогично $y = \frac{AD}{2} - 3$, и тогда $EF = AD - x - y = 1$.

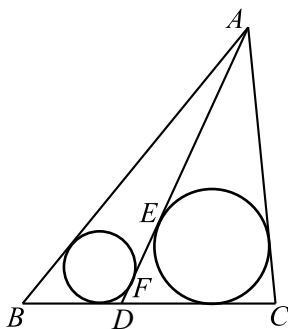


Рис. 542.

2) Точка D лежит на прямой BC , вне отрезка BC (см. рис. 543).

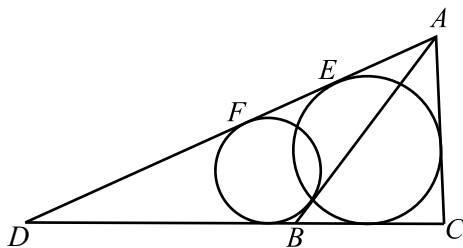


Рис. 543.

Аналогично предыдущему случаю получаем $BD = 10$, $AE = \frac{AD}{2} - 4$,

$$FD = \frac{AD}{2} + 1, \text{ и тогда } EF = AD - AE - FD = 3.$$

Ответ: 1; 3.

1597. Из условия следует, что K, L, M, N — середины соответствующих сторон трапеции. Следовательно, $KLMN$ — параллелограмм, и его площадь равна половине площади трапеции. Возможны два случая:

1) $\angle ABD$ — острый и 2) $\angle ABD$ — тупой. На рис. 544 изображён случай 2).

Обозначим $\alpha = \angle ABD$, $\beta = \angle BAD$.

По теореме синусов для $\triangle ABD$ имеем:

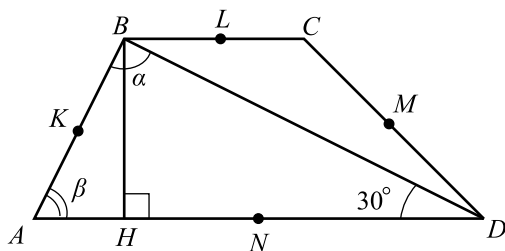


Рис. 544.

$$AD = \frac{AB \cdot \sin \alpha}{\sin 30^\circ} = \frac{6 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = 8.$$

$BH = \frac{1}{2}BD$ как катет, лежащий против угла в 30° в прямоугольном $\triangle BHD$.

$$\sin \beta = \sin \left(\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6}.$$

Так как возможны два случая, то $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

$$\text{Тогда } \sin \beta = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}}{6}.$$

$$\text{Из } \triangle ABH: \sin \beta = \frac{BH}{AB}; BH = AB \cdot \sin \beta = 2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}.$$

$$\text{Итак, } S_{KLMN} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BH =$$

$$= \frac{1}{4} (8 + 6) \cdot (2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}) = \frac{7}{2} (2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}).$$

$$\text{Ответ: } \frac{7}{2} (2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}).$$

1598. Возможны 2 случая: 1) центр описанной окружности находится внутри трапеции (см. рис. 545); 2) центр описанной окружности — вне трапеции (см. рис. 546).

1) $h = OL + OK = 4 + 3 = 7$ — высота трапеции.

$\angle AOD = 2\angle ACD$ как центральный и вписанный угол, опирающиеся на одну дугу.

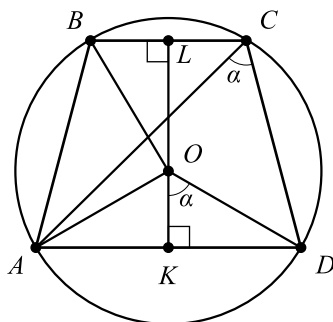


Рис. 545.

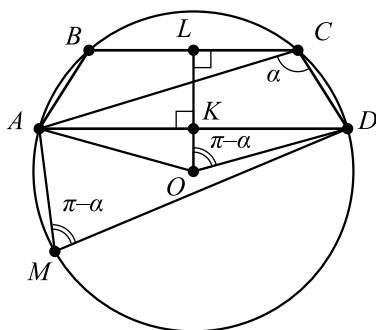


Рис. 546.

$\triangle AOD$ — равнобедренный, OK — высота. Значит, $\angle KOD =$
 $= \frac{1}{2} \angle AOD = \angle ACD$.

$\triangle OKD$ — прямоугольный, $\Rightarrow AD = 2KD = 2OK \cdot \operatorname{tg} \alpha =$
 $= 2OK \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 8$.

В прямоугольном $\triangle BOL$ $OL = 4$, $BO = OD = \sqrt{KD^2 + OK^2} =$
 $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Значит, $BL = \sqrt{OB^2 - OL^2} = 3$, $BC = 2BL = 6$ (OL —
 высота и медиана равнобедренного $\triangle BOC$).

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h = \frac{1}{2}(8 + 6) \cdot 7 = 49.$$

Площадь искомого четырёхугольника $S = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{49}{2} = 24,5$.

2) Высота трапеции $h = OL - OK = 4 - 3 = 1$.

$\angle AMD = \pi - \alpha$, так как $\widehat{ABD} + \widehat{AMD} = 2\pi$.

$$\angle KOD = \frac{1}{2}\angle AOD = \angle AMD = \pi - \alpha.$$

$$\text{Из } \triangle OKD \text{ получим } OD = \frac{OK}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{OK}{-\cos \alpha} = \frac{3}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 5$$

($\cos \alpha < 0$, так как α — тупой угол).

$$AD = 2 \cdot KD = 2 \cdot \sqrt{OD^2 - OK^2} = 8.$$

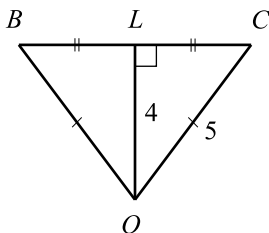


Рис. 547.

Из $\triangle BOC$ (см. рис. 547) $BC = 2LC = 2\sqrt{OC^2 - OL^2} = 6$.

Площадь искомого четырёхугольника

$$S = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(AD + BC)}{2} \cdot h = 3,5.$$

Ответ: 3,5; 24,5.

1599. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $BC < AD$ (см. рис. 548). Согласно условию, одна из диагоналей делится точкой их пересечения в отношении 1 : 2. Не нарушая общности, будем считать, что $OC : AO = 1 : 2$.

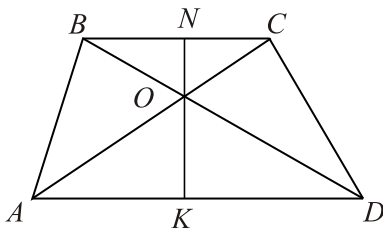


Рис. 548.

$\triangle BOC \sim \triangle AOD$ ($\angle BOC = \angle AOD$ — вертикальные, $\angle BCO = \angle OAD$ — накрест лежащие, $CO : AO = 1 : 2$). Следовательно, $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$, $AD = 2BC$.

Пусть ON — высота $\triangle BOC$, OK — высота $\triangle AOD$. Тогда $\frac{ON}{OK} = \frac{1}{2}$, $OK = 2ON$.

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot NK = \frac{1}{2}(BC + 2BC) \cdot (NO + OK) = \\ &= \frac{3}{2}BC \cdot (NO + 2NO) = \frac{9BC}{2} \cdot NO = 9S_{BOC}. \end{aligned}$$

Согласно условию, $S_{BOC} = 8$, следовательно, $S_{ABCD} = 9 \cdot 8 = 72$.

2. Пусть $BC > AD$ (см. рис. 549).

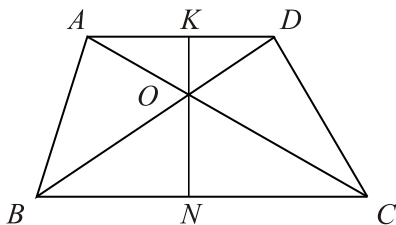


Рис. 549.

Будем считать $OD : OB = 1 : 2$. Проводя рассуждения, аналогичные рассмотренным в пункте 1, получаем $\triangle AOD \sim \triangle COD$; $CB = 2AD$; $ON = 2KO$; следовательно,

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2}(AD + CB) \cdot NK = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}CB + CB\right) \cdot (KO + ON) = \\ &= \frac{3}{4}CB\left(\frac{1}{2}ON + ON\right) = \frac{9}{8}CB \cdot ON = \frac{9}{4} \cdot S_{COB} = \frac{9}{4} \cdot 8 = 18. \end{aligned}$$

Ответ: 18; 72.

1600. 1. Опустим из точки N — середины боковой стороны CD — перпендикуляр NK к прямой, проходящей через сторону AB (см. рис. 550).

Из условия следует, что $NK = 5$.

2. Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$, BH — её высота, $F = MN \cap BH$.

В треугольнике BNM сторона $BM = \frac{1}{2}AB = 3,5$.

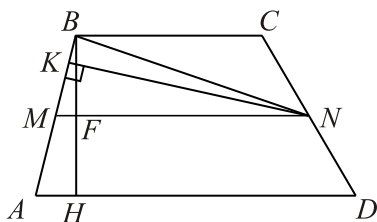


Рис. 550.

$$S_{BNM} = \frac{1}{2} BM \cdot NK = \frac{1}{2} MN \cdot BF. \text{ Следовательно,}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 5 = \frac{1}{2} MN \cdot BF; \quad MN \cdot BF = 17,5.$$

$$3. S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC) \cdot BH = MN \cdot BH = MN \cdot 2BF = 2 \cdot 17,5 = 35.$$

Ответ: 35.

1601. Пусть A — центр окружности радиуса 4, B — центр окружности радиуса 8, K и M — соответственно точки касания общей касательной KM с этими окружностями. Возможны 2 случая.

1) Отрезки KM и AB не пересекаются (см. рис. 551).

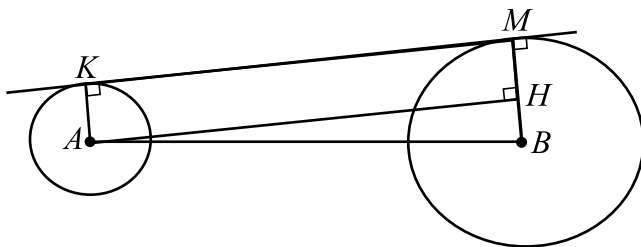


Рис. 551.

Опустим из точки A перпендикуляр AH на BM . Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $AK \perp KM$ и $BM \perp KM \Rightarrow AKMH$ — прямоугольник, то есть $AH = KM = 5$, $MH = AK = 4$.

Из $\triangle ABH$ по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{AH^2 + (BM - MH)^2} = \sqrt{5^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{41}.$$

2) Отрезки KM и AB пересекаются, $KM \cap AB = T$ (см. рис. 552).

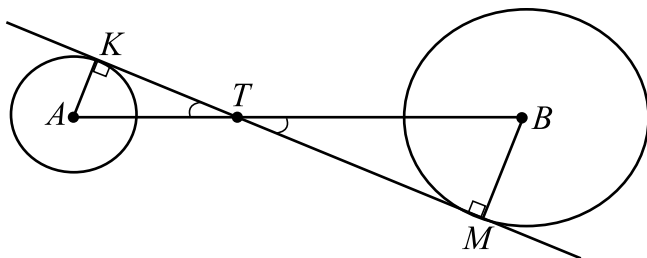


Рис. 552.

$\triangle AKT \sim \triangle BMT$ (по первому признаку: $\angle AKT = \angle BMT = 90^\circ$, $\angle ATK = \angle BTM$ как вертикальные).

$$\frac{AT}{BT} = \frac{KT}{TM} = \frac{AK}{BM} = \frac{4}{8};$$

$$AB = 3AT, \quad KT = \frac{KM}{3} = \frac{5}{3}.$$

Из $\triangle AKT$ по теореме Пифагора:

$$AT^2 = AK^2 + KT^2, \quad AB = 3\sqrt{AK^2 + KT^2} = 3\sqrt{4^2 + \frac{25}{9}} = \sqrt{169} = 13.$$

Ответ: $\sqrt{41}$, 13.

1602. Пусть A — центр окружности радиуса 1, B — центр окружности радиуса 7, K и M — соответственно точки касания общей касательной KM с этими окружностями. Тогда $AK \perp KM$ и $BM \perp KM$ как радиусы окружностей, проведённые в точку касания. Возможны 2 случая.

1) Отрезки KM и AB не пересекаются (см. рис. 553).

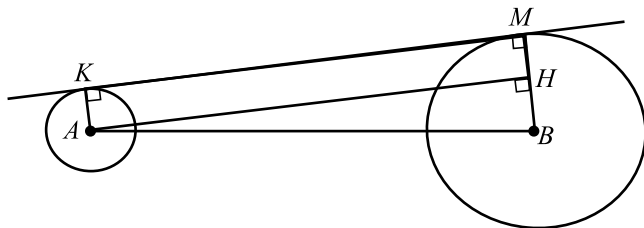


Рис. 553.

Опустим из точки A перпендикуляр AH на BM . $AKMH$ — прямоугольник, поэтому $AH = KM$, $MH = AK = 1$.

Из $\triangle AHB$ находим

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8; KM = 8.$$

2) Отрезки KM и AB пересекаются, $KM \cap AB = T$ (см. рис. 554).

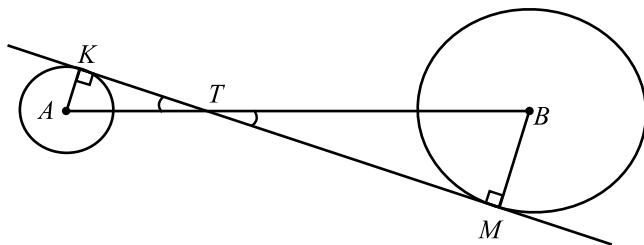


Рис. 554.

$\triangle AKT \sim \triangle BMT$ (по первому признаку: $\angle AKT = \angle BMT = 90^\circ$, $\angle ATK = \angle BTM$ как вертикальные).

$$\frac{AT}{BT} = \frac{KT}{TM} = \frac{AK}{BM} = \frac{1}{7};$$

$$KM = 8KT, AT = \frac{AB}{8} = \frac{5}{4}.$$

Из $\triangle AKT$ находим

$$KT^2 = AT^2 - AK^2, KM = 8\sqrt{\frac{25}{16} - 1} = 8\sqrt{\frac{9}{16}} = 6.$$

Ответ: 6; 8.

1603. Пусть сторона правильного треугольника ABC равна a . Возможны два случая расположения окружностей.

1. Окружности касаются внешним образом (рис. 555).

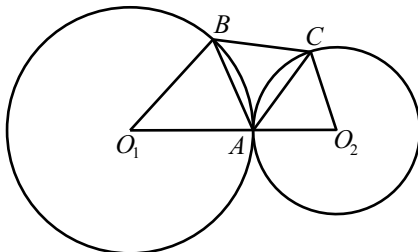


Рис. 555.

Обозначим $\angle O_1AB = \alpha$, $0 < \alpha < 90^\circ$, тогда $\angle O_2AC = 120^\circ - \alpha$. Из равнобедренного треугольника O_1AB по теореме синусов имеем:

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{R}{\sin \alpha}, a = 2R \cos \alpha, a = 10 \cos \alpha, \cos \alpha = \frac{a}{10}.$$

Аналогично, из треугольника O_2AC следует $a = 2r \cos(120^\circ - \alpha)$.

$$\text{Имеем: } a = 2r \left(-\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) =$$

$$= 2r \left(-\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \right) = r(-\cos \alpha + \sqrt{3} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}).$$

$$a = -\frac{3a}{10} + 3\sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{a^2}{100}}, 13a = 3\sqrt{3} \sqrt{100 - a^2}, 169a^2 = 27(100 - a^2),$$

$$a > 0, a = \frac{15\sqrt{3}}{7}.$$

2. Окружности касаются внутренним образом (рис.556).

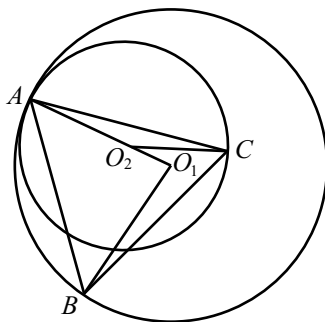


Рис. 556.

Обозначим $\angle O_1AB = \alpha$, тогда $\angle O_2AC = 60^\circ - \alpha$. Аналогично первому случаю, из равнобедренных треугольников O_1AB и O_2AC соответственно получаем $\cos \alpha = \frac{a}{10}$, $a = 3(\cos \alpha + \sqrt{3} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha})$,

$$a = \frac{3a}{10} + 3\sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{a^2}{100}}, 7a = 3\sqrt{3} \sqrt{100 - a^2}, 49a^2 = 27(100 - a^2), a > 0,$$

$$a = \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{15\sqrt{3}}{7}; \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

1604. Учитывая длину радиусов и расстояние между центрами окружности, делаем вывод: окружности имеют две общие точки. Возможны два

случая расположения прямой AC и отрезка O_1O_2 .

1. Прямая AC и отрезок O_1O_2 не имеют общих точек (рис. 557).

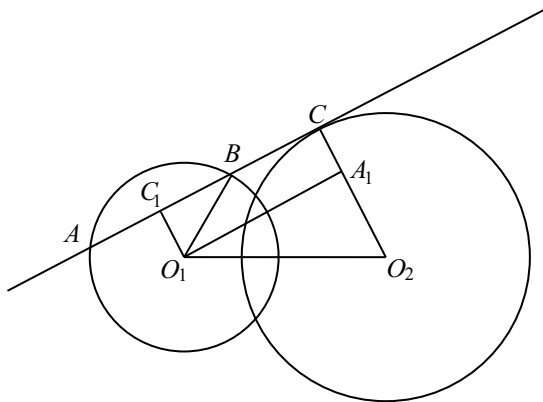


Рис. 557.

По свойству касательной $AC \perp O_2C$.

Проведем $O_1C_1 \parallel O_2C$, $O_1A_1 \parallel C_1C$, тогда $O_1C_1CA_1$ — прямоугольник. O_1C_1 — высота в $\triangle AO_1B$, значит, $AC_1 = C_1B$.

Обозначим $AC_1 = C_1B = x$, $O_1C_1 = y$. По условию $AB = 2BC$, значит, $BC_1 = BC = x$. Из $\triangle O_1C_1B$ имеем $x^2 + y^2 = 25^2$, из $\triangle O_1A_1O_2$ имеем $(2x)^2 + (30 - y)^2 = 50^2$,
 $4(25^2 - y^2) + (30 - y)^2 = 2500$, $y^2 + 20y - 300 = 0$, $y > 0$, $y = 10$,
 $x = \sqrt{25^2 - 10^2} = 5\sqrt{21}$, $AB = 2x = 10\sqrt{21}$.

2. Прямая AC пересекает отрезок O_1O_2 .

В этом случае $C \in O_1O_2$ и $AC \perp O_1O_2$. Из $\triangle ACO_1$
 $AC = \sqrt{O_1A^2 - O_1C^2} = \sqrt{25^2 - (50 - 30)^2} = 15$. $AB = 2AC = 30$.

Ответ: $10\sqrt{21}$ или 30.

1605. Из $\triangle ABH$ по теореме Пифагора:
 $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 925 - 900 = 25$ (см. рис. 559). $AH = 5$. Из $\triangle CBH$ по теореме Пифагора:

$CH^2 = BC^2 - BH^2 = 1000 - 900 = 100$; $CH = 10$. $AC = AH + HC = 15$.

Возможны два случая расположения точки D .

1) D лежит на отрезке AC (см. рис. 560). Так как $AD : DC = 3 : 2$, то
 $AD = \frac{3}{5} AC = 9$; $DC = \frac{2}{5} AC = 6$.

$DH = AD - AH = 9 - 5 = 4$.

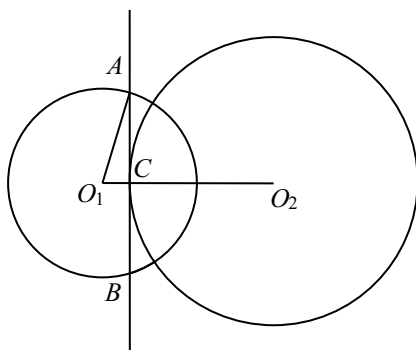


Рис. 558.

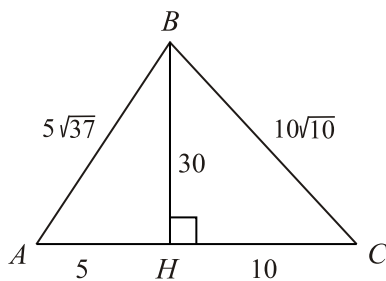


Рис. 559.

Из $\triangle BDH$ по теореме Пифагора: $BD^2 = BH^2 + DH^2 = 900 + 16 = 916$.

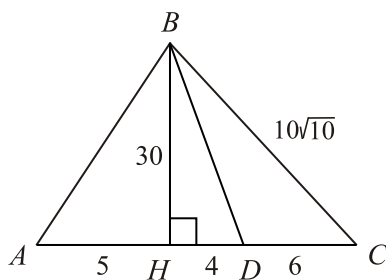


Рис. 560.

$$BD = 2\sqrt{229}.$$

$$\text{Из } \triangle CBH: \sin \angle C = \frac{BH}{BC} = \frac{30}{10\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

По теореме синусов искомый радиус R выражается из $\triangle BCD$:

$$2R = \frac{BD}{\sin \angle C}; R = \frac{2\sqrt{229} \cdot \sqrt{10}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{2290}}{3}.$$

2) D лежит вне отрезка AC (см. рис. 561). Так как $AD > DC$, то D лежит на прямой AC за точкой C ; $AD = AC + CD = \frac{3}{2}CD$. Отсюда $CD = 2AC = 30$.

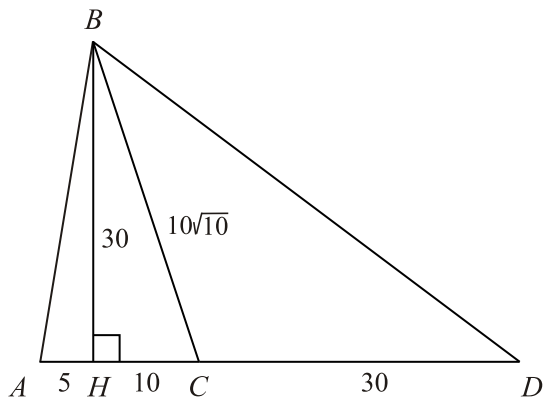


Рис. 561.

$$DH = HC + CD = 40.$$

Из $\triangle BDH$ по теореме Пифагора: $BD^2 = BH^2 + DH^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2$.
 $BD = 50$.

$$\text{Из } \triangle BDH: \sin \angle D = \frac{BH}{BD} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}.$$

Из $\triangle BCD$ по теореме синусов выражаем искомый радиус:

$$2R = \frac{BC}{\sin \angle D}; R = \frac{10\sqrt{10} \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{25\sqrt{10}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{25\sqrt{10}}{3} \text{ или } \frac{\sqrt{2290}}{3}.$$

1606. Из $\triangle ABH$ по теореме Пифагора:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 109 - 100 = 9; AH = 3.$$

Из $\triangle CBH$ по теореме Пифагора: $CH^2 = BC^2 - BH^2 = 101 - 100 = 1$;
 $CH = 1$. $AC = AH + HC = 4$ (см. рис. 562).

Возможны два случая расположения точки D .

1) D лежит на отрезке AC (см. рис. 563). Так как $AD : DC = 4 : 3$, то

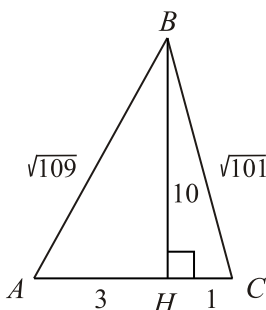


Рис. 562.

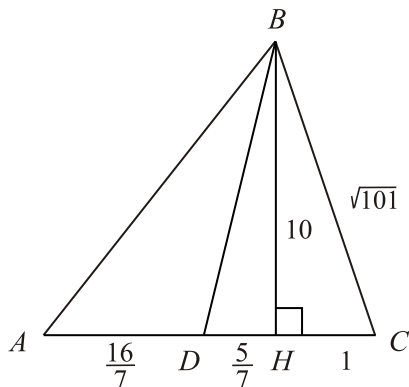


Рис. 563.

$$AD = \frac{4}{7} AC = \frac{16}{7}; DC = \frac{3}{7} AC = \frac{12}{7}. DH = DC - HC = \frac{5}{7}.$$

Из $\triangle BDH$ по теореме Пифагора:

$$BD^2 = BH^2 + DH^2 = 100 + \frac{25}{49} = 25\left(4 + \frac{1}{49}\right) = 25 \cdot \frac{197}{49}. BD = \frac{5\sqrt{197}}{7}.$$

$$\text{Из } \triangle CBH: \sin \angle C = \frac{BH}{BC} = \frac{10}{\sqrt{101}}.$$

По теореме синусов искомый радиус R выражается из $\triangle BCD$:

$$2R = \frac{BD}{\sin \angle C}; R = \frac{5\sqrt{197}}{7 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{101}}{10} = \frac{\sqrt{19897}}{28}.$$

2) D лежит вне отрезка AC (см. рис. 564). Так как $AD > DC$, то D лежит на прямой AC за точкой C ; $AD = AC + CD = \frac{4}{3}CD$. Отсюда

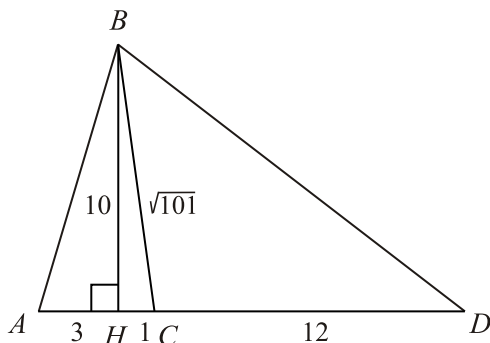


Рис. 564.

$CD = 3AC = 12$. $DH = HC + CD = 13$. Из $\triangle BDH$ по теореме Пифагора: $BD^2 = BH^2 + DH^2 = 10^2 + 13^2 = 269$. $BD = \sqrt{269}$.

$$\text{Из } \triangle BDH: \sin \angle D = \frac{BH}{BD} = \frac{10}{\sqrt{269}}.$$

Из $\triangle BCD$ по теореме синусов выражаем искомый радиус:

$$2R = \frac{BC}{\sin \angle D}; R = \frac{\sqrt{101} \cdot \sqrt{269}}{2 \cdot 10} = \frac{\sqrt{27169}}{20}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{19897}}{28} \text{ или } \frac{\sqrt{27169}}{20}.$$

1607. Пусть x — радиус окружности, в которую вписан равносторонний треугольник. Могут представиться два случая расположения окружности.

1. Проведем $O_2F \parallel AB$ и $DE \parallel AB$ (см. рис. 565), ABO_2F и $ABED$ — прямоугольники. Из прямоугольного треугольника O_2FO_1 находим

$$O_2F = \sqrt{O_1O_2^2 - (O_1A - O_2B)^2} = \sqrt{45^2 - 27^2} = 36,$$

$$AB = O_2F = 36.$$

Из прямоугольных треугольников O_1DO_3 и O_2EO_3 имеем:

$$DO_3 = \sqrt{(36+x)^2 - (36-x)^2} = 12\sqrt{x},$$

$$EO_3 = \sqrt{(9+x)^2 - (9-x)^2} = 6\sqrt{x}.$$

$$DE = DO_3 + EO_3 = 18\sqrt{x}, DE = AB = 36, 18\sqrt{x} = 36, x = 4.$$

Сторона правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$, а площадь

$$S = \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$$

2. Проведем $O_1F \parallel BC$ и $DE \parallel BC$ (см. рис. 566), тогда CBO_1F и

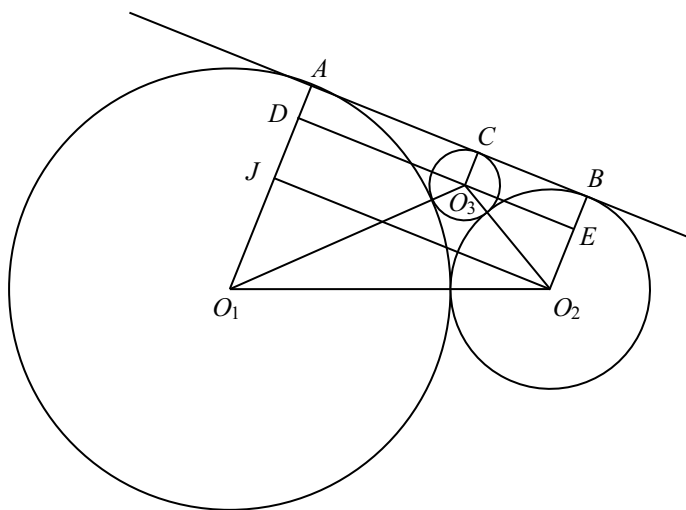


Рис. 565.

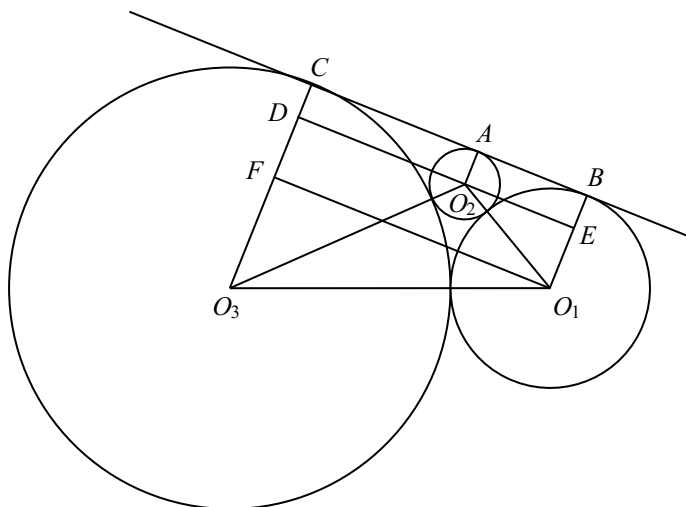


Рис. 566.

$CBED$ — прямоугольники. Из прямоугольных треугольников O_1FO_3 и O_2DO_3 имеем:

$$O_1F = \sqrt{O_3O_1^2 - O_3F^2} = \sqrt{(x+36)^2 - (x-36)^2} = 12\sqrt{x},$$

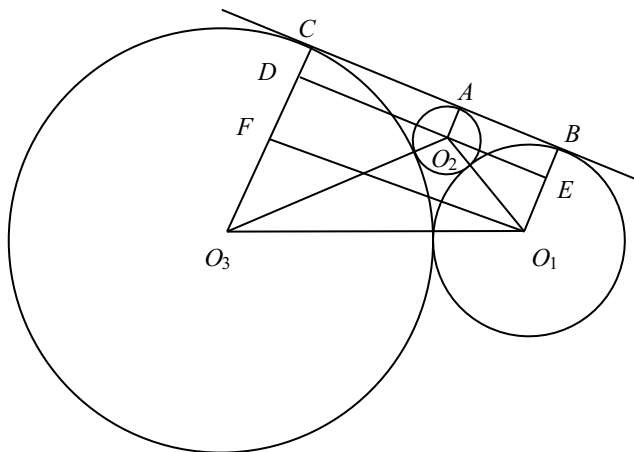


Рис. 568.

O_2DO_3 и O_1O_2E имеем:

$$O_1F = \sqrt{(x+144)^2 - (x-144)^2} = 24\sqrt{x},$$

$$O_2D = \sqrt{(x+16)^2 - (x-16)^2} = 8\sqrt{x}, EO_2 = \sqrt{160^2 - 128^2} = 96;$$

$$DE = DO_2 + EO_2 = 8\sqrt{x} + 96; 8\sqrt{x} + 96 = 24\sqrt{x}; 16\sqrt{x} = 96, x = 36.$$

Сторона правильного треугольника равна $36\sqrt{3}$, а площадь

$$S = \frac{(36\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 972\sqrt{3}.$$

Ответ: $60,75\sqrt{3}$ или $972\sqrt{3}$.

1609. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A , осями Ox и Oy , проходящими через точки B и D соответственно (см. рис. 569). Тогда $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(2; 1)$, $D(0; 1)$.

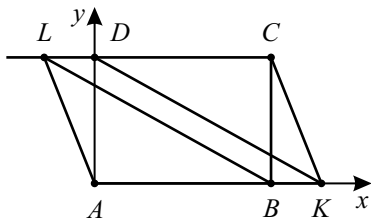


Рис. 569.

Пусть $K(x; 0)$. Тогда $\overrightarrow{KA} = (-x; 0)$, $\overrightarrow{KD} = (-x; 1)$, $\overrightarrow{KC} = (2-x; 1)$. По условию $\angle AKD = \angle CKD$, что равносильно равенству

$\cos \angle AKD = \cos \angle CKD$. Выражая косинусы через скалярные произведения, получаем:

$$\frac{x^2}{|x| \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-x(2-x) + 1}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{(2-x)^2 + 1}},$$

$$|x| = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}},$$

$$|x|\sqrt{x^2 - 4x + 5} = x^2 - 2x + 1.$$

Учитывая, что $|x| \geq 0$ и $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, получаем

$$x^2(x^2 - 4x + 5) = x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^3 + 2x^2 - 4x,$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Получили: $AK = 2 \pm \sqrt{3}$. Аналогично $CL = 2 \pm \sqrt{3}$.

При $AK = CL$ имеем: $AKCL$ — параллелограмм,
 $S_{AKCL} = AK \cdot AD = 2 \pm \sqrt{3}$.

При $AK \neq CL$ имеем: $AKCL$ — трапеция,
 $S_{AKCL} = \frac{1}{2}(AK + CL) \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot (2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}) = 2$.

Ответ: $2 - \sqrt{3}$; 2; $2 + \sqrt{3}$.

1610. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A , $K \in Ox$, $D \in Oy$ (см. рис. 570).

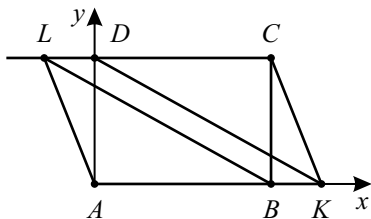


Рис. 570.

Пусть длина $BC = AD = k$. Тогда длина $AB = 3k$ и $A(0; 0)$, $B(3k; 0)$, $C(3k; k)$, $D(0; k)$.

Пусть $K(x; 0)$. Тогда $\overrightarrow{KA}(-x; 0)$; $\overrightarrow{KD}(-x; k)$; $\overrightarrow{KC}(3k - x; k)$.

По условию $\angle AKD = \angle CKD$, что равносильно равенству $\cos \angle AKD = \cos \angle CKD$. Выражая косинусы углов через скалярные произведения, получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{|x| \cdot \sqrt{x^2 + k^2}} &= \frac{-x(3k - x) + k^2}{\sqrt{x^2 + k^2} \cdot \sqrt{(3k - x)^2 + k^2}}, \\
|x| &= \frac{x^2 - 3kx + k^2}{\sqrt{x^2 - 6kx + 9k^2 + k^2}}, \\
|x|\sqrt{x^2 - 6kx + 10k^2} &= x^2 - 3kx + k^2, \\
x^2(x^2 - 6kx + 10k^2) &= x^4 + 9k^2x^2 + k^4 - 6kx^3 + 2k^2x^2 - 6k^3x, \\
k^2x^2 - 6k^3x + k^4 &= 0, \\
\left(\frac{x}{k}\right)^2 - 6\frac{x}{k} + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Замена $\frac{x}{k} = t$. $t^2 - 6t + 1 = 0$, отсюда $t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$,

$$x_{1,2} = (3 \pm 2\sqrt{2})k.$$

Получили $AK = (3 \pm 2\sqrt{2})k$. Аналогично $CL = (3 \pm 2\sqrt{2})k$.

При $AK = CL$ имеем: $AKCL$ — параллелограмм,

$$S_{AKCL} = AK \cdot AD = (3 \pm 2\sqrt{2})k^2 = 3 \text{ (по условию).}$$

$$(3 + 2\sqrt{2})k^2 = 3, \quad (3 - 2\sqrt{2})k^2 = 3,$$

$$k^2 = \frac{3}{3 + 2\sqrt{2}}, \quad k^2 = \frac{3}{3 - 2\sqrt{2}},$$

$$k^2 = \frac{3(3 - 2\sqrt{2})}{9 - 8}, \quad k^2 = \frac{3(3 + 2\sqrt{2})}{9 - 8},$$

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\sqrt{9 - 6\sqrt{2}}}{\sqrt{6 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + 3}} = \frac{\sqrt{9 + 6\sqrt{2}}}{\sqrt{6 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + 3}} = \\
&= \sqrt{6} - \sqrt{3}. \quad = \sqrt{6} + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

При $AK \neq CL$ имеем: $AKCL$ — трапеция,

$$S_{AKCL} = \frac{1}{2}(AK + CL) \cdot AD = \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2})k^2 = 3,$$

$$3k^2 = 3, \quad k^2 = 1, \quad k = 1.$$

Ответ: $\sqrt{6} - \sqrt{3}$; 1; $\sqrt{6} + \sqrt{3}$.

1611. Возможны два случая (см. рис. 571).

1. Центр описанной окружности точка O лежит внутри трапеции.

Пусть MN — высота трапеции $ABCD$, проходящая через середины оснований. Тогда, используя теорему Пифагора для соответствующих треугольников, получим:

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2};$$

$$OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2};$$

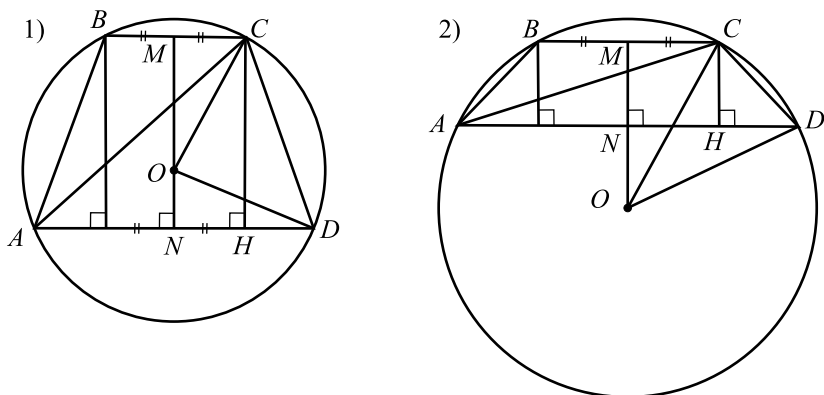


Рис. 571.

$$ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1.$$

Так как $CH = MN = OM + ON = \frac{\sqrt{11}}{2} + 1$, то

$$AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{16 + \sqrt{11}}.$$

2. Центр описанной окружности точка O лежит вне трапеции.

В данном случае рассуждения аналогичны п. 1 за исключением того, что $CH = MN = OM - ON = \frac{\sqrt{11}}{2} - 1$. Тогда $AC = \sqrt{16 - \sqrt{11}}$.

Ответ: $\sqrt{16 \pm \sqrt{11}}$.

1612. Возможны два случая (см. рис. 572).

1. Центр описанной окружности точка O лежит внутри трапеции.

Пусть MN — высота трапеции $ABCD$, проходящая через середины оснований. Тогда, используя теорему Пифагора для соответствующих треугольников, получим:

$$CD = \sqrt{DH^2 + CH^2};$$

$$OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2};$$

$$ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1.$$

Так как $CH = MN = OM + ON = \frac{\sqrt{19}}{2} + 1$, то

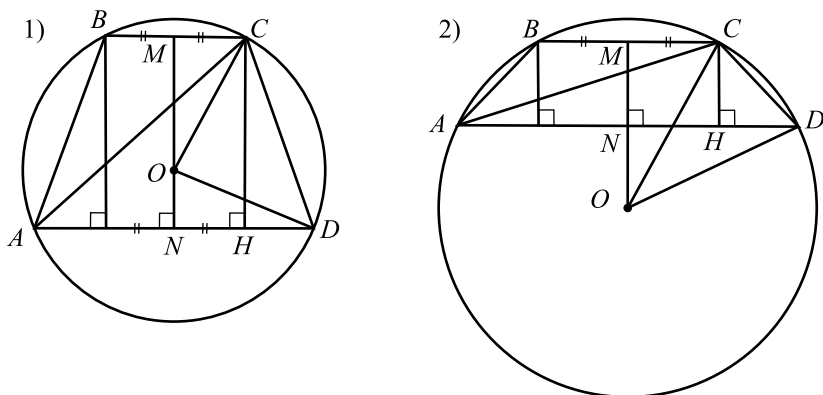


Рис. 572.

$$CD = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{19}}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{8 + \sqrt{19}}.$$

2. Центр описанной окружности точка O лежит вне трапеции.

В данном случае рассуждения аналогичны п. 1 за исключением того, что $CH = MN = OM - ON = \frac{\sqrt{19}}{2} - 1$. Тогда $CD = \sqrt{8 - \sqrt{19}}$.

Ответ: $\sqrt{8 \pm \sqrt{19}}$.

1613. Пусть $BE = EC$ и $AH = HD$ (см. рис. 573).

$\triangle HPL \sim \triangle HCB$, так как $\frac{HL}{HB} = \frac{HP}{HC} = \frac{1}{3}$ (L и P — точки пересечения медиан) и $\angle BHC$ — общий. Следовательно, $LP \parallel BC$. Аналогично доказывается, что $KF \parallel AD$. Значит, $LPFK$ — трапеция.

Пусть E_1H_1 — высота трапеции $ABCD$, проходящая через точку O .
 $\triangle EKF \sim \triangle EAD \Rightarrow \frac{KF}{AD} = \frac{KE}{AE} = \frac{1}{3}$ (K — точка пересечения медиан)
 $\Rightarrow KF = \frac{1}{3}AD = \frac{4}{3}$. Аналогично $LP = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}$.

$$\triangle KOF \sim \triangle LOP \Rightarrow \frac{E_2O}{OH_2} = \frac{KF}{LP} = 4.$$

Пусть $OH_2 = x$, тогда $E_2O = 4x$. Пусть $H_1H_2 = z$, тогда $E_1H_2 = 2z$, $E_1E_2 = y$ и $E_2H_1 = 2y$ (H_1H_2 — высота $\triangle LHP$, E_1H_1 — высота $\triangle BHC$ и $\triangle LHP \sim \triangle BHC$; для E_1E_2 и E_2H_1 аналогично).

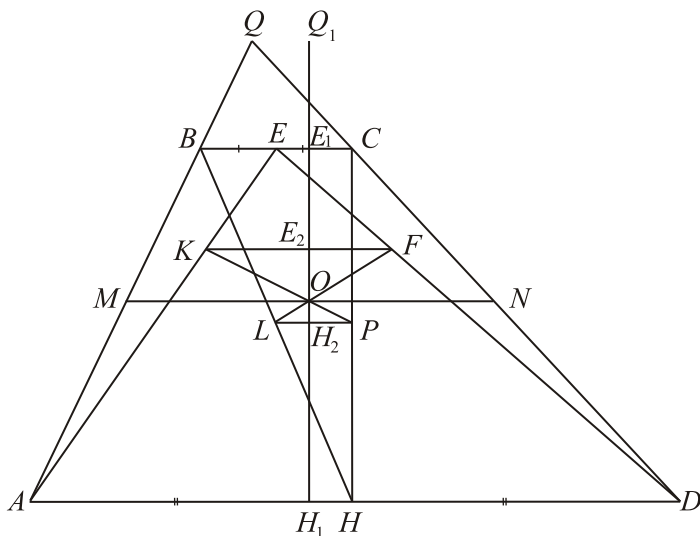


Рис. 573.

Получим систему уравнений
$$\begin{cases} 2z = y + 5x, \\ 2y = z + 5x, \\ 3z = 3y. \end{cases}$$

Отсюда $y = z = 5x$. Итак, $E_1O = E_1E_2 + E_2O = y + 4x = 9x$;
 $OH_1 = OH_2 + H_1H_2 = x + z = 6x$.

Пусть Q_1E_1 — высота $\triangle QBC$.

$$\triangle QBC \sim \triangle QAD \Rightarrow \frac{Q_1H_1}{Q_1E_1} = \frac{Q_1E_1 + E_1H_1}{Q_1E_1} = 1 + \frac{E_1H_1}{Q_1E_1} = \frac{AD}{BC} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{E_1H_1}{Q_1E_1} = 3 \Rightarrow Q_1E_1 = \frac{1}{3}E_1H_1 = \frac{1}{3}(E_1O + OH_1) = \frac{1}{3}(9x + 6x) = 5x.$$

$$\triangle QMN \sim \triangle QAD \Rightarrow \frac{MN}{AD} = \frac{Q_1O}{Q_1H_1} = \frac{5x + 9x}{5x + 9x + 6x} = \frac{7}{10} \Rightarrow$$

$$MN = \frac{7}{10}AD = \frac{7}{10} \cdot 4 = 2,8.$$

Ответ: 2,8.

1614. Пусть $BE = EC$ и $AH = HD$ (см. рис. 574).

$\triangle HPL \sim \triangle HCB$, так как $\frac{HL}{HB} = \frac{HP}{HC} = \frac{1}{3}$ (L и P — точки пересечения медиан) и $\angle BHC$ — общий. Следовательно, $LP \parallel BC$. Аналогично

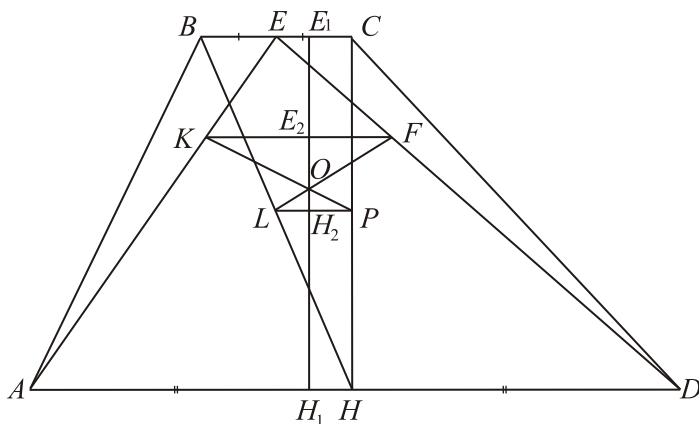


Рис. 574.

доказывается, что $KF \parallel AD$. Значит, $LPFK$ — трапеция.

Пусть E_1H_1 — высота трапеции $ABCD$, проходящая через точку O .
 $\triangle EKF \sim \triangle EAD \Rightarrow \frac{KF}{AD} = \frac{KE}{AE} = \frac{1}{3}$ (K — точка пересечения медиан)
 $\Rightarrow KF = \frac{1}{3}AD = \frac{5}{3}$. Аналогично $LP = \frac{1}{3}BC = \frac{2}{3}$.

$$\triangle KOF \sim \triangle LOP \Rightarrow \frac{E_2O}{OH_2} = \frac{KF}{LP} = \frac{5}{2}.$$

Пусть $OH_2 = 2x$, $E_2O = 5x$; $H_1H_2 = z$, $E_1H_2 = 2z$; $E_1E_2 = y$,
 $E_2H_1 = 2y$ (H_1H_2 — высота $\triangle LHP$, E_1H_1 — высота $\triangle BHC$
и $\triangle LHP \sim \triangle BHC$; для E_1E_2 и E_2H_1 аналогично).

Получим систему уравнений
$$\begin{cases} 2z = y + 7x, \\ 2y = z + 7x, \\ 3z = 3y. \end{cases}$$

Отсюда $y = z = 7x$. Итак, $E_1O = E_1E_2 + E_2O = y + 5x = 12x$;
 $OH_1 = OH_2 + H_1H_2 = 2x + z = 9x$.

Тогда
$$\frac{E_1O}{OH_1} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: 4 : 3.

1615. Продолжим BC за точку C до пересечения с прямой AK (см. рис. 575). $\angle FAD = \angle AFB = \angle BAF$, тогда $AB = BF = 4$. $\triangle BFK$ подобен $\triangle AKD$ по трём углам с коэффициентом подобия

$$k = \frac{AD}{BF} = \frac{12}{4} = 3. \text{ Значит } \frac{AK}{KF} = 3; KF = 1,6; AF = 6,4.$$

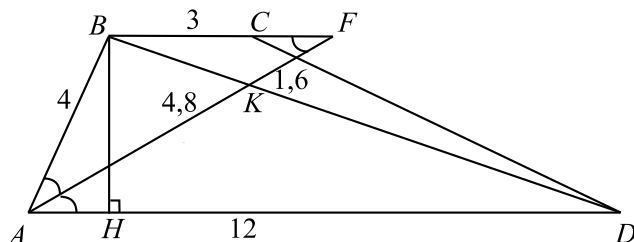


Рис. 575.

В $\triangle ABF$ найдём $\cos \angle ABF$ по теореме косинусов.

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2 \cos \angle ABF \cdot AB \cdot BF;$$

$$40,96 = 16 + 16 - 32 \cos \angle ABF; \cos \angle ABF = -0,28.$$

Тогда $\cos \angle BAD = -\cos \angle ABF = 0,28$; $\sin \angle BAD = 0,96$, откуда $BH = AB \cdot \sin \angle BAD = 4 \cdot 0,96 = 3,84$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = \frac{3 + 12}{2} \cdot 3,84 = 28,8.$$

Ответ: 28,8.

1616. Проведём высоту BH (см. рис. 576).

В прямоугольном $\triangle ABH$ BH лежит против угла в 30° , значит

$$BH = \frac{1}{2} AB = 1,5\sqrt{3}. \quad AD = \frac{S_{ABCD}}{BH} = \frac{9\sqrt{3}}{1,5\sqrt{3}} = 6.$$

$$\text{В } \triangle ACD \quad \angle ADC = 150^\circ, \quad \cos \angle ADC = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По теореме косинусов имеем:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2 \cos \angle ADC \cdot AD \cdot CD = \\ &= 36 + 27 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 63 + 54 = 117; \quad AC = \sqrt{117}. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{117}$.

1617. По условию в $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 15$, тогда $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$.

$OE \perp AB$, $OK \perp MN$ по свойству касательной к окружности, $MN \perp AB$ по условию, $OK = OE$, следовательно, $KOEN$ — квадрат.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot r, \text{ где } r \text{ — радиус окружности, вписанной в } \triangle ABC.$$

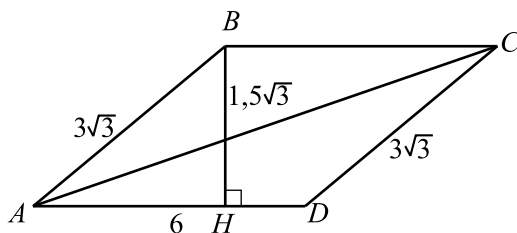


Рис. 576.

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC}{AC + BC + AB} = \frac{8 \cdot 15}{40} = 3.$$

Рассмотрим два случая.

1. Прямая MN , перпендикулярная гипотенузе AB , пересекает катет BC (см. рис. 577).

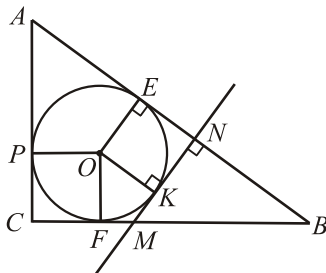


Рис. 577.

$BE = BF$ по свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки. $BF = BC - CF$, $CF = r = 3$, $BE = BF = 15 - 3 = 12$, тогда $BN = BE - EN$, $EN = r = 3$, $BN = 12 - 3 = 9$.

$\triangle BNM \sim \triangle BCA$ ($\angle N = \angle C = 90^\circ$, $\angle B$ — общий).

Из подобия следует

$$\frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}, MN = \frac{BN \cdot AC}{BC} = \frac{9 \cdot 8}{15} = 4,8.$$

$$\begin{aligned} S_{ACMN} &= S_{ABC} - S_{MNB} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC - \frac{1}{2} \cdot MN \cdot BN = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 - \frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 9 = 60 - 21,6 = 38,4. \end{aligned}$$

2. Прямая MN , перпендикулярная гипотенузе AB , пересекает катет AC (см. рис. 578).

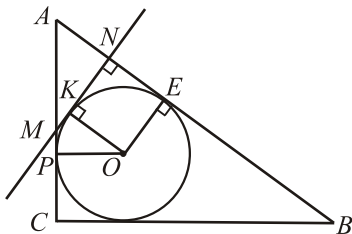


Рис. 578.

$AP = AE = AC - PC = 8 - 3 = 5$, $AN = AE - EN = 5 - 3 = 2$.
 $\triangle ANM \sim \triangle ACB$ ($\angle N = \angle C = 90^\circ$, $\angle A$ — общий).

Из подобия следует

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}, MN = \frac{AN \cdot BC}{AC} = \frac{2 \cdot 15}{8} = 3,75.$$

$$S_{CMNB} = S_{ABC} - S_{AMN} = 60 - \frac{1}{2} \cdot AN \cdot MN = 60 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3,75 = 56,25.$$

Ответ: 38,4; 56,25.

1618. Рассмотрим трапецию $ABCD$ (см. рис. 579). Пусть r — радиус вписанной в трапецию окружности, $AB = CD = b$; $BC = a$; $AD = c$, тогда $a + c = 2b$; $a + c + 2b = 40$, откуда $2b = a + c = 20$; $b = 10$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + c) \cdot BL = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 = 80 \quad (BL = 2r = 2 \cdot 4 = 8).$$

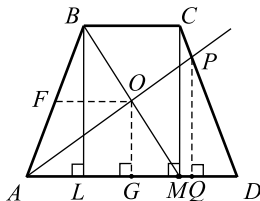


Рис. 579.

По теореме Пифагора $AL^2 = BA^2 - BL^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow AL = 6$.
 $BC + AD = 2 \cdot BC + 2 \cdot AL = 2a + 12 = 20$; $a = 4$; $c = 16$.

1) Пусть AP — отрезок данной прямой, $P \in CD$, а PQ — перпендикуляр к AD , тогда

$$\frac{AQ}{PQ} = \frac{AG}{OG} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow AQ = 2PQ;$$

$$\frac{DQ}{PQ} = \frac{DM}{CM} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow DQ = \frac{3}{4}PQ;$$

$$AQ + DQ = \frac{11}{4}PQ = 16 \Rightarrow PQ = \frac{64}{11}.$$

$$S_{APD} = \frac{1}{2} \left(16 \cdot \frac{64}{11} \right) = \frac{512}{11}; \quad \frac{S_{AFD}}{S_{ABCD}} = \frac{32}{55}.$$

2) Пусть BM — отрезок данной прямой (точка $M \in AD$ совпадает с проекцией точки C на AD , так как FO — средняя линия $\triangle ABM$ и $AM = \frac{a+c}{2}$, а $MD = \frac{c-a}{2}$). Тогда искомое отношение $\frac{S_{BAM}}{S_{ABCD}}$, где

$$S_{BAM} = \frac{1}{2}AM \cdot BL = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 = 40 \Rightarrow \frac{S_{BAM}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}; \frac{32}{55}$.

1619. Случай 1. Пусть $BC < AD$ (см. рис. 580).

1) Пусть $O = BD \cap AC$. По условию $\angle BDC = \angle BAC$ и $\angle COD = \angle BOA = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABO \sim \triangle COD$.

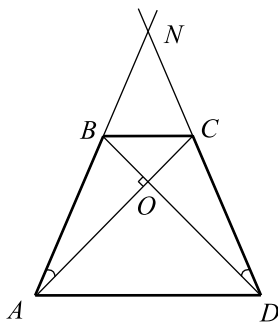


Рис. 580.

2) Пусть h — высота трапеции $ABCD$, тогда, $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot h = S_{BCD}$. Так как $S_{ABC} = S_{BCO} + S_{BOA}$ и $S_{BCD} = S_{BCO} + S_{COD}$, то $S_{BOA} = S_{COD} \Rightarrow \triangle ABO \sim \triangle COD \Rightarrow ABCD$ — равнобокая трапеция и $AC = BD = d$.

$$3) S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle BOC = \frac{1}{2} d^2 \sin 90^\circ = \frac{d^2}{2}.$$

По условию $S_{ABCD} = 20 \Rightarrow d = 2\sqrt{10}$.

$$4) \text{ В четырёхугольнике } BNCO \angle BOC = 90^\circ, \angle BNC = 30^\circ, \\ \angle NBO = \angle NCO \Rightarrow \angle NBO = \frac{360^\circ - (30^\circ + 90^\circ)}{2} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ. \text{ Из}$$

треугольника BND имеем $\frac{ND}{\sin \angle NBD} = \frac{BD}{\sin \angle BND} \Rightarrow$

$$ND = \frac{DB \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{30}.$$

$$5) S_{BNC} = S_{AND} - S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot ND \cdot NA \cdot \sin 30^\circ - 20 = \\ = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 30 - 20 = 10.$$

Случай 2. Пусть $BC > AD$ (см. рис. 581).

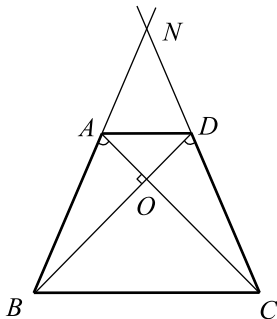


Рис. 581.

Проводя рассуждения, аналогичные 1)–4) случая 1, получим

$$NC = 2\sqrt{30}. \text{ Тогда } S_{BNC} = \frac{1}{2} \cdot NC \cdot NB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} (2\sqrt{30})^2 \cdot \frac{1}{2} = 30.$$

Ответ: 10; 30.

1620. Пусть AD — большее основание трапеции, $AD = 9$.

$\triangle BEC \sim \triangle AED$ (см. рис. 582) по первому признаку подобия треугольников ($\angle E$ — общий, $\angle EBC = \angle EAD$ как соответственные при пересе-

чении двух параллельных прямых BC и AD секущей AE). $\frac{S_{BEC}}{S_{AED}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$,

$$\frac{S_{AED} - S_{ABCD}}{S_{AED}} = \frac{1}{4}, \frac{S_{AED} - 27}{S_{AED}} = \frac{1}{4}, S_{AED} = 36. \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}, BC = 4,5.$$

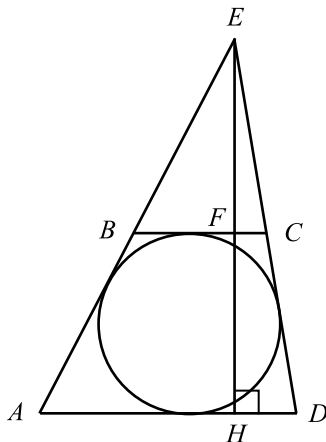


Рис. 582.

Пусть $AB = x$, $CD = y$ ($AE = 2x$, $DE = 2y$), тогда $x + y = BC + AD = 9 + 4,5 = 13,5$ как сумма противоположных сторон четырёхугольника, в который можно вписать окружность. Воспользуемся формулой Герона для $\triangle AED$, учитывая, что его полупериметр $p = \frac{2x + 2y + 9}{2} = 18$.

$$\begin{cases} 18 \cdot 9(18 - 2x)(18 - 2y) = 36^2, \\ 2x + 2y = 27. \end{cases}$$

Подставим $2y = 27 - 2x$ в уравнение $(18 - 2x)(18 - 2y) = 8$ и найдём значение x .

$$(9 - x)(2x - 9) = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 27x + 85 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x = 8,5. \end{cases} \quad \text{Значит, } AB = 5$$

или $AB = 8,5$.

Ответ: 5 или 8,5.

1621. $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (см. рис. 583) по двум углам ($\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$, $\angle BAO = \angle DCO$ как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей

AC). Поэтому $\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = k$. Отсюда

$AO \cdot OC + BO \cdot OD = k \cdot OC \cdot OC + k \cdot OD \cdot OD = k(OC^2 + OD^2)$. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника DOC имеем $CD^2 = OC^2 + OD^2$, поэтому $k(OC^2 + OD^2) = k \cdot CD^2 = (k \cdot CD) \cdot CD = AB \cdot CD = 8 \cdot 5,5 = 44$.

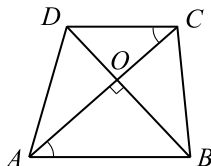


Рис. 583.

Ответ: 44.

1622. $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (см. рис. 584) по двум углам ($\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$, $\angle BAO = \angle DCO$ как накрест лежащие

при $AB \parallel CD$ и секущей AC). Поэтому $\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = k$. Отсюда

$AO \cdot OC + BO \cdot OD = k \cdot OC \cdot OC + k \cdot OD \cdot OD = k(OC^2 + OD^2)$.

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника DOC имеем $CD^2 = OC^2 + OD^2$, поэтому $k(OC^2 + OD^2) = k \cdot CD^2 = (k \cdot CD) \cdot CD = AB \cdot CD$. Получаем, что $AB \cdot CD = AO \cdot OC + BO \cdot OD = 23$ и

$$CD = \frac{23}{AB} = \frac{23}{5} = 4,6.$$

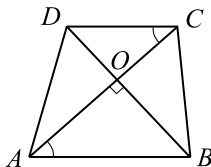


Рис. 584.

Ответ: 4,6.

1623. Пусть BP и CQ — высоты трапеции $ABCD$. Тогда $AP = QD$. Обозначим $x = AP$ (см. рис. 585).

В треугольнике ABD AB — катет, BP — высота, проведённая из вершины прямого угла, значит, $AB^2 = AD \cdot AP = 25x$; $BC = AD - 2AP = 25 - 2x$. Тогда $AB + BC = 5\sqrt{x} + (25 - 2x)$. По условию $AB + BC = 27$. Получим уравнение $5\sqrt{x} + (25 - 2x) = 27$, отсюда $2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow$

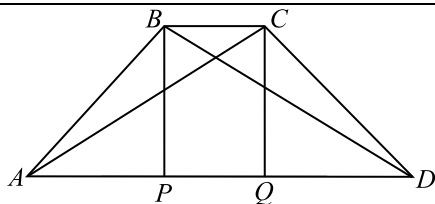


Рис. 585.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2, \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ x = \frac{1}{4}. \end{cases} \text{ Искомое значение } BC = 25 - 2 \cdot \frac{1}{4} = 24,5$$

или $BC = 25 - 2 \cdot 4 = 17$.

Ответ: 17; 24,5.

1624. Так как средняя линия трапеции равна полусумме оснований, то $\frac{AB + DC}{2} = 8$ (см. рис. 586). Учитывая соотношение $DC : AB = 3 : 5$, находим $DC = 6$, $AB = 10$. Так как трапеция описанная, то она равнобедренная и $AD + BC = AB + DC$, откуда $AD = BC = 8$.

$$AB \parallel CD, \text{ поэтому } \triangle EDC \sim \triangle EAB \text{ и } \frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB} = \frac{6}{10};$$

$10EC = 6(EC + CB)$; $10EC = 6EC + 48$; $EC = 12$. $EB = EC + CB = 12 + 8 = 20$. Получим два расстояния: $ED = EC = 12$, $EA = EB = 20$.

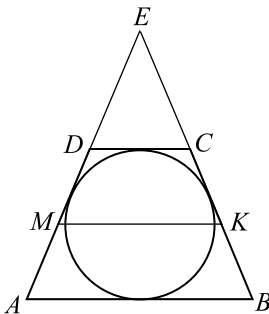


Рис. 586.

Ответ: 20; 12.

1625. По условию $\angle BAC = \angle CAD$, $\angle CDB = \angle BDA$ (см. рис. 587). Кроме того, $\angle BCA = \angle CAD$ и $\angle CBD = \angle BDA$ как накрест ле-

жащие при $BC \parallel AD$ и соответственно секущих AC и BD . Отсюда $\angle BAC = \angle BCA$, $\angle CDB = \angle CBD$; треугольники ABC и BCD — равнобедренные,

$AB = BC = CD$. $\angle COD$ — внешний угол в $\triangle AOD$, поэтому $\angle CAD + \angle CDA = 30^\circ$. Удваивая последнее равенство, получаем $\angle BAD + \angle CDA = 60^\circ$. Так как в равнобедренной трапеции $ABCD$ углы при одном основании равны, то $\angle BAD = \angle CDA = 30^\circ$.

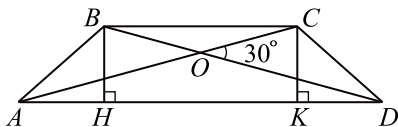


Рис. 587.

Проведём высоты BH и CK , рассмотрим два случая.

1) Большее основание $AD = 8$. Пусть $AB = BC = CD = x$, тогда $AH = KD = x \cos 30^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, из равенства $AH + HK + KD = AD$

получаем уравнение $\frac{x\sqrt{3}}{2} + x + \frac{x\sqrt{3}}{2} = 8$; $x(\sqrt{3} + 1) = 8$; $x = \frac{8}{\sqrt{3} + 1} = 4(\sqrt{3} - 1)$. Тогда высота $BH = x \sin 30^\circ = 2(\sqrt{3} - 1)$. Искомая площадь трапеции $ABCD$ равна $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH =$

$$= \frac{1}{2}(8 + 4(\sqrt{3} - 1)) \cdot 2(\sqrt{3} - 1) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = 8.$$

2) Меньшее основание $BC = 8$. Тогда $BH = AB \sin 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$,

$AH = KD = 8 \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$, большее основание

$AD = 4\sqrt{3} + 8 + 4\sqrt{3} = 8(\sqrt{3} + 1)$. Искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = \frac{1}{2}(8 + 8(\sqrt{3} + 1)) \cdot 4 = 16(2 + \sqrt{3}).$$

Ответ: 8 или $16(2 + \sqrt{3})$.

1626. По условию $\angle BAC = \angle CAD$, $\angle CDB = \angle BDA$ (см. рис. 588). Кроме того, $\angle BCA = \angle CAD$ и $\angle CBD = \angle BDA$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и соответственно секущих AC и BD . Отсюда $\angle BAC = \angle BCA$, $\angle CDB = \angle CBD$; треугольники ABC и BCD — равнобедренные,

$AB = BC = CD$. $\angle COD$ — внешний угол в $\triangle AOD$, поэтому

$\angle CAD + \angle CDA = 45^\circ$. Удваивая последнее равенство, получаем $\angle BAD + \angle CDA = 90^\circ$. Так как в равнобедренной трапеции $ABCD$ углы при одном основании равны, то $\angle BAD = \angle CDA = 45^\circ$.

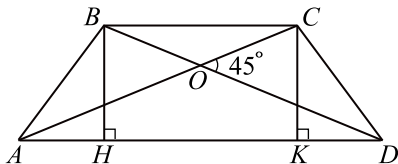


Рис. 588.

Проведём высоты BH и CK , рассмотрим два случая.

1) Большее основание $AD = 6$. Пусть $AB = BC = CD = x$, тогда $AH = KD = x \cos 45^\circ = \frac{x\sqrt{2}}{2}$, из равенства

$AH + HK + KD = AD$ получаем уравнение $\frac{x\sqrt{2}}{2} + x + \frac{x\sqrt{2}}{2} = 6$;

$x(\sqrt{2} + 1) = 6$; $x = \frac{6}{\sqrt{2} + 1} = 6(\sqrt{2} - 1)$. Тогда высота

$BH = x \sin 45^\circ = 3(2 - \sqrt{2})$. Искомая площадь трапеции $ABCD$ равна

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = \frac{1}{2}(6 + 6(\sqrt{2} - 1)) \cdot 3(2 - \sqrt{2}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 3(2 - \sqrt{2}) = 18(\sqrt{2} - 1).$$

2) Меньшее основание $BC = 6$. Тогда

$$BH = AB \sin 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}, \quad AH = KD = 6 \cos 45^\circ = 3\sqrt{2},$$

большее основание $AD = 3\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} = 6(\sqrt{2} + 1)$. Искомая площадь

$$\text{равна } S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = \frac{1}{2}(6 + 6(\sqrt{2} + 1)) \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2} + 1.$$

Ответ: $18(\sqrt{2} - 1)$ или $18(\sqrt{2} + 1)$.

1627. Пусть O — центр обеих окружностей, A_1A_2 — одна из сторон исходного правильного 23-угольника, OH — высота (и одновременно радиус вписанной окружности), проведённая из точки O к стороне A_1A_2 (см. рис. 589).

Обозначим длину A_1A_2 через $2a$ и найдём площадь кольца. Она равна

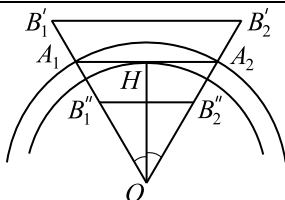


Рис. 589.

разности площадей большой и малой окружностей: $S_{\text{кольца}} = \pi \cdot OA_1^2 - \pi \cdot OH^2 = \pi(OA_1^2 - OH^2)$. Из прямоугольного треугольника A_1OH имеем $OA_1^2 - OH^2 = A_1H^2 = a^2$, поэтому $S_{\text{кольца}} = \pi a^2$.

$$S_{A_1OA_2} = \frac{1}{2} \cdot A_1A_2 \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot A_1A_2 \cdot A_1H \operatorname{ctg} \angle A_1OH = \\ = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{23} = a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{23}.$$

Так как $B_1B_2 \dots B_{23}$ — правильный многоугольник, то возможны всего два варианта расположения точек B_1, B_2, \dots, B_{23} : вне отрезков $OA_1, OA_2, \dots, OA_{23}$ (на рисунке это точки B'_1 и B'_2) или на отрезках $OA_1, OA_2, \dots, OA_{23}$ (на рисунке это точки B''_1 и B''_2).

В первом случае треугольники $B'_1OB'_2$ и A_1OA_2 подобны (равнобедренные с общим углом при вершине) с коэффициентом подобия

$$k = \frac{B'_1O}{A_1O} = \frac{4}{3}. \text{ Отсюда } S_{B'_1OB'_2} = k^2 S_{A_1OA_2} = \frac{16}{9} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{23}. \text{ Правильный } \\ \text{многоугольник } B'_1B'_2 \dots B'_{23} \text{ можно разбить на 23 одинаковых треугольни-} \\ \text{ка, каждый из которых равен } B'_1OB'_2, \text{ поэтому } S_{B'_1B'_2 \dots B'_{23}} = \\ = 23 \cdot \frac{16}{9} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{23} = \frac{368}{9} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{23}. \text{ Искомое отношение равно}$$

$$\frac{S_{B'_1B'_2 \dots B'_{23}}}{S_{\text{кольца}}} = \frac{368}{9\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{23}.$$

Во втором случае треугольники $B''_1OB''_2$ и A_1OA_2 подобны (равнобедренные с общим углом при вершине) с коэффициентом подобия

$$k = \frac{B''_1O}{A_1O} = \frac{2}{3}. \text{ Отсюда } S_{B''_1OB''_2} = k^2 S_{A_1OA_2} = \frac{4}{9} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{23}. \text{ Аналогично}$$

предыдущему случаю получаем, что искомое отношение равно $\frac{92}{9\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{23}$.

$$\text{Ответ: } \frac{368}{9\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{23} \text{ или } \frac{92}{9\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{23}.$$

1628. Пусть O — центр обеих окружностей, A_1A_2 — одна из сторон исходного правильного 29-угольника, OH — высота (и одновременно радиус вписанной окружности), проведённая из точки O к стороне A_1A_2 (см. рис. 590).

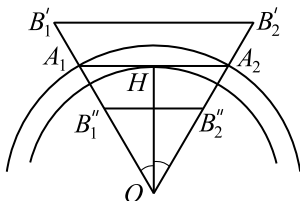


Рис. 590.

Обозначим длину A_1A_2 через $2a$ и найдём площадь кольца. Она равна разности площадей большой и малой окружностей: $S_{\text{кольца}} = \pi \cdot OA_1^2 - \pi \cdot OH^2 = \pi(OA_1^2 - OH^2)$. Из прямоугольного треугольника A_1OH имеем $OA_1^2 - OH^2 = A_1H^2 = a^2$, поэтому $S_{\text{кольца}} = \pi a^2$.

$$S_{A_1OA_2} = \frac{1}{2} \cdot A_1A_2 \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot A_1A_2 \cdot A_1H \operatorname{ctg} \angle A_1OH = \\ = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{29} = a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{29}.$$

Так как $B_1B_2 \dots B_{29}$ — правильный многоугольник, то возможны всего два варианта расположения точек B_1, B_2, \dots, B_{29} : вне отрезков $OA_1, OA_2, \dots, OA_{29}$ (на рисунке это точки B_1' и B_2') или на отрезках $OA_1, OA_2, \dots, OA_{29}$ (на рисунке это точки B_1'' и B_2'').

В первом случае треугольники $B_1'OB_2'$ и A_1OA_2 подобны (равнобедренные с общим углом при вершине) с коэффициентом подобия

$$k = \frac{B_1'O}{A_1O} = \frac{5}{4}. \text{ Отсюда } S_{B_1'OB_2'} = k^2 S_{A_1OA_2} = \frac{25}{16} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{29}. \text{ Правильный}$$

многоугольник $B_1'B_2' \dots B_{29}'$ можно разбить на 29 одинаковых треугольников, каждый из которых равен $B_1'OB_2'$, поэтому $S_{B_1'B_2' \dots B_{29}'} =$

$$= 29 \cdot \frac{25}{16} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{29} = \frac{725}{16} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{29}. \text{ Искомое отношение равно}$$

$$\frac{S_{\text{кольца}}}{S_{B_1'B_2' \dots B_{29}'}} = \frac{16\pi}{725} \operatorname{tg} \frac{\pi}{29}.$$

Во втором случае треугольники $B_1''OB_2''$ и A_1OA_2 подобны (равнобедренные с общим углом при вершине) с коэффициентом подобия

$k = \frac{B'_1O}{A_1O} = \frac{3}{4}$. Отсюда $S_{B''_1OB''_2} = k^2 S_{A_1OA_2} = \frac{9}{16} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{29}$. Аналогично

предыдущему случаю получаем, что искомое отношение равно $\frac{16\pi}{261} \operatorname{tg} \frac{\pi}{29}$.

Ответ: $\frac{16\pi}{725} \operatorname{tg} \frac{\pi}{29}$ или $\frac{16\pi}{261} \operatorname{tg} \frac{\pi}{29}$.

1629. Угол ANM вписанный, $\angle ANM = 30^\circ$, тогда $\sphericalangle AM = 60^\circ$. Угол ABN вписанный, $\sphericalangle AMN = \sphericalangle AM + \sphericalangle NM = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$, тогда $\angle ABN = 120^\circ$. Угол ABF смежный с углом ABN , $\angle ABF = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (см. рис. 591). В треугольнике AFB $AF = BF$, $\angle ABF = 60^\circ$, значит, треугольник ABF равносторонний,

$AB = AF = BF = 3$,

$\angle ABF = \angle BAF = \angle AFB = 60^\circ$. $\angle AFB = \frac{\sphericalangle MAN - \sphericalangle AnB}{2}$ как

угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга,

$\sphericalangle AnB = \sphericalangle MAN - 2\angle AFB = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$. Угол AOB центральный, $\angle AOB = 60^\circ$. В треугольнике AOB $OA = OB$ как радиусы, $\angle AOB = 60^\circ$, значит, треугольник AOB — равносторонний, $AO = OB = AB = 3$.

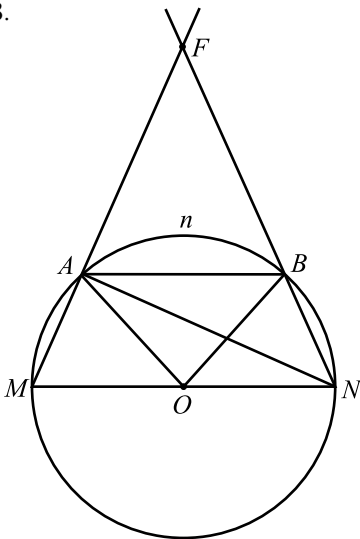


Рис. 591.

Ответ: 3.

1) Окружность расположена так, как показано на рис.595.

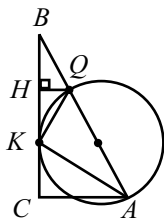


Рис. 595.

По теореме о касательной и секущей имеем $BK^2 = BQ \cdot AB$, откуда $BK = 2\sqrt{3}$.

$\triangle BHQ \sim \triangle BCA$, $BH = \frac{1}{3}BC = \sqrt{3}$, тогда $BH = HK$, следовательно

$\triangle BQK$ равнобедренный и $\angle BKQ = \angle KBQ = 30^\circ$.

В $\triangle AKC$ $AK = \sqrt{KC^2 + AC^2} = \sqrt{(BC - BK)^2 + AC^2} =$

$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$, $AK = 2KC$, значит $\angle AKC = 60^\circ$.

$\angle AKQ = 180^\circ - \angle QKB - \angle AKC = 90^\circ$.

$\triangle AKQ$ — прямоугольный, значит радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, то есть равен $\frac{1}{2}AQ = 2$.

2) Окружность расположена так, как показано на рисунке 596.

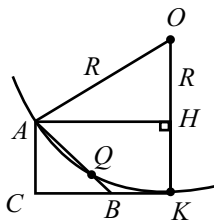


Рис. 596.

CK — касательная, поэтому $OK \perp CK$. По теореме о касательной и секущей имеем: $BK^2 = AB \cdot BQ$, откуда $BK = 2\sqrt{3}$.

$AH = CK = 5\sqrt{3}$, $HK = AC = 3$.

Из прямоугольного треугольника $ОАН$ по теореме Пифагора имеем:

$$AH^2 + OH^2 = OA^2; (5\sqrt{3})^2 + (R - 3)^2 = R^2,$$

$$75 + R^2 - 6R + 9 = R^2, 6R = 84, R = 14.$$

Ответ: 2; 14.

1633. Запишем для треугольника ABC (см. рис. 597) формулу медианы:

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}.$$

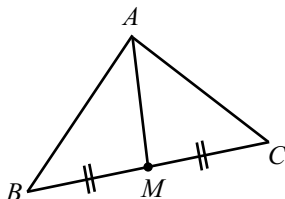


Рис. 597.

$$\text{Отсюда } BC = \sqrt{2(AB^2 + AC^2 - 2AM^2)} = 2\sqrt{33}.$$

По формуле Герона $S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}$, где

$p = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$ — полупериметр $\triangle ABC$. Выполнив действия, получим: $S_{ABC} = 4\sqrt{6}$.

Так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника,

$$\text{то } S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{S_{ABC}}{2} = 2\sqrt{6}.$$

Ответ: $2\sqrt{6}$.

1634. Векторы \vec{AB} и \vec{CD} равны, тогда прямые, содержащие отрезки AB и CD , параллельны и $AB = CD$. В четырёхугольнике $ABCD$ две стороны равны и параллельны, значит, $ABCD$ — параллелограмм (см. рис. 598).

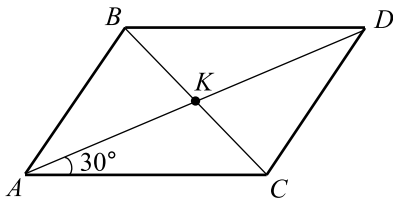


Рис. 598.

$\angle BCA = \angle DBC$ как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD и секущей BC , тогда $\triangle AKC$ — равнобедренный, $AK = KC$. Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то

$AK = KC = BK = KD$, тогда $\angle BAK = \angle ABK$, $\angle BAC = \angle CAB$, значит, $ABCD$ — прямоугольник. $AD = \sqrt{(3-1)^2 + (7-5)^2} = 2\sqrt{2}$, $DC = AD \sin \angle DAC = \sqrt{2}$, $BD = AC = \sqrt{6}$.

Рассмотрим два случая расположения точек B и C .

1) Точка B расположена, как показано на рисунке 599.

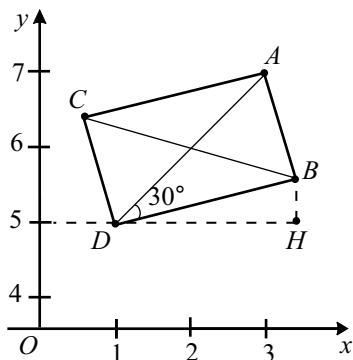


Рис. 599.

$\angle ADH = 45^\circ$, $\angle BDH = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$. Ордината y_B точки B в данном случае равна $y_B = y_D + BH = 5 + BH$. Так как по условию $y_B > 6$, то

$$BH > 1. BH = BD \sin \angle BDH = \sqrt{2} \sin 15^\circ = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} < 1, \text{ значит, данный случай не удовлетворяет условию.}$$

2) Точка B расположена, как показано на рисунке 600.

Условие $y_B > 6$ выполняется. Абсцисса точки C равна $x_C = x_D + CL =$

$$= 1 + CD \cdot \cos 15^\circ = 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\cos 30^\circ + 1}{2}} = 1 + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = 1 +$$

$$+ \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = 1 + \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$.

1635. Обозначим величину каждого из данных вертикальных углов за α

(см. рис. 601). Тогда $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{1}{4}$.

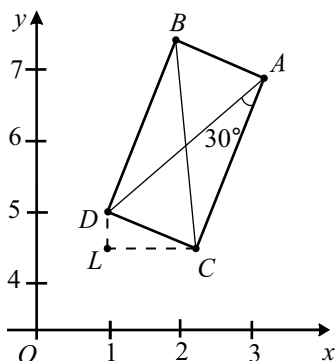


Рис. 600.

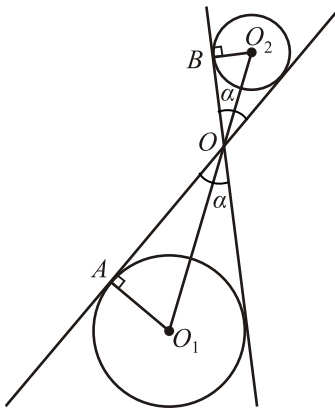


Рис. 601.

Заметим, что $\triangle AO_1O$ подобен $\triangle BO_2O$ ($\angle O_2BO = \angle OAO_1 = 90^\circ$, так как радиус, проведённый к точке касания, перпендикулярен касательной, $\angle BOO_2 = \angle AOO_1$, так как O_1O_2 — биссектриса углов α);

так как $\frac{O_1A}{O_2B} = 2$, то $\frac{O_1O}{O_2O} = 2$; так как $O_1O + O_2O = 12\sqrt{2}$, то

$$O_2O = 4\sqrt{2}, \sin \angle BOO_2 = \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Возможны два варианта:

$$1) \sin \angle BOO_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$AB = 7x = \frac{4 \cdot 7}{\sqrt{70}} = \frac{2\sqrt{70}}{5}.$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{7} \text{ или } \frac{2\sqrt{70}}{5}.$$

1639. Сделаем чертёж (см. рис. 607) и обозначим через x, y, z радиусы соответственно первой, второй и третьей окружностей. Обозначив центры окружностей через K, L и M , перерисуем чертеж (см. рис. 608). Выберем точку P так, чтобы получился прямоугольник $ABLP$, проведем перпендикуляр MH к AB , MC к AP , MD к BL . Тогда $KM = x + z$, $LM = y + z$, $KL = x + y$, $AC = BD = MH = z$, $AK = x$, $BL = y$, $KC = AK - AC = x - z$, $DL = BL - BD = y - z$,

$PK = AP - AK = BL - AK = y - x$. По теореме Пифагора для $\triangle KCM$: $CM = \sqrt{KM^2 - KC^2} = \sqrt{(x+z)^2 - (x-z)^2} = 2\sqrt{xz}$;

для $\triangle DLM$: $MD = \sqrt{LM^2 - DL^2} = \sqrt{(y+z)^2 - (y-z)^2} = 2\sqrt{yz}$; для

$\triangle KLP$: $PL = \sqrt{KL^2 - PK^2} = \sqrt{(x+y)^2 - (y-x)^2} = 2\sqrt{xy}$.

Так как $PL = CD = CM + MD$, то $2\sqrt{xy} = 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$;

$\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$. Если среди данных в условии числовых значений радиусов есть радиус z , то $z = 64$ (так как он наименьший среди тройки x, y, z)

и неизвестный радиус находится как $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{64}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} =$

$= \frac{5-4}{40} = \frac{1}{40}$; $x = 1600$. Если среди данных в условии числовых значе-

ний нет радиуса z , то он находится из $\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{64}} + \frac{1}{\sqrt{100}} =$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{5+4}{40} = \frac{9}{40}$.

$$z = \left(\frac{40}{9}\right)^2 = \frac{1600}{81} = 19\frac{61}{81}.$$

$$\text{Ответ: } 1600 \text{ или } 19\frac{61}{81}.$$

1640. Обозначим центр меньшей окружности через S , центр большей окружности через O , радиус большей окружности через x , точку касания окружностей через T . Так как KM — диаметр меньшей окружности, то её радиус $TS = \frac{KM}{2} = 1$. Так как каждый из радиусов OT и ST перпендикулярен общей касательной окружностей, то точки T, S, O лежат на одной

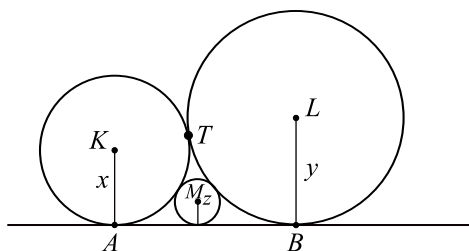


Рис. 607.

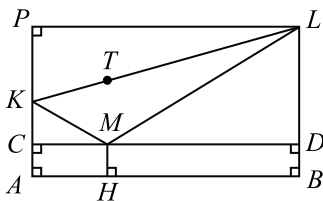


Рис. 608.

прямой и $OS = OT - ST = x - 1$ (см. рис. 609).

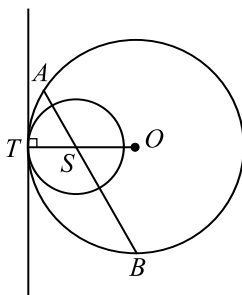


Рис. 609.

Рассмотрим два случая:

1) На прямой AB точки K и M лежат в порядке A, K, M, B (см. рис. 610). Тогда $AB = AK + KM + MB = 3 + 2 + 4 = 9$.

Проведём $OH \perp AB$. Так как $\triangle OAB$ — равнобедренный ($OA = OB = x$), то $AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{9}{2}$. По теореме Пифагора для

$\triangle OHB : OH^2 = OB^2 - HB^2$; $OH^2 = x^2 - \frac{81}{4}$. По теореме Пифагора для

$\triangle OHS : OS^2 = OH^2 + SH^2$. Так как $SH = SM + MB - BH = 1 + 4 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$,

то $(x - 1)^2 = x^2 - \frac{81}{4} + \frac{1}{4}$; $x^2 - 2x + 1 = x^2 - 20$; $-2x = -21$; $x = 10,5$.

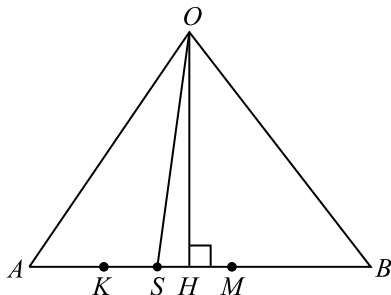


Рис. 610.

2) На прямой AB точки K и M лежат в порядке A, M, K, B (см. рис. 611). тогда $AB = AK + BM - KM = 3 + 4 - 2 = 5$.

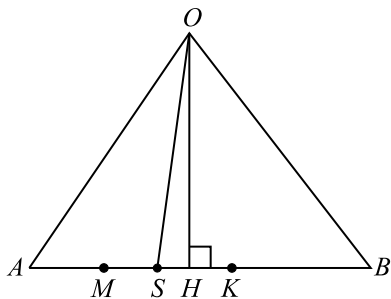


Рис. 611.

Проведем $OH \perp AB$. Так как $\triangle OAB$ — равнобедренный ($OA = OB = x$), то $AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$. По теореме Пифагора

для $\triangle OHB : OH^2 = OB^2 - HB^2 = x^2 - \frac{25}{4}$. По теореме Пифагора для

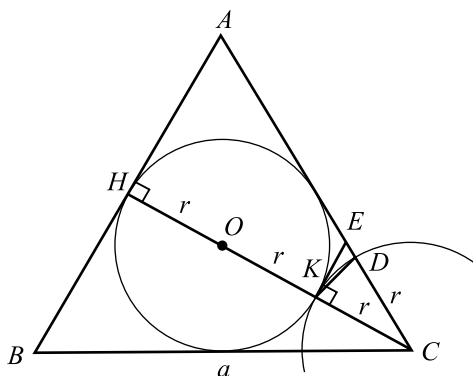


Рис. 613.

$EC = \frac{AC}{3} = \frac{2\sqrt{3}+2}{3}$, $EK = \frac{1}{3}AH = \frac{a}{6} = \frac{2\sqrt{3}+2}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{3}$. Кроме того, $\angle KED = \angle CAH = 60^\circ$.

$$ED = EC - CD = \frac{2\sqrt{3}+2}{3} - \frac{3+\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Итак, } S_{KDE} &= \frac{1}{2}EK \cdot ED \sin \angle KED = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{1}{18} \cdot (3-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{18}. \end{aligned}$$

2) Рассмотрим вторую возможную конфигурацию (см. рис. 614). Требуется найти площадь треугольника KAD .

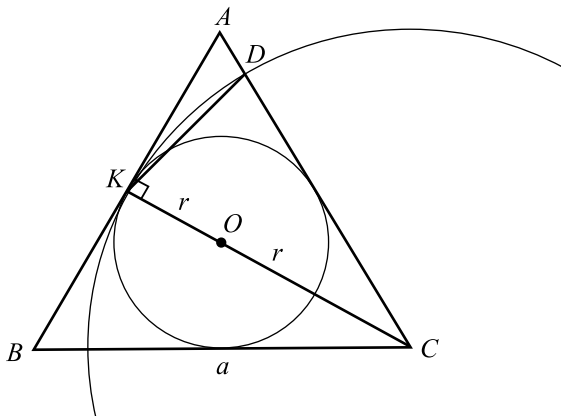


Рис. 614.

$$AK = \frac{a}{2} = \sqrt{3} + 1. AD = AC - CD = AC - CK = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} =$$

$$= a\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (2\sqrt{3} + 2)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - 1.$$

$$S_{KAD} = \frac{1}{2} AK \cdot AD \sin 60^\circ = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{18}, \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1643. Пусть a — сторона ромба $ABCD$, S — его площадь. Тогда $S = a^2 \sin \angle A$. Отсюда $\sin \angle A = \frac{S}{a^2} = \frac{8\sqrt{3}}{4^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, $\angle A = 60^\circ$ или $\angle A = 120^\circ$.

Рассмотрим два случая (см. рис. 615).

1) $\angle A = 60^\circ$, окружность касается AB и AD . Тогда радиус вписанной в ромб окружности $R = OK = \frac{1}{2}AO$ как катет прямоугольного треугольника AOK , лежащий против $\angle OAB = 30^\circ$. Так как $OB = \frac{a}{2}$ (в прямоугольном треугольнике AOB катет OB лежит против $\angle OAB = 30^\circ$), то $AO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $R = \frac{1}{2}AO = \sqrt{3}$.

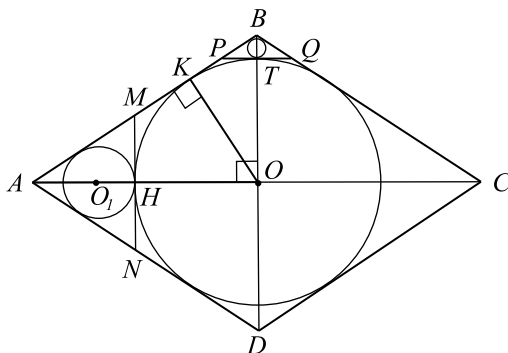


Рис. 615.

Проведём $MN \parallel BD$ так, чтобы MN касалась одновременно обеих окружностей. Тогда $AM = AN$, $\triangle AMN$ — правильный ввиду $\angle MAN = 60^\circ$. O_1 — точка пересечения медиан $\triangle MAN$, поэтому

Треугольник AOP — равнобедренный, тогда
 $AP = 2HP = 2OT = 2(9 - r) = 8$, $AK = 9 - 8 = 1$.

Площадь трапеции $MNAK$ равна

$$S = \frac{1}{2}MK(AK + MN) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (1 + 9) = 40.$$

Ответ: 40.

1645. Пусть $\angle NMP = \alpha$, тогда из условия следует, что $\angle PMK = \alpha$.

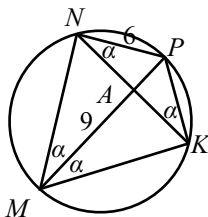


Рис. 617.

$\angle NKP = \angle NMP = \alpha$, так как эти углы вписанные и опираются на одну дугу (см. рис. 617). Аналогично $\angle PNK = \angle PMK = \alpha$.

Так как $\angle PNK = \angle PKN$, то треугольник NPK — равнобедренный, тогда $NP = PK$.

В четырёхугольник $MNPК$ можно вписать окружность, следовательно $NP + MK = PK + MN$, откуда $MN = MK$.

Треугольник NMK — равнобедренный, MA — его биссектриса, а значит, и высота, то есть $MP \perp NK$. $\triangle MNA \sim \triangle NPA$, так как $\angle NMA = \angle ANP = \alpha$, $\angle MAN = \angle NPA = 90^\circ$. Обозначим $AP = x$, тогда из подобия треугольников MNA и NPA получаем $\frac{MA}{AN} = \frac{AN}{AP}$,

$$\frac{9}{\sqrt{36 - x^2}} = \frac{\sqrt{36 - x^2}}{x}, 9x = 36 - x^2, x^2 + 9x - 36 = 0, (x + 12)(x - 3) = 0.$$

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то получаем $x = 3$. Итак, $AP = 3$.

Ответ: 3.

1646. Проведём дополнительно биссектрису CC_1 и и отрезок A_1B_1 (см. рис. 618).

Обозначим $\angle BCC_1 = \angle C_1CA = \alpha$.

Так как около четырёхугольника OA_1CB_1 можно описать окружность, то $\angle A_1CO = \angle A_1B_1O = \alpha$, $\angle OCB_1 = \angle OA_1B_1 = \alpha$.

Пусть $\angle A_1OC = \beta$, $\angle B_1OC = \gamma$, тогда $\angle A_1B_1C = \beta$, $\angle B_1A_1C = \gamma$. В треугольнике A_1B_1C сумма углов равна $2\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

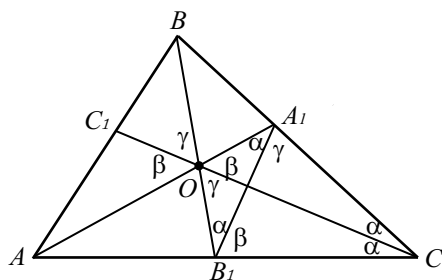


Рис. 618.

$\angle AOB_1 = 180^\circ - \angle A_1OB_1 = 2\alpha$, $\angle OB_1A = 180^\circ - \angle OB_1C = \alpha + \gamma$,
 $\angle OAB_1 = 180^\circ - \angle AOB_1 - \angle OB_1A = 2\alpha + \beta + \gamma - 2\alpha - (\alpha + \gamma) = \beta - \alpha$.
 Так как AA_1 — биссектриса, то $\angle BAA_1 = \angle A_1AC = \beta - \alpha$.

Рассуждая аналогично, получим:

$\angle BA_1O = \beta + \alpha$, $\angle OBA_1 = \angle ABO = \gamma - \alpha$.

$\angle OC_1A$ — внешний угол треугольника C_1BO , значит,
 $\angle OC_1A = \angle C_1OB + \angle C_1BO = 2\gamma - \alpha$. $\angle AC_1O + \angle C_1OA + \angle OAC_1 =$
 $= 180^\circ$ — сумма углов треугольника AC_1O .

$2\beta + 2\gamma - 2\alpha = 180^\circ$, $2\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, тогда $\beta + \gamma = 120^\circ$, $\alpha = 30^\circ$,
 $\angle BCA = 60^\circ$. Площадь треугольника ABC равна

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle BCA = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15.$$

Ответ: 15.

1647. Проведём дополнительно биссектрису KK_1 и отрезок A_1B_1 (см. рис. 619). Обозначим $\angle BKK_1 = \angle K_1KA = \alpha$. Так как около четырёхугольника OA_1KB_1 можно описать окружность, то $\angle A_1KO =$
 $= \angle A_1B_1O = \alpha$, $\angle OKB_1 = \angle OA_1B_1 = \alpha$. Пусть $\angle A_1OK = \beta$,

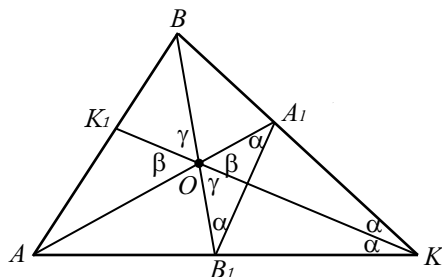


Рис. 619.

решения задачи 1647. Проведём дополнительно биссектрису KK_1 и отрезок A_1B_1 (см. рис. 619). Обозначим $\angle BKK_1 = \angle K_1KA = \alpha$. Так как около четырёхугольника OA_1KB_1 можно описать окружность, то $\angle A_1KO =$
 $= \angle A_1B_1O = \alpha$, $\angle OKB_1 = \angle OA_1B_1 = \alpha$. Пусть $\angle A_1OK = \beta$,

$\angle B_1OK = \gamma$, тогда $\angle A_1B_1K = \beta$, $\angle B_1A_1K = \gamma$. В треугольнике A_1B_1K сумма углов равна $2\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

$\angle AOB_1 = 180^\circ - \angle A_1OB_1 = 2\alpha$, $\angle OB_1A = 180^\circ - \angle OB_1K = \alpha + \gamma$,

$\angle OAB_1 = 180^\circ - \angle AOB_1 - \angle OB_1A = \beta - \alpha$.

Так как AA_1 — биссектриса, то $\angle BAA_1 = \angle A_1AK = \beta - \alpha$.

Рассуждая аналогично, получим:

$\angle BA_1O = \beta + \alpha$, $\angle OBA_1 = \angle ABO = \gamma - \alpha$.

$\angle OK_1A$ — внешний угол треугольника K_1BO , значит,

$\angle OK_1A = \angle K_1OB + \angle K_1BO = 2\gamma - \alpha$.

$\angle AK_1O + \angle K_1OA + \angle OAK_1 = 180^\circ$, тогда $\beta + \gamma = 120^\circ$, $\alpha = 30^\circ$,

$\angle BKA = 60^\circ$.

По теореме косинусов $AB^2 = BK^2 + AK^2 - 2AK \cdot BK \cdot \cos \angle BKA =$
 $= 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 19$.

Площадь квадрата равна $S_{ABCD} = AB^2 = 19$.

Ответ: 19.

1648. Указанное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда

$(3a - 7)^2 \leq 1$, то есть $|3a - 7| \leq 1$, $-1 \leq 3a - 7 \leq 1$, $2 \leq a \leq \frac{8}{3}$.

Нужно найти такие a из промежутка $\left[2; \frac{8}{3}\right]$, при которых функция

$f(a) = \frac{27(2-a)}{4(a-1)^3}$ принимает целые значения.

Найдём промежутки монотонности функции $f(a)$.

$$f'(a) = \frac{-27 \cdot 4(a-1)^3 - 4 \cdot 3(a-1)^2 \cdot 27(2-a)}{16(a-1)^6} = \frac{27(2a-5)}{4(a-1)^4}.$$

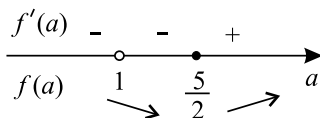


Рис. 620.

Итак, функция $f(a)$ имеет единственную точку минимума $a = \frac{5}{2}$

(см. рис. 620). При $a \in \left[2; \frac{5}{2}\right]$ функция $f(a)$ строго убывает, $f(2) = 0$,

$f\left(\frac{5}{2}\right) = -1$, значит на этом промежутке у неё ровно два целых значения при $a = 2$ и $a = \frac{5}{2}$.

При $a \in \left(\frac{5}{2}; \frac{8}{3}\right]$ функция $f(a)$ строго возрастает, $f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{243}{250}$, значит на этом промежутке она не имеет целых значений. Искомые значения a равны 2 и $\frac{5}{2}$.

Ответ: $2; \frac{5}{2}$.

1649. Указанное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $(3p - 2)^2 \leq 1$, то есть $|3p - 2| \leq 1$, $-1 \leq 3p - 2 \leq 1$, $\frac{1}{3} \leq p \leq 1$.

Нужно найти такие p из промежутка $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$, при которых функция

$f(p) = \frac{1 - 3p}{4p^3}$ принимает целые значения. Найдём промежутки монотонности функции $f(p)$. $f'(p) = \frac{-3 \cdot 4p^3 - 4 \cdot 3p^2(1 - 3p)}{16p^6} = \frac{3 \cdot (2p - 1)}{4p^4}$.

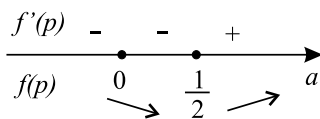


Рис. 621.

Итак, функция $f(p)$ имеет единственную точку минимума $p = \frac{1}{2}$

(см. рис. 621). При $p \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ функция $f(p)$ строго убывает, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$,

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, значит на этом промежутке у неё ровно два целых значения при $p = \frac{1}{3}$ и $p = \frac{1}{2}$.

При $p \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$ функция $f(p)$ строго возрастает, $f(1) = -\frac{1}{2}$, значит на

этом промежутке она не имеет целых значений.

Искомые значения p равны $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{3}; \frac{1}{2}$.

1650. По условию функция $y = 2 \sin x + ab - bx$ обращается в нуль ровно в двух точках. Обозначим их x_1 и x_2 , $x_1 < x_2$. Эти точки разбивают числовую ось на 3 интервала: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$. Так как $y(x)$ непрерывна и не обращается на этих интервалах в ноль, она не меняет знак на этих интервалах.

Покажем, что на интервалах $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$ $y(x)$ имеет разные знаки. Не теряя общности, положим $b > 0$. Тогда при $x > \frac{ab+2}{b}$ имеем: $y \leq 2 + ab - bx < 0$, значит функция отрицательна на интервале $(x_2; +\infty)$, и аналогично доказывается, что функция положительна на интервале $(-\infty; x_1)$.

Поэтому на соседних промежутках $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$ или $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$ $y(x)$ имеет одинаковые знаки, а тогда либо x_1 , либо x_2 является точкой экстремума и в ней $y'(x) = 2 \cos x - b$ обращается в ноль.

Второе уравнение системы имеет вид:
 $\sin 2x = b \sin x$; $2 \sin x \cos x - b \sin x = 0$; $\sin x(2 \cos x - b) = 0$. Следовательно, или при x_1 , или при x_2 оно обращается в верное равенство, а значит система имеет не менее одного решения.

Ответ: да.

1651. Рассмотрим первое уравнение системы:

$$3 \cos x = \left(\frac{\sin \alpha}{2} + 1,5 \right) x - 12.$$

По условию графики функций $f(x) = 3 \cos x$ и $g(x) = \left(\frac{\sin \alpha}{2} + 1,5 \right) x - 12$ имеют две общие точки. $g(x) = kx - 12$, где $1 \leq k \leq 2$, так как $-\frac{1}{2} \leq \frac{\sin \alpha}{2} \leq \frac{1}{2}$. Построим схематически графики функций $f(x)$ и $g(x)$.

График функции $g(x)$ — прямая, которая лежит внутри угла α . $f(3\pi) = -3$, $g(3\pi) \geq 3\pi - 12$, значит $g(3\pi) \geq f(3\pi)$. Первое уравнение имеет ровно два корня лишь в том случае, когда прямая $g(x)$ пересекает и касается графика $f(x)$, как показано на рисунке 622.

Учитывая ограничения $g(x)$, такой случай единственен. Рассмотрим

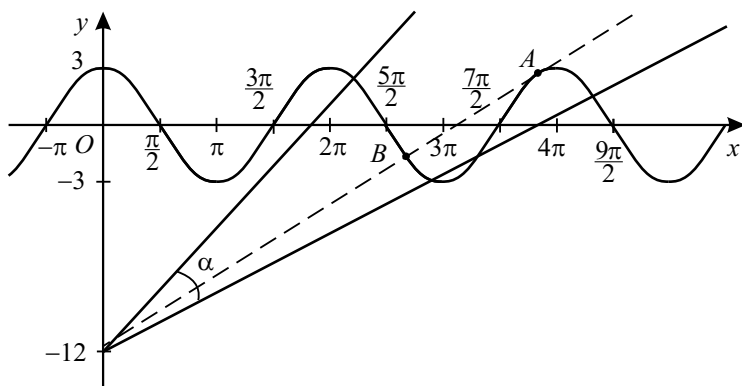


Рис. 622.

его. Так как $g(x)$ является касательной к $f(x)$, то $\frac{\sin \alpha}{2} + 1,5$ — значение производной $f'(x)$ в абсциссе точки касания $A(x_0; y_0)$, то есть $(3 \cos x)' = -3 \sin x$. Тогда $-3 \sin x_0 = \frac{\sin \alpha}{2} + 1,5$, $3 \sin x_0 + \frac{\sin \alpha}{2} + 1,5 = 0$. Но x_0 не может являться корнем второго уравнения, так как знаменатель дроби $\frac{1}{\sin x + 0,5 + \frac{\sin \alpha}{6}}$ обращается в ноль.

Рассмотрим точку пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$ — $B(x_1, y_1)$. Замечаем, что $2\pi < x_1 < 3\pi$. Рассмотрим теперь второе уравнение системы.

$0 < \sin x_1 < 1$, то есть $\sin x_1 > 0$; $-\frac{1}{6} < \frac{\sin \alpha}{6} < \frac{1}{6}$, значит $\sin x_1 + 0,5 + \frac{\sin \alpha}{6} > 0$, следовательно $\frac{1}{\sin x_1 + 0,5 + \frac{\sin \alpha}{6}} > 0$, но $-|b| \sin x_1 < 0$, отсюда заключаем, что x_1 не является корнем второго уравнения системы и система решений не имеет.

Ответ: нет.

$$1652. f(x) = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{3-x^3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{3-x^3}}; \quad x \neq \sqrt[3]{3}.$$

$$f(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{9}{3 - \frac{9}{3 - x^3}}} = \sqrt[3]{\frac{3(3 - x^3)}{-x^3}} = -\frac{\sqrt[3]{3(3 - x^3)}}{x}; \quad x \neq 0.$$

$$f(f(f(x))) = -\frac{\sqrt[3]{3 \cdot \left(3 - \frac{9}{3 - x^3}\right)}}{\sqrt[3]{\frac{9}{3 - x^3}}} = -\frac{\sqrt[3]{\frac{9 \cdot (-x^3)}{3 - x^3}}}{\sqrt[3]{\frac{9}{3 - x^3}}} = x.$$

Итак $f(f(f(x))) = x$, тогда

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)) \dots)}_{2012 \text{ раз}} = f(f(x)) = -\frac{\sqrt[3]{3(3 - x^3)}}{x};$$

$$-\frac{\sqrt[3]{3(3 - x^3)}}{x} = 3; \quad \sqrt[3]{3(3 - x^3)} = -3x; \quad 9 - 3x^3 = -27x^3; \quad 8x^3 = -3;$$

$$x = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}.$$

1653. По условию задачи составим неравенство

$$20 \leq \sqrt{5n} + \frac{1}{2} < 21; \quad 19,5 \leq \sqrt{5n} < 20,5; \quad 380,25 \leq 5n < 420,25,$$

$$76,05 \leq n < 84,05.$$

Учитывая, что $n \in N$, имеем $n = 77, 78, \dots, 84$. Всего 8 значений n удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 8.

1654. По условию задачи составим неравенство

$$15 \leq \sqrt{4n + 2} < 16,$$

$$225 \leq 4n + 2 < 256,$$

$$223 \leq 4n < 254,$$

$$55,75 \leq n < 63,5.$$

Учитывая, что $n \in N$, имеем $n = 56, 57, \dots, 63$. Всего 8 значений n удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 8.

1655. Пусть первоначально имеется $2n$ чисел, тогда после первого обхода по кругу после вычёркивания останутся числа с номерами

$$1, 3, 5, \dots, 2n - 3, 2n - 1.$$

Следующий обход по кругу будет начинаться с вычёркивания числа 3. Это равносильно тому, что мы начинаем вычёркивание из n имеющихся чисел, при этом номер каждого из оставшихся чисел удваивается и уменьшается на 1. То есть если $f(n)$ — число, которое останется в конечном итоге (при последовательном вычёркивании из n чисел), то $f(2n) = 2f(n) - 1$. В случае, когда в круге нечётное количество чисел, например $2n + 1$, то после обхода круга следующим вычёркивается число 1 и тем самым остаются числа: 3, 5, 7, ..., $2n - 1, 2n + 1$. В этом случае получаем $f(2n + 1) = 2f(n) + 1$.

В нашем случае всего имеется 211 чисел, значит, последним будет вычеркнуто число

$$f(211) = 2f(105) + 1; f(105) = 2f(52) + 1; f(52) = 2f(26) - 1; \\ f(26) = 2f(13) - 1; f(13) = 2f(6) + 1; f(6) = 2f(3) - 1; f(3) = 2f(1) + 1; \\ f(1) = 1.$$

Теперь находим $f(3) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$; $f(6) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$; $f(13) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$; $f(26) = 2 \cdot 11 - 1 = 21$; $f(52) = 2 \cdot 21 - 1 = 41$; $f(105) = 2 \cdot 41 + 1 = 83$; $f(211) = 2 \cdot 83 + 1 = 167$.

Ответ: 167.

1656. Пусть вначале имеется $2n$ чисел. Тогда после первого обхода по кругу после вычёркивания останутся числа с номерами 1, 3, 5, ..., $2n - 3, 2n - 1$.

Следующий обход по кругу будет начинаться с вычёркивания числа 3. Это равносильно тому, что мы начинаем вычёркивание из n имеющихся чисел, при этом номер каждого из оставшихся чисел удваивается и уменьшается на 1. То есть если $f(n)$ — число, которое останется в конечном итоге (при последовательном вычёркивании из n чисел), то $f(2n) = 2f(n) - 1$. В случае, когда в круге нечётное количество чисел, например $2n + 1$, то после обхода круга следующим вычёркивается число 1, и тем самым остаются числа: 3, 5, 7, ..., $2n - 1, 2n + 1$. В этом случае получаем $f(2n + 1) = 2f(n) + 1$.

В нашем случае всего имеется 100 чисел, значит, последним будет вычеркнуто число $f(100) = 2 \cdot f(50) - 1$; $f(50) = 2 \cdot f(25) - 1$; $f(25) = 2 \cdot f(12) + 1$; $f(12) = 2 \cdot f(6) - 1$; $f(6) = 2 \cdot f(3) - 1$; $f(3) = 2 \cdot f(1) + 1$; $f(1) = 1$. Тогда находим $f(3) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$; $f(6) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$; $f(12) = 2 \cdot 5 - 1 = 9$; $f(25) = 2 \cdot 9 + 1 = 19$; $f(50) = 2 \cdot 19 - 1 = 37$; $f(100) = 2 \cdot 37 - 1 = 73$.

Итак, последним будет вычеркнуто число 73.

Ответ: 73.

1657. Пусть $n \in N$ — первое число в такой последовательности. Тогда $n+1, n+2, n+3, n+4$ — следующие за ним четыре числа. Для выполнения условия задачи необходимо, чтобы:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2;$$

$$n^2 = (n+3)^2 - (n+2)^2 + (n+4)^2 - (n+1)^2;$$

$$n^2 = 2n + 5 + 3(2n + 5) = 8n + 20;$$

$$n^2 - 8n - 20 = 0;$$

$$n_1 = -2 \notin N, n_2 = 10.$$

Если $n = 10$, то сумма чисел такой последовательности

$$S = \frac{n + n + 4}{2} \cdot 5 = 5n + 10 = 60.$$

Ответ: 60.

1658. Пусть $n \in N$ — первое число искомой последовательности. Тогда $n+2, n+4, n+6, n+8, n+10$ — следующие пять чисел этой последовательности. Для выполнения условия задачи необходимо, чтобы

$$n^2 + (n+2)^2 + (n+4)^2 + (n+6)^2 = (n+8)^2 + (n+10)^2;$$

$$n^2 + (n+2)^2 = (n+8)^2 - (n+6)^2 + (n+10)^2 - (n+4)^2;$$

$$2n^2 + 4n + 4 = 2(2n + 14) + 6(2n + 14);$$

$$n^2 + 2n + 2 = 8n + 56;$$

$$n^2 - 6n - 54 = 0;$$

$$n_1 = 3 - 3\sqrt{7} \notin N, n_2 = 3 + 3\sqrt{7} \notin N.$$

Следовательно, искомым последовательностям натуральных чисел, для которых выполняется данное условие, не существует.

Ответ: Нет решений.

1659. 1. Вычислим первые члены последовательности $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 11, a_4 = 102, \dots$ a_1 и a_2 — точные квадраты.

2. Выведем формулу общего члена для a_n . Пусть $u_n = a_{n+1} - a_n, n \geq 1$. Тогда u_n удовлетворяет соотношению

$$u_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = 9a_{n+1} + (n+1) - 9a_n - n = 9(a_{n+1} - a_n) + 1 = 9u_n + 1. \text{ Таким образом, членами } u_n \text{ являются } u_1 = 1, u_2 = 10, u_3 = 91.$$

Заметим, что так как $a_1 = 0$, то $a_2 = a_2 - a_1 = u_1$,

$$a_3 = (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = u_2 + u_1,$$

$$a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1) = u_n + u_{n-1} + \dots + u_1.$$

Заметим, что разности между соседними членами u_n образуют геометрическую прогрессию. Действительно, пусть $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Тогда $v_n = 9u_n + 1 - 9u_{n-1} - 1 = 9(u_n - u_{n-1}) = 9v_{n-1}$. Таким образом, членами v_n являются $v_1 = 9, v_2 = 81, \dots, v_n = 9^n$. Получаем для u_n :

$$u_1 = 9^0,$$

$$u_2 = 9^0 + 9^1, u_3 = 9^0 + 9^1 + 9^2, \dots, u_n = 9^0 + 9^1 + \dots + 9^{n-1} =$$

$$= \frac{9^n - 1}{9 - 1} = \frac{9^n - 1}{8}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } a_n &= u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{9^1 - 1}{8} + \dots + \frac{9^{n-1} - 1}{8} = \\ &= \frac{1}{8}(9^1 + \dots + 9^{n-1} - (n-1)) = \frac{1}{8}\left(9 \cdot \frac{9^{n-1} - 1}{9 - 1} - (n-1)\right) = \\ &= \frac{1}{64}(9^n - 8n - 1). \end{aligned}$$

3. a_n является точным квадратом $\Leftrightarrow 9^n - 8n - 1$ является точным квадратом. Но при $n > 2$ справедливо неравенство $(3^n - 1)^2 < 9^n - 8n - 1 < (3^n)^2$, т. к. $2 \cdot 3^n - 1 > 8n + 1$ (что можно доказать, например, графически). Значит, при $n > 2$ точных квадратов среди a_n нет.

Ответ: 0; 1.

1660. 1) Вычислим первые члены последовательности: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 6$, $a_4 = 27$, ... a_1 и a_2 — точные квадраты.

2) Выведем формулу общего члена для a_n . Пусть $u_n = a_{n+1} - a_n$, $n \geq 1$. Тогда u_n удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+2} - a_{n+1} = 4a_{n+1} + (n+1) - 4a_n - n = 4(a_{n+1} - a_n) + 1 = \\ &= 4u_n + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, членами u_n являются $u_1 = 1$, $u_2 = 5$, $u_3 = 21$. Заметим, что $a_2 = a_2 - a_1 = u_1$, $a_3 = (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = u_2 + u_1$, $a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1) = u_n + u_{n-1} + \dots + u_1$.

Покажем, что разности между соседними членами u_n образуют геометрическую прогрессию. Пусть $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Тогда $v_n = 4u_n + 1 - 4u_{n-1} - 1 = 4(u_n - u_{n-1}) = 4v_{n-1}$. Членами v_n являются $v_1 = 4$, $v_2 = 16$, ..., $v_n = 4^n$. Получаем для u_n : $u_1 = 4^0$, $u_2 = 4^0 + 4^1$,

$$u_3 = 4^0 + 4^1 + 4^2, \dots, u_n = 4^0 + 4^1 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } a_n &= u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{4^0 - 1}{3} + \frac{4^1 - 1}{3} + \dots + \frac{4^{n-1} - 1}{3} = \\ &= \frac{1}{3}(4^1 + \dots + 4^{n-1} - (n-1)) = \frac{1}{3}\left(4 \cdot \frac{4^{n-1} - 1}{4 - 1} - (n-1)\right) = \\ &= \frac{1}{9}(4^n - 3n - 1). \end{aligned}$$

3) a_n является точным квадратом $\Leftrightarrow 4^n - 3n - 1$ является точным квадратом. Но при $n > 2$ справедливо неравенство

$(2^n - 1)^2 < 4^n - 3n - 1 < (2^n)^2$, так как $2 \cdot 2^n - 1 > 3n + 1$ при $n > 2$ (что можно, например, доказать методом математической индукции). Значит,

при $n > 2$ точных квадратов среди a_n нет.

Ответ: 0; 1.

1661. По условию $c = a + b$, где $0 < b < 1$. Так как $b = c - a$, то $0 < c - a < 1$, $a < c < a + 1$.

Выразим c через a из условия $(2c - 3)^2 = 3a^2 - 12c + 46$.

$$4c^2 - 12c + 9 = 3a^2 - 12c + 46,$$

$$4c^2 = 3a^2 + 37, |c| = \frac{\sqrt{3a^2 + 37}}{2}, c > 0, c = \frac{\sqrt{3a^2 + 37}}{2}.$$

$$\text{Имеем: } a < \frac{\sqrt{3a^2 + 37}}{2} < a + 1, a \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{cases} \sqrt{3a^2 + 37} > 2a, \\ \sqrt{3a^2 + 37} < 2a + 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + 37 > 4a^2, \\ 4a^2 + 8a + 4 > 3a^2 + 37; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 < 37, \\ a^2 + 8a - 33 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < \sqrt{37}, \\ (a - 3)(a + 11) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |a| < \sqrt{37}, \\ \begin{cases} a > 3, \\ a < -11; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 3 < a < \sqrt{37} \text{ (см. рис. 623).}$$

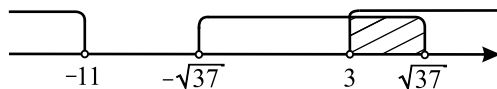


Рис. 623.

Учитывая, что a — натуральное число, получаем: $a = 4; 5; 6$.

$$\text{При } a = 4, \quad c = \frac{\sqrt{3 \cdot 4^2 + 37}}{2} = \frac{\sqrt{85}}{2};$$

$$a = 5, \quad c = \frac{\sqrt{3 \cdot 5^2 + 37}}{2} = \frac{\sqrt{112}}{2} = 2\sqrt{7};$$

$$a = 6, \quad c = \frac{\sqrt{3 \cdot 6^2 + 37}}{2} = \frac{\sqrt{145}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{85}}{2}; 2\sqrt{7}; \frac{\sqrt{145}}{2}.$$

1662. Из условия следует, что $0 < c - a < 1$, откуда $a < c < a + 1$. Выразим c через a из равенства $2c^2 + c = 20a + 10$.

$$2c^2 + c - (20a + 10) = 0; D = 1 + 8(20a + 10) = 160a + 81;$$

$$c_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{160a + 81}}{4}, c > a > 0, c = \frac{-1 + \sqrt{160a + 81}}{4}.$$

Имеем $a < \frac{-1 + \sqrt{160a + 81}}{4} < a + 1, a \in N$.

$$\begin{cases} \sqrt{160a + 81} > 4a + 1, \\ \sqrt{160a + 81} < 4a + 5, \\ a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 160a + 81 > 16a^2 + 8a + 1, \\ 160a + 81 < 16a^2 + 40a + 25, \\ a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a^2 - 19a - 10 < 0, \\ 2a^2 - 15a - 7 > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство отдельно.

$$1. 2a^2 - 19a - 10 < 0, (2a + 1)(a - 10) < 0, -\frac{1}{2} < a < 10.$$

$$2. 2a^2 - 15a - 7 > 0, D = 15^2 + 56 = 281,$$

$$a_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{281}}{4}, a \in \left(-\infty; \frac{15 - \sqrt{281}}{4}\right) \cup \left(\frac{15 + \sqrt{281}}{4}; +\infty\right).$$

Вернёмся к системе, получим $a \in \left(\frac{15 + \sqrt{281}}{4}; 10\right)$.

Учитывая, что a — натуральное число, получаем $a = 8; 9$.

$$\text{При } a = 8 \quad c = \frac{-1 + \sqrt{160 \cdot 8 + 81}}{4} = \frac{\sqrt{1361} - 1}{4};$$

при $a = 9 \quad c = \frac{-1 + \sqrt{160 \cdot 9 + 81}}{4} = \frac{-1 + 39}{4} = 9,5$ — рациональное число.

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{1361} - 1}{4}.$$

1663. Запишем число b в виде $b = ka + c$, где $c, k \in N, c < a$.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a+ka+c}{a} = k + 1 + \frac{c}{a}, 0 < \frac{c}{a} < 1. \text{ Из условия следует, что}$$

$$b-a = k+1; ka+c-a = k+1; k(a-1) = 1+a-c; k = \frac{a-c+1}{a-1} = 1 + \frac{2-c}{a-1}.$$

Так как $k \in N$, то $\frac{2-c}{a-1}$ — целое неотрицательное число, что возможно только при $c = 0, 1, 2$.

1) $c = 0$, тогда $b = k \cdot a$ и числа a и b не являются взаимно простыми.

2) $c = 1, k = 1 + \frac{1}{a-1}$, тогда из условия $k \in N$ получаем $a = 2, k = 2$,

$b = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Проверкой убеждаемся, что пара $a = 2, b = 5$ удовлетворяет всем поставленным условиям.

3) $c = 2, k = 1, b = a + 2$.

Пусть в десятичной записи числа b n цифр ($n \in N$), тогда условие запишется в виде $b - a + \frac{b}{10^n} = \frac{a+b}{a}; 2 + \frac{b}{10^n} = \frac{2a+2}{a}; \frac{b}{10^n} = \frac{2}{a}; ab = 10^n \cdot 2;$

$$ab = 5^n \cdot 2^{n+1}.$$

Так как числа a и b взаимно просты и $a < b$, то возможно два случая.

1. $a = 1, b = 2 \cdot 10^n$. Учитывая, что $b = a + 2$, получаем уравнение $3 = 2 \cdot 10^n$, которое не имеет решений при $n \in N$.

2. $a = 2^{n+1}, b = 5^n, 5^n = 2^{n+1} + 2, 5^n = 2 \cdot (2^n + 1)$ — нет решений при $n \in N$, так как левая часть уравнения нечётна, а правая — чётна.

Ответ: $a = 2, b = 5$.

1664. 1) Так как последняя цифра числа n^2 совпадает с последней цифрой числа b^2 , где b — последняя цифра числа n , то из условия следует, что $b = 1$ или $b = 9$ ($1^2 = 1, 9^2 = 81$).

2) Если a — первая цифра числа n , то $a = 1$, или $a = 3$, или $a = 4$, так как 1^2 и 4^2 начинаются с единицы, а несмотря на то, что $3^2 = 9, n^2$ всё же может начинаться с единицы за счёт переноса разряда при возведении в квадрат.

3) Если $a = 1$, то число n должно удовлетворять условию $10000 < n^2 < 20000$. Следовательно, $100 < n < 100\sqrt{2} \approx 141,1 \Leftrightarrow 101 \leq n \leq 141$. Сумма этих чисел, удовлетворяющих условию задачи, равна:

$$S_1 = (101 + 111 + 121 + 131 + 141) + (109 + 119 + 129 + 139) = \frac{101 + 141}{2} \cdot 5 + \\ + \frac{109 + 139}{2} \cdot 4 = 605 + 496 = 1101.$$

4) Если $a = 3$ или $a = 4$, то $100000 < n^2 < 200000; 100\sqrt{10} < n < 200\sqrt{5}; 316 < n < 447$. Сумма этих чисел, удовлетворяющих условию задачи, равна:

$$S_2 = (319 + 329 + \dots + 439) + (321 + 331 + \dots + 441) = \frac{319 + 439}{2} \cdot 13 + \\ + \frac{321 + 441}{2} \cdot 13 = 4927 + 4953 = 9880.$$

5) $S_1 + S_2 = 1101 + 9880 = 10981$.

Ответ: 10981.

1665. 1) Поскольку x — пятизначное число, то его можно представить в виде:

$$x = x_5 \cdot 10^4 + x_4 \cdot 10^3 + x_3 \cdot 10^2 + x_2 \cdot 10 + x_1 = \overline{x_5 x_4 x_3 x_2 x_1}, \text{ где } 1 \leq x_i \leq 9, i = \overline{1, 5}.$$

2) Покажем, что все числа, получаемые из x циклическими перестановками цифр, взаимно просты с $B = 10^5 - 1$.

$$\frac{\overline{x_4 x_3 x_2 x_1 x_5}}{\overline{x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 0} - \overline{x_5 00000}} + x_5 = x \cdot 10 - x_5(10^5 - 1) = x \cdot 10 - x_5 \cdot B.$$

Так как числа x и 10 взаимно просты с B , то полученное число, а значит, и число, полученное из x перестановкой $\overline{x_4 x_3 x_2 x_1 x_5}$, взаимно просто с B .

Аналогично получаем, что все остальные числа, получаемые из x циклической перестановкой, взаимно просты с B .

Всего из числа x циклическими перестановками (включая тождественную) можно получить 5 чисел.

3) Покажем, что все числа, получаемые из x циклической перестановкой, будут различны.

Пусть при какой-то циклической перестановке получилось исходное число x , то есть

$$x = \overline{x_5 x_4 x_3 x_2 x_1} = \overline{x_k x_{k-1} \dots x_1 x_5 \dots x_{k+1}}, k \leq 5.$$

Тогда произведение

$$\begin{aligned} x(10^k - 1) &= \overline{x_k x_{k-1} \dots x_1 x_5 \dots x_{k+1}} \cdot 10^k - \overline{x_5 x_4 x_3 x_2 x_1} = \overline{x_k x_{k-1} \dots x_1} \cdot 10^5 + \\ &+ \overline{x_5 \dots x_{k+1}} \cdot 10^k - \overline{x_5 x_4 x_3 x_2 x_1} = \overline{x_k x_{k-1} \dots x_1} \cdot 10^5 - \overline{x_k x_{k-1} \dots x_1} = \\ &= \overline{x_k x_{k-1} \dots x_1} \cdot (10^5 - 1) = \overline{x_k x_{k-1} \dots x_1} \cdot B. \end{aligned}$$

Так как по условию числа x и B взаимно просты, то $(10^k - 1)$ делится на $B = 10^5 - 1$.

Следовательно, $k = 5$, то есть такая перестановка тождественна. Значит, все циклические перестановки данного числа x различны.

Ответ: 5.

1666. 1) Числа n и m — полные квадраты. Обозначим $n = n_1^2$, $m = m_1^2$. Тогда $n_1^2 - m_1^2 = 111a$; $(n_1 + m_1)(n_1 - m_1) = 111a = 3 \cdot 37a$.

Так как число 37 — простое, то одно из чисел $(n_1 + m_1)$ или $(n_1 - m_1)$ делится на 37.

2) Так как n и m — трёхзначные числа, то $n_1 < \sqrt{1000}$ и $m_1 < \sqrt{1000}$. Следовательно, $n_1 - m_1 < \sqrt{1000} < 37$. Значит, $(n_1 - m_1)$ не делится на 37. Но тогда $(n_1 - m_1)$ должно делиться на 3а и $(n_1 + m_1)$ делится на 37. Следовательно, $37 \leq n_1 + m_1 < 2\sqrt{1000} < 74$.

3) Получаем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 + m_1 = 37, \\ n_1 - m_1 = 3a, \\ n_1^2 < 1000, \\ m_1^2 \geq 100; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n_1 = \frac{37+3a}{2}, \\ n_1^2 < 1000, \\ m_1 = 37 - n_1, \\ m_1^2 \geq 100. \end{array} \right.$$

Очевидно, что a может быть только нечётным числом. По условию $1 \leq a \leq 9$.

Подбором находим:

$$\text{— при } a = 9: n_1 = \frac{37+27}{2} = 32; n_1^2 = 1024 > 1000;$$

$$\text{— при } a = 7: n_1 = \frac{37+21}{2} = 29; n_1^2 = 841 < 1000;$$

$$m_1 = 37 - 29 = 8; m_1^2 = 64 < 100;$$

$$\text{+ при } a = 5: n_1 = \frac{37+15}{2} = 26; n_1^2 = 676 < 1000;$$

$$m_1 = 37 - 26 = 11; m_1^2 = 121 > 100;$$

$$\text{+ при } a = 3: n_1 = \frac{37+9}{2} = 23; n_1^2 = 529 < 1000;$$

$$m_1 = 37 - 23 = 14; m_1^2 = 196 > 100;$$

$$\text{+ при } a = 1: n_1 = \frac{37+3}{2} = 20; n_1^2 = 400 < 1000;$$

$$m_1 = 37 - 20 = 17; m_1^2 = 289 > 100.$$

Искомые $a \in \{1; 3; 5\}$.

Ответ: 1; 3; 5.

1667. Так как число b — двузначное, то если к целому однозначному числу a приписать справа через запятую десятичную запись числа b , то получится число, равное $a + \frac{b}{100}$. Трёхзначное число, записанное цифрами чисел a и b не меняя порядка, равно $100a + b$ (так как a — однозначное, а b — двузначное). Получим уравнение:

$$4\left(a + \frac{b}{100}\right) = \sqrt{100a + b}; \frac{4}{100}(100a + b) = \sqrt{100a + b}; \sqrt{100a + b} = 25;$$

$$100a + b = 625.$$

Из того, что a — однозначное, b — двузначное и из равенства $100a + b = 625$, следует, что $a = 6, b = 25$.

Ответ: (6; 25).

1668. Так как $S(n) > 0$ и $S(n) \leq S(1999) = 28$, то $1984 \leq n < 2012$.

При $n = 2011$ имеем $n + S(n) = 2015$, при $n = 2010$ имеем $n + S(n) = 2013$.

Осталось рассмотреть числа вида $\overline{200a}$, $\overline{199a}$, $\overline{198a}$, где a — последняя цифра чисел n .

1. Если $n = \overline{200a}$, то $n + S(n) = 2000 + a + 2 + a = 2002 + 2a$, $2002 + 2a = 2012$, $a = 5$, $n = 2005$.

2. Если $n = \overline{199a}$, то $n + S(n) = 1990 + a + 19 + a = 2009 + 2a$, $2009 + 2a = 2012$, $a = 1,5$ — не является цифрой.

3. Если $n = \overline{198a}$, то $n + S(n) = 1980 + a + 18 + a = 1998 + 2a$, $1998 + 2a = 2012$, $a = 7$, $n = 1987$.

Ответ: 1987; 2005.

1669. По условию задачи имеем $100a + b = 3ab$. Заметим, что $3ab$ делится на a , значит, $100a + b$ делится на a . Пусть $b = ta$, причём $t \leq 9$. Тогда $100a + ta = 3a^2t$, $100 + t = 3at$. $3at$ кратно трём, значит, $100 + t$ кратно трём, следовательно, $t = 2$, $t = 5$, $t = 8$ — значения $t \leq 9$, при которых $100 + t$ кратно 3. Выберем значения t , при которых a и b — двузначные числа.

1. Если $t = 2$, то $100 + 2 = 3a \cdot 2$, $a = 102 : 6$, $a = 17$, $b = 17 \cdot 2 = 34$.

2. Если $t = 5$, то $100 + 5 = 3a \cdot 5$, $a = 7$ — не удовлетворяет условию задачи.

3. Если $t = 8$, то $100 + 8 = 3a \cdot 8$, $a = 4,5$ — не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = 17$, $b = 34$.

1670. Если предположить, что из данных цифр можно составить два числа, одно из которых будет в 1234567789 больше другого, то достаточно рассмотреть последнюю цифру каждого из таких чисел. Если последняя цифра меньшего из чисел 2, то последняя цифра большего должна быть 8; если 3, то последняя цифра большего — 7; если 4, то — 6; если 9, то — 1. Следовательно, составить из данных цифр два таких числа невозможно.

Ответ: Нет.

1671. Пусть x — искомое число, тогда $x + 46$ — увеличенное число.

1) Если $x + 46$ — двузначное число, то оно может состоять из цифр 2 и 3 или из цифр 1 и 6 (так как произведение этих двух цифр по условию должно быть равно 6). Таким образом, необходимо проверить четыре числа: 23, 32, 16, 61. Первые три числа не подходят, так как не могут быть получены увеличением натурального числа на 46. Если $x + 46 = 61$, то $x = 15$, его сумма цифр равна 6 и не равна 14.

2) Если $x + 46$ — трёхзначное число, то его первая цифра 1, так как $x + 46$ является суммой двух двузначных чисел. Оставшиеся две цифры, как и в первом случае, — это 2 и 3 или 1 и 6. Проверим все такие числа: 123, 132,

116 и 161.

$x + 46 = 123$; $x = 77$, его сумма цифр $7 + 7 = 14$;

$x + 46 = 132$; $x = 86$, его сумма цифр $8 + 6 = 14$;

$x + 46 = 116$; $x = 70$, его сумма цифр $7 + 0 = 7 \neq 14$;

$x + 46 = 161$; $x = 115$ и не является двузначным числом.

Искомое число — это 77 или 86.

Ответ: 77; 86.

1672. Пусть искомое число a , число с переставленными цифрами — это b ,

тогда $a = \frac{107}{41}b$; $41a = 107b$. Так как 107 — простое число, то a должно

быть кратно 107. Рассмотрим все трёхзначные числа, кратные 107. Это 107, 214, 321, 428, 535, 642, 749, 856, 963. Из них только у числа 642 сумма

цифр равна 12. Действительно, $642 = \frac{107}{41} \cdot 246$.

Ответ: 642.

1673. При $n = 13$ число $6n^2 - n + 1$ равно 1002, его сумма цифр равна 3. Докажем, что меньше сумма цифр не может быть.

Сначала докажем вспомогательное утверждение: $m = 6n^2 - n + 1$ не делится на 5 при любом натуральном n . Для этого последовательно переберём возможные остатки при делении n на 5. Если n даёт остаток 0 при делении на 5, то m даёт остаток 1. Если n даёт остаток 1, то m даёт такой же остаток, как и $6 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 6$, то есть остаток 1. Если n даёт остаток 2, то m даёт такой же остаток, как и $6 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 23$, то есть остаток 3. Если n даёт остаток 3, то m даёт такой же остаток, как и $6 \cdot 3^2 - 3 + 1 = 52$, то есть остаток 2. Если n даёт остаток 4, то m даёт такой же остаток, как и $6 \cdot 4^2 - 4 + 1 = 93$, то есть остаток 3.

Мы доказали, что $m = 6n^2 - n + 1$ не делится на 5 при любом натуральном n . Следовательно, число m не может оканчиваться нулём. Теперь предположим, что существует число $m = 6n^2 - n + 1$ с суммой цифр меньше 3. Из вспомогательного утверждения следует, что это число m должно иметь вид $10^k + 1$, где k — неотрицательное целое (первая и последняя цифры — единицы, все остальные цифры — нули). Тогда $6n^2 - n + 1 = 10^k + 1$; $n(6n - 1) = 10^k$. Так как числа n и $6n - 1$ взаимно просты и $6n - 1 > n$ при всех натуральных n , то последнее равенство может выполняться только в двух случаях:

1) $n = 1$, $6n - 1 = 10^k$, что невозможно ввиду $6n - 1 = 6 \cdot 1 - 1 = 5 \neq 10^k$.

2) $n = 2^k$, $6n - 1 = 5^k$. Тогда при некотором k должно выполняться $6 \cdot 2^k - 1 = 5^k$. При $k = 0$ это равенство не выполняется, так как $6 - 1 \neq 1$.

При $k = 1$ равенство не выполняется, так как $6 \cdot 2 - 1 \neq 5$. При $k \geq 2$ имеем $5^k = 25 \cdot 5^{k-2} > 24 \cdot 2^{k-2} > 6 \cdot 2^k - 1$. Следовательно, при $k \geq 2$ равенство $6 \cdot 2^k - 1 = 5^k$ также не может выполняться. Предположение о существовании числа $m = 6n^2 - n + 1$ с суммой цифр меньше 3 было неверно. Следовательно, наименьшая сумма цифр — это 3.

Ответ: 3.

1674. При $n = 16$ число $8n^2 - 3n + 1$ равно 2001, его сумма цифр равна 3. Докажем, что меньше сумма цифр не может быть.

Сначала докажем вспомогательное утверждение: $m = 8n^2 - 3n + 1$ не делится на 5 при любом натуральном n . Для этого последовательно переберём возможные остатки при делении n на 5. Если n даёт остаток 0 при делении на 5, то m даёт остаток 1. Если n даёт остаток 1, то m даёт такой же остаток, как и $8 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 6$, то есть остаток 1. Если n даёт остаток 2, то m даёт такой же остаток, как и $8 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 27$, то есть остаток 2. Если n даёт остаток 3, то m даёт такой же остаток, как и $8 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 64$, то есть остаток 4. Если n даёт остаток 4, то m даёт такой же остаток, как и $8 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 = 117$, то есть остаток 2.

Мы доказали, что $m = 8n^2 - 3n + 1$ не делится на 5 при любом натуральном n . Следовательно, число m не может оканчиваться нулём. Теперь предположим, что существует число $m = 8n^2 - 3n + 1$ с суммой цифр меньше 3. Из вспомогательного утверждения следует, что это число m должно иметь вид $10^k + 1$, где k — целое неотрицательное число (первая и последняя цифры — единицы, все остальные цифры — нули). Тогда $8n^2 - 3n + 1 = 10^k + 1$; $n(8n - 3) = 10^k$. Так как $\text{НОД}(8n - 3, n) = \text{НОД}(3, n)$, то этот НОД может быть равен только 1 или 3. Кроме того, $8n - 3 > n$ при всех натуральных n . Поэтому равенство $n(8n - 3) = 10^k$ может выполняться только в двух случаях:

1) $n = 1$, $8n - 3 = 10^k$, что невозможно ввиду $8n - 3 = 8 \cdot 1 - 3 = 5 \neq 10^k$.
2) $n = 2^k$, $8n - 3 = 5^k$. Тогда при некотором k должно выполняться $8 \cdot 2^k - 3 = 5^k$. При $k = 0$ это равенство не выполняется, так как $8 - 3 \neq 1$. При $k = 1$ равенство не выполняется, так как $8 \cdot 2 - 3 \neq 5$. При $k = 2$ равенство не выполняется, так как $8 \cdot 4 - 3 \neq 25$. При $k \geq 3$ имеем $5^k = 125 \cdot 5^{k-3} > 64 \cdot 2^{k-3} > 8 \cdot 2^k - 3$. Следовательно, при $k \geq 3$ равенство $8 \cdot 2^k - 3 = 5^k$ также не может выполняться. Предположение о существовании числа $m = 8n^2 - 3n + 1$ с суммой цифр меньше 3 было неверно. Следовательно, наименьшая сумма цифр — это 3.

Ответ: 3.

1675. Пусть x — искомое трёхзначное число. Тогда $x^2 - x \div 1000$;

$$x(x-1) \div 1000; x(x-1) \div 8 \text{ и } x(x-1) \div 125, \text{ то есть } \begin{cases} x = 8k, \\ x = 8k + 1, \\ x = 125m, \\ x = 125m + 1. \end{cases}$$

Перебором среди чисел $125, 125 \cdot 2, 125 \cdot 3, 125 \cdot 4, 125 \cdot 5, 125 \cdot 6, 125 \cdot 7$; $125 + 1, 125 \cdot 2 + 1, 125 \cdot 3 + 1, 125 \cdot 4 + 1, 125 \cdot 5 + 1, 125 \cdot 6 + 1, 125 \cdot 7 + 1$ находим числа вида $8k$ или $8k + 1$ ($k \in N$). Это $125 \cdot 5 = 625 = 78 \cdot 8 + 1$ и $125 \cdot 3 + 1 = 376 = 47 \cdot 8$.

Таким образом, мы нашли два трёхзначных числа, удовлетворяющих заданному условию: 376 и 625.

Ответ: 376; 625.

1676. Пусть x — двузначное число, удовлетворяющее условию.

Тогда $x^3 - x \div 100$; $(x-1) \cdot x \cdot (x+1) \div (5^2 \cdot 2^2)$. Так как только одно из чисел $x-1, x, x+1$ может делиться на 5, то оно же делится на 5^2 . Выпишем все двузначные x , для которых одно из чисел $x-1, x, x+1$ делится на 5^2 . Это 24, 25, 26, 49, 50, 51, 74, 75, 76, 99. Для каждого из этих значений x остаётся проверить, что $(x-1) \cdot x \cdot (x+1) \div 4$. Проверяем:

$$x = 24; 23 \cdot 24 \cdot 25 \div 4;$$

$$x = 25; 24 \cdot 25 \cdot 26 \div 4;$$

$$x = 26; 25 \cdot 26 \cdot 27 \not\div 4, \text{ значение } x = 26 \text{ отбрасываем};$$

$$x = 49; 48 \cdot 49 \cdot 50 \div 4;$$

$$x = 50; 49 \cdot 50 \cdot 51 \not\div 4, \text{ значение } x = 50 \text{ отбрасываем};$$

$$x = 51; 50 \cdot 51 \cdot 52 \div 4;$$

$$x = 74; 73 \cdot 74 \cdot 75 \not\div 4, \text{ значение } x = 74 \text{ отбрасываем};$$

$$x = 75; 74 \cdot 75 \cdot 76 \div 4;$$

$$x = 76; 75 \cdot 76 \cdot 77 \div 4;$$

$$x = 99; 98 \cdot 99 \cdot 100 \div 4.$$

Таким образом, мы нашли 7 натуральных двузначных чисел, удовлетворяющих заданному условию (24, 25, 49, 51, 75, 76, 99).

Ответ: 7.

1677. Для любого действительного числа x через $[x]$ будем обозначать его целую часть, то есть такое целое число, что $0 \leq x - [x] < 1$.

Лемма. Для любого иррационального числа $x > 0$ и любого числа $b \in (0; 1)$ найдутся целые числа p и q , $p > 0$, $q \geq 0$, что $0 < px - q < b$.

Доказательство леммы. Разделим отрезок $[0; 1]$ на равные отрезки, длина каждого из которых меньше b . Пусть количество этих отрезков равно k , тогда среди чисел $x - [x]$, $2x - [2x]$, \dots , $(k+1)x - [(k+1)x]$, есть два числа, принадлежащих одному и тому же отрезку. Выберем такие числа $ix - [ix]$ и $jx - [jx]$, где $ix - [ix] \geq jx - [jx]$. Обозначим $\Delta = (ix - [ix]) - (jx - [jx]) = (i - j)x - ([ix] - [jx])$. По построению Δ — иррационально и $0 \leq \Delta < b$. К тому же, $\Delta \neq 0$, так как в противном случае

$x = \frac{[ix] - [jx]}{i - j}$ — рациональное число. Введём обозначения $p_0 = i - j$,

$q_0 = [ix] - [jx]$. Тогда $\Delta = p_0x - q_0$ и $0 < p_0x - q_0 < b$. Так как p_0 и q_0 являются целыми числами, то для выполнения последнего неравенства необходимо $p_0q_0 \geq 0$. Рассмотрим 2 случая:

1) $p_0 > 0$, $q_0 \geq 0$. В этом случае лемма доказана, так как $p = p_0$, $q = q_0$.

2) $p_0 < 0$, $q_0 \leq 0$. Теперь подберём натуральное число k , чтобы $k\Delta$ было меньше 1, но отличалось от 1 менее чем на Δ . Это число $k = \left\lceil \frac{1}{\Delta} \right\rceil$. Дей-

ствительно, $\left\lceil \frac{1}{\Delta} \right\rceil \cdot \Delta < \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta = 1$;

$\left\lceil \frac{1}{\Delta} \right\rceil \cdot \Delta + \Delta > \left\lceil \frac{1}{\Delta} \right\rceil \cdot \Delta + \Delta \cdot \left(\frac{1}{\Delta} - \left\lceil \frac{1}{\Delta} \right\rceil \right) = 1$. Имеем: $1 - \Delta < k\Delta < 1$,
 $-1 < -k\Delta < -1 + \Delta$,

$0 < 1 - k\Delta < \Delta$, отсюда следует неравенство

$0 < 1 - k\Delta < b$,

$0 < -kp_0x - (-kq_0 - 1)$. В этом случае $p = -kp_0$, $q = -kq_0 - 1$. Лемма доказана.

Перейдём к решению исходной задачи. Обозначим $3842561 = c$. Тогда по лемме найдутся такие целые числа p и q , $p > 0$, $q \geq 0$, что $0 < p \lg 2 - q < \lg(c+1) - \lg c$. Отсюда следует, что найдётся такое натуральное число N , что $\lg c < N(p \lg 2 - q) < \lg(c+1)$;
 $Nq + \lg c < Np \lg 2 < Nq + \lg(c+1)$; $10^{Nq} \cdot c < 2^{Np} < 10^{Nq} \cdot (c+1)$, откуда Np — искомая степень числа 2.

Ответ: да.

1678. Для любого действительного числа x через $[x]$ будем обозначать его целую часть, то есть такое целое число, что $0 \leq x - [x] < 1$.

Лемма. Для любого иррационального числа $x > 0$ и любого числа $b \in (0; 1)$ найдутся целые числа p и q , $p > 0$, $q \geq 0$, что $0 < px - q < b$.

Доказательство леммы. Разделим отрезок $[0; 1]$ на равные отрезки, длина каждого из которых меньше b . Пусть количество этих отрезков равно k , тогда среди чисел $x - [x]$, $2x - [2x]$, \dots , $(k+1)x - [(k+1)x]$, есть два числа, принадлежащих одному и тому же отрезку. Выберем такие числа $ix - [ix]$ и $jx - [jx]$, где $ix - [ix] \geq jx - [jx]$. Обозначим $\Delta = (ix - [ix]) - (jx - [jx]) = (i-j)x - ([ix] - [jx])$. По построению Δ — иррационально и $0 \leq \Delta < b$. К тому же $\Delta \neq 0$, так как в противном случае

$x = \frac{[ix] - [jx]}{i - j}$ — рациональное число. Введём обозначения: $p_0 = i - j$,

$q_0 = [ix] - [jx]$. Тогда $\Delta = p_0x - q_0$ и $0 < p_0x - q_0 < b$. Так как p_0 и q_0 являются целыми числами, то для выполнения последнего неравенства необходимо $p_0q_0 \geq 0$.

Рассмотрим 2 случая:

- 1) $p_0 > 0$, $q_0 \geq 0$. В этом случае лемма доказана, так как $p = p_0$, $q = q_0$.
- 2) $p_0 < 0$, $q_0 \leq 0$. Теперь подберём натуральное число k , чтобы $k\Delta$ было меньше 1, но отличалось от 1 менее чем на Δ . Это число $k = \left\lceil \frac{1}{\Delta} \right\rceil$. Дей-

ствительно, $\left\lceil \frac{1}{\Delta} \right\rceil \cdot \Delta < \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta = 1$;

$\left\lceil \frac{1}{\Delta} \right\rceil \cdot \Delta + \Delta > \left\lceil \frac{1}{\Delta} \right\rceil \cdot \Delta + \Delta \cdot \left(\frac{1}{\Delta} - \left\lceil \frac{1}{\Delta} \right\rceil \right) = 1$. Имеем: $1 - \Delta < k\Delta < 1$,

$-1 < -k\Delta < -1 + \Delta$,

$0 < 1 - k\Delta < \Delta$, отсюда следует неравенство

$0 < 1 - k\Delta < b$,

$0 < -kp_0x - (-kq_0 - 1)$. В этом случае $p = -kp_0$, $q = -kq_0 - 1$. Лемма доказана.

Перейдём к решению исходной задачи. Обозначим $100032452 = c$. Тогда по лемме найдутся целые числа p и q , $p > 0$, $q \geq 0$, что

$0 < p \lg 7 - q < \lg(c+1) - \lg c$. Отсюда следует, что найдётся натуральное число N , что $\lg c < N(p \lg 7 - q) < \lg(c+1)$;

$Nq + \lg c < Np \lg 7 < Nq + \lg(c+1)$; $10^{Nq} \cdot c < 7^{Np} < 10^{Nq} \cdot (c+1)$, откуда Np — искомая степень числа 7.

Ответ: Да.

1679. $n = 1$, 14 не является полным квадратом. $n = 2$, $144 = 12^2$; $n = 3$, $1444 = 38^2$. Если $n \geq 4$, $\underbrace{144 \dots 4}_n \text{ цифр} = m^2$, где $m \in N$, то m — чётно. $m = 2p$,

$$p \in N. A = \underbrace{144 \dots 4}_{n \text{ цифр}} = 4p^2.$$

$$A = 144 \underbrace{0 \dots 0}_{n-2 \text{ цифры}} + \underbrace{44 \dots 4}_{n-2 \text{ цифры}} = 4(36 \underbrace{11 \dots 1}_{n-2 \text{ цифры}}).$$

$$\frac{A}{4} = 36 \underbrace{1 \dots 1}_{n-2 \text{ цифры}} = p^2 \text{ — нечетно, } p = 2t + 1. \quad 36 \underbrace{1 \dots 1}_{n-2 \text{ цифры}} = 4t^2 + 4t + 1;$$

$$36 \underbrace{1 \dots 1}_{n-3 \text{ цифры}} 0 = 4(t^2 + t) \text{ делится на 4. Но если число делится на 4, оно не}$$

может заканчиваться на 10. Получили противоречие. Значит, при $n \geq 4$ число A не может быть полным квадратом.

Ответ: $n = 2$; $n = 3$.

1680. Пусть \overline{xyz} — искомое трёхзначное число, $z^2 = xy \cdot \overline{xyz} - \overline{yxz} = 270$, то есть $100x + 10y + z - 100y - 10x - z = 270$. $90x - 90y = 270$, $x = 3 + y$.

$$z^2 = (3 + y)y \Rightarrow z \text{ — чётное, } y(y + 3) : 4, \text{ то есть } \begin{cases} y : 4, \\ (y + 3) : 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = 4, \\ y + 3 = 4, \\ y + 3 = 8. \end{cases}$$

Находим, что $y = 0$ или $y = 1$, отсюда $\overline{xyz} = 300$, $\overline{xyz} = 412$.

Ответ: 300 или 412.

1681. Пусть искомое число — это $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$, по условию $\frac{\overline{xyz} - \overline{zxy}}{72} = m$, $m \geq 0$, $m \in Z$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} 4x = y + z, \\ 100x + 10y + z - (100x + 10z + y) = 72m; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = y + z, \\ 9y - 9z = 72m; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x = y + z, \\ y - z = 8m; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x = y + z, \\ y = 8m + z. \end{cases} \quad \text{Так как } y - z \leq 8, \text{ то}$$

$m \leq 1$, то есть $m = 0$ или $m = 1$.

$$1) m = 1: \begin{cases} 4x = y + z, \\ y = 8 + z; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x = y + z, \\ 8 = y - z; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 8, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$2) m = 0: y = z, 4x = 2y, 2x = y, \text{ при этом } y : 2.$$

y может принимать значения 0, 2, 4, 6, 8.

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \begin{cases} y = 0, \\ 4x = z, \\ z = 0; \end{cases} \text{ решений нет, так как } x \neq 0; \\
 \text{б) } & \begin{cases} y = 2, \\ 4x = 4, \\ z = 2; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 2. \end{cases} \\
 \text{в) } & \begin{cases} y = 4, \\ 4x = 8, \\ y = z; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 4, \\ z = 4. \end{cases} \\
 \text{г) } & \begin{cases} y = 6, \\ 4x = 12, \\ y = z; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 6, \\ z = 6. \end{cases} \\
 \text{д) } & \begin{cases} y = 8, \\ 4x = 16, \\ y = z; \end{cases} \begin{cases} x = 4, \\ y = 8, \\ z = 8. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: 280, 122, 244, 366, 488.

1682. Пусть x — вычеркнутая цифра, a — часть числа слева от x , c — часть числа справа от x , тогда число имеет вид \overline{axc} . Пусть цифра x стоит на $(n+1)$ -м месте (считая справа). Тогда $\overline{axc} = a \cdot 10^{n+1} + x \cdot 10^n + c$.

После вычёркивания цифры x получится число $\overline{ac} = a \cdot 10^n + c$. Рассмотрим отношение исходного числа к полученному:

$$r = \frac{a \cdot 10^{n+1} + x \cdot 10^n + c}{a \cdot 10^n + c}, \text{ где } c < 10^n.$$

Вычитая 10 из обеих частей равенства и производя несложные преобразования, получим

$$r - 10 = \frac{x \cdot 10^n - 9c}{a \cdot 10^n + c} \leq \frac{x}{a} \leq \frac{9}{a} \leq 9.$$

Обозначим $l = r - 10$. Умножая последнее равенство на знаменатель и приводя подобные члены, получим $(x - la) \cdot 10^n = (l + 9)c$.

Если $l \leq 0$, то левая часть последнего равенства положительна, значит, $l + 9 > 0$. Итак, $-8 \leq l \leq 9$. Ясно также, что $l \neq 0$ (иначе десятичная запись числа c оканчивается нулём).

Далее покажем, что a — цифра (т.е. $a < 10$). Рассмотрим два случая: $l > 0$ и $l < 0$.

Пусть $l > 0$. Из равенства следует, что $x - la > 0$, значит, $a < \frac{x}{l} \leq \frac{9}{l} \leq 9$.

Пусть $l < 0$, тогда $x - la = \frac{(l+9)c}{10^n} < \frac{9 \cdot 10^n}{10^n} = 9$, откуда $(-la) < 9$, и,

значит, $a < 9$.

Следовательно, десятичная запись числа состоит из $n+2$ цифр. Поэтому, чтобы найти максимальное исходное число, нужно найти максимальное n .

Число c по условию не оканчивается нулём, поэтому разложение c на простые множители либо не содержит двоек, либо не содержит пятёрок.

1) Пусть разложение числа c не содержит двоек. Рассмотрим правую часть равенства. Так как $1 \leq l+9 \leq 18$, число $l+9$ может делиться на 4-ю степень двойки ($l+9=16$), но не может делиться на 5-ю ($2^5=32>18$). Поэтому $n \leq 4$. Пусть $n=4$, тогда $l+9=16$ и равенство перепишется в виде $(x-7a) \cdot 5^4 = c$.

Поскольку x — это цифра, то $a=1$, $x=8$ или $x=9$. При $x=9$ число c оканчивается нулём и потому не подходит. При $x=8$ получаем $c=625$, тогда $\overline{axc} = 180625$.

2) Пусть число c не содержит пятёрок. Число $l+9$ делится на степень пятёрки не выше первой, поэтому $n \leq 1$, и, значит, число не будет максимальным.

Ответ: 180625.

1683. Пусть $N = 100x + 10y + z$ — искомое число, для которого $N = x! + y! + z!$. Число $7! = 5040$ четырёхзначное, поэтому ни одна цифра числа N не превосходит 6, а само число N меньше 700. Но тогда ни одна цифра числа N не превосходит 5, поскольку $6! = 720$. Неравенство $3 \cdot 4! = 72 < 100$ показывает, что хотя бы одна цифра числа N равна 5. При этом $x \neq 5$, поскольку $3 \cdot 5! = 360 < 500$. Это неравенство показывает также, что $x \leq 3$. Более того, $x \leq 2$, поскольку $3! + 2 \cdot 5! = 246 < 300$. Число 255 не удовлетворяет условию задачи, а если лишь одна цифра искомого числа равна 5, то $x \leq 1$, поскольку $2! + 5! + 4! = 146 < 200$. Так как $1! + 5! + 4! = 145 < 150$, получаем $y \leq 4$. Следовательно, $z = 5$. Учитывая, что $x = 1$ и $0 \leq y \leq 4$, находим единственное решение $N = 145$.

Ответ: 145.

1685. Вначале докажем, что диагональ не проходит через узлы сетки, лежащие внутри прямоугольника. Предположим противное, то есть диагональ проходит через некоторый внутренний узел. Введём прямоугольную декартову систему координат так, что левая нижняя вершина прямоугольника будет началом отсчёта, а оси проходят через стороны прямоугольника. Тогда координаты правой верхней вершины прямоугольника будут (m, n) , а координаты внутреннего узла, через который прошла

диагональ, будут (m_1, n_1) . Из подобия прямоугольных треугольников получаем: $\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1}$; $mn_1 = nm_1$. Отсюда mn_1 делится на n . Так как m и n взаимно просты, то n_1 должно делиться на n , что невозможно ввиду $n_1 < n$. Получили противоречие, следовательно, ложным было предположение о прохождении диагонали через внутренний узел прямоугольника.

Будем двигать точку по диагонали от левой нижней к правой верхней вершине прямоугольника. Так как диагональ не проходит через внутренние узлы, то точка при движении пройдёт через $m - 1$ вертикальных и $n - 1$ горизонтальных сторон клеток. При каждом переходе через сторону клетки точка попадает в новую клетку. Учитывая также клетку, находящуюся в начале движения, получим, что диагональ прямоугольника пересекает $(m - 1) + (n - 1) + 1 = m + n - 1$ клеток. Непересечёнными останутся $mn - m - n + 1 = (m - 1)(n - 1)$ клеток. Исходя из условия, получим уравнение $(m - 1)(n - 1) = 116$, которое решим в натуральных числах. Натуральными делителями числа 116 являются 1, 2, 4, 29, 58, 116. Учитывая условие $m > n$, получим три решения последнего уравнения:

$$\begin{cases} m - 1 = 116, \\ n - 1 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 117, \\ n = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m - 1 = 58, \\ n - 1 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 59, \\ n = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m - 1 = 29, \\ n - 1 = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 30, \\ n = 5. \end{cases}$$

Из найденных решений условию задачи удовлетворяют только первые два, так как $\text{НОД}(30, 5) = 5 \neq 1$.

Ответ: (117; 2), (59; 3).

1686. 1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(7 + 8 + \dots + 15)(3 + 4 + \dots + 8) = \frac{7+15}{2} \cdot 9 \cdot \frac{3+8}{2} \cdot 6 = 3267.$$

2. Расстановка знаков в полученной сумме всевозможных произведений не меняет чётности результата. Но один из результатов, а именно 3267, нечётен. Следовательно, наименьшее по абсолютной величине значение также является нечётным натуральным числом. Значит, меньше единицы оно быть не может. Но единица может быть получена, например, следующим образом:

$$(-7 - 8 - 9 + 10 - 11 + 12 + 13 - 14 + 15) \cdot (-3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: 1; 3267.

1687. 1. Наибольшая сумма получится, если все слагаемые взять со знаком плюс. Но тогда эта сумма всевозможных произведений равна произведению

$$(5 + 6 + \dots + 13)(11 + 12 + \dots + 20) = \frac{5+13}{2} \cdot 9 \cdot \frac{11+20}{2} \cdot 10 = 12\,555.$$

2. Расстановка знаков в полученной сумме всевозможных произведений не меняет чётности результата. Но один из результатов, а именно 12 555, нечётен. Следовательно, наименьшее по абсолютной величине значение также является нечётным натуральным числом. Значит, меньше единицы оно быть не может. Но единица может быть получена, например, следующим образом:

$$(5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10 - 11 + 12 - 13) \cdot (-11 + 12 - 13 + 14 - 15 + 16 + 17 - 18 + 19 - 20) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: 1; 12 555.

1688. 1. Если все числа первого набора взяты с плюсами, а второго — с минусами, то сумма максимальна и равна

$$11 \cdot (10 + 11 + \dots + 18) - 9 \cdot (-2 - 3 - \dots - 12) = \\ = 11 \cdot \left(\frac{10+18}{2} \cdot 9\right) + 9 \cdot \left(\frac{2+12}{2} \cdot 11\right) = 2079.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечётной, то число нечётных слагаемых в ней — нечётно, причем это свойство суммы не зависит от знака любого её слагаемого. Поэтому любая из возможных сумм будет нечётной, то есть отличной от 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$11 \cdot (-10 - 11 + 12 - 13 + 14 - 15 - 16 + 17 + 18) - \\ - 9 \cdot (-2 - 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12) = 11 \cdot (-4) - 9 \cdot (-5) = \\ = -44 + 45 = 1.$$

Ответ: 1; 2079.

1689. 1. Если все числа первого набора взяты со знаком «+», а второго — со знаком «-», то сумма максимальна и равна

$$9 \cdot (2 + 3 + \dots + 8) - 7 \cdot (-20 - 21 - \dots - 28) = \\ = 9 \cdot \frac{2+8}{2} \cdot 7 + 7 \cdot \frac{20+28}{2} \cdot 9 = 1827.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечётной, то число нечётных слагаемых в ней нечётно, причём это свойство суммы не зависит от знака любого её слагаемого. Поэтому любая из возможных сумм будет нечётной, то есть отличной от нуля.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей перестановке знаков:

$$9 \cdot (2 + 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8) + 7 \cdot (20 + 21 + 22 + 23 + 24 - 25 - 26 - 27 - 28) = 9 \cdot (-3) + 7 \cdot 4 = -27 + 28 = 1.$$

Ответ: 1; 1827.

1690. Наибольшая сумма достигается, если перед каждым произведением поставить знак плюс:

$$S_{\max} = (3 + 4 + \dots + 11) \cdot (13 + 14 + 15 + 16 + 17) = 63 \cdot 75 = 4725.$$

Заметим, что если поменять знак перед произведением, значение которого равно k , то общая сумма изменится на величину $2k$ и её чётность останется прежней. Так как найденная максимальная сумма нечётна, то при любой расстановке знаков сумма будет нечётной, следовательно, не равной нулю. Покажем, как построить сумму, равную единице:

$$\begin{aligned} S_{\min} &= 3 \cdot (13 - 14 + 15 - 16 + 17) + 4 \cdot (-13 - 14 + 15 - 16 + 17) + \\ &+ (5 + 6 + 7 - 8 - 9 + 10 - 11) \cdot (13 + 14 + 15 + 16 + 17) = \\ &= 3 \cdot 15 + 4 \cdot (-11) + 0 \cdot 75 = 45 - 44 = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1 и 4725.

1691. Заметим, что алгебраическая сумма частных чисел $2, 3, \dots, 6, 7$ и $\frac{1}{8}$,

$\frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{17}$ равна соответствующей алгебраической сумме произведений чисел $2, 3, \dots, 6, 7$ и $8, 9, \dots, 17$. Наибольшего значения эта сумма достигает, если перед каждым слагаемым поставить знак плюс:

$$S_{\max} = (2 + 3 + \dots + 7) \cdot (8 + 9 + \dots + 17) = 27 \cdot 125 = 3375.$$

Заметим, что если поменять знак перед произведением, значение которого равно k , то общая сумма изменится на величину $2k$, и её чётность останется прежней. Так как найденная максимальная сумма нечётна, то при любой расстановке знаков сумма будет нечётной, следовательно, не равной нулю.

Покажем, как построить сумму, равную 1:

$$S_{\min} = (2 + 3 - 4 + 5 - 6 - 7 + 8) \cdot (8 - 9 - 10 + 11 + 12 - 13 - 14 + 15 - 16 + 17) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: 1 и 3375.

1692. После указанных действий получим алгебраическую сумму всех чисел первого набора с выбранными знаками, умноженную на 5 (количество чисел второй группы), и сумму всех чисел второго набора с выбранными знаками, умноженную на 9 (количество чисел первой группы).

Алгебраическая сумма максимальна, если все слагаемые положитель-

ны. Поставив перед каждым из чисел знак плюс, получим:

$$5 \cdot (3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) + 9 \cdot (13 + 14 + 15 + 16 + 17) = 315 + 675 = 990.$$

Наименьшая возможная по модулю сумма равна 0 и достигается при следующей расстановке знаков:

$$5 \cdot (-3 - 4 - 5 - 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) + 9 \cdot (-13 + 14 - 15 + 16 - 17) = 0.$$

Ответ: 0; 990.

1693. После указанных действий получим алгебраическую сумму всех чисел первого набора с выбранными знаками, умноженную на 10 (количество чисел второй группы), и сумму всех чисел второго набора со знаками, противоположными выбранным, умноженную на 6 (количество чисел первой группы).

Алгебраическая сумма максимальна, если все слагаемые положительны. Поставив перед каждым из чисел первой группы знак плюс, а второй — знак минус, получим:

$$10 \cdot (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 6 \cdot (8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17) = 750 + 270 = 1020.$$

Наименьшая возможная по модулю сумма равна 0 и достигается при следующей расстановке знаков:

$$10 \cdot (2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7) - 6 \cdot (8 - 9 + 10 - 11 + 12 - 13 + 14 - 15 + 16 - 17) = 0.$$

Ответ: 0; 1020.

1694. Пусть n — искомое натуральное число.

Тогда $n = 4x_1^5 = 5y_1^4$, где $x_1, y_1 \in N$.

Значит, $x_1^5 : 5 \Rightarrow x_1 : 5$, то есть $x_1 = 5x_2, x_2 \in N$.

Кроме того, $y_1^4 : 4 \Rightarrow y_1 : 2 \Rightarrow y_1 = 2y_2, y_2 \in N$.

Тогда из равенства $4x_1^5 = 5y_1^4$ получаем равенство $4 \cdot 5^5 \cdot x_2^5 = 5 \cdot 2^4 \cdot y_2^4$; $5^4 x_2^5 = 2^2 y_2^4$.

Отсюда следует, что $x_2^5 : 4 \Rightarrow x_2 : 2 \Rightarrow x_2 = 2x_3, x_3 \in N$ и $y_2^4 : 5^4 \Rightarrow y_2 : 5 \Rightarrow y_2 = 5y_3, y_3 \in N$.

Тогда получим равенство $5^4 \cdot 2^5 \cdot x_3^5 = 2^2 \cdot 5^4 \cdot y_3^4$; $2^3 x_3^5 = y_3^4$. Отсюда $y_3^4 : 2^3 \Rightarrow y_3 : 2 \Rightarrow y_3 = 2y_4, y_4 \in N$.

Получим равенство $2^3 \cdot x_3^5 = 2^4 \cdot y_4^4$; $x_3^5 = 2y_4^4$. Следовательно, $x_3^5 : 2 \Rightarrow x_3 : 2 \Rightarrow x_3 = 2x_4, x_4 \in N$.

Получим равенство $2^5 x_4^5 = 2y_4^4$; $2^4 x_4^5 = y_4^4 \Rightarrow y_4^4 : 2^4 \Rightarrow y_4 : 2 \Rightarrow$

$y_4 = 2y_5, y_5 \in N$.

Получим равенство $2^4 x_4^5 = 2^4 y_5^4, x_4^5 = y_5^4$. Наименьшие натуральные значения, удовлетворяющие последнему равенству: $x_4 = 1, y_5 = 1$. Итак, $n = 4x_1^5 = 4 \cdot 5^5 \cdot x_2^5 = 4 \cdot 5^5 \cdot 2^5 \cdot x_3^5 = 4 \cdot 5^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 \cdot x_4 = 4 \cdot 5^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 = 5^5 \cdot 2^{12} = 12\,800\,000$.

Ответ: 12 800 000.

1695. Пусть n — искомое натуральное число.

Тогда $n = 2x_1^5 = 5y_1^2, x_1, y_1 \in N$. Отсюда

$$x_1^5 : 5 \Rightarrow x_1 : 5, x_1 = 5x_2, x_2 \in N;$$

$$y_1^2 : 2 \Rightarrow y_1 : 2, y_1 = 2y_2, y_2 \in N.$$

Из равенства $2x_1^5 = 5y_1^2$ получим равенство $2 \cdot 5^5 \cdot x_2^5 = 5 \cdot 2^2 \cdot y_2^2$;

$$5^4 x_2^5 = 2y_2^2. \text{ Отсюда } x_2^5 : 2 \Rightarrow x_2 : 2 \Rightarrow x_2 = 2x_3, x_3 \in N,$$

$$y_2^2 : 5^4 \Rightarrow y_2 : 5^2 \Rightarrow y_2 = 5^2 y_3, y_3 \in N.$$

$$\text{Получим } 5^4 \cdot 2^5 \cdot x_3^5 = 2 \cdot 5^4 \cdot y_3^2; \quad 2^4 x_3^5 = y_3^2.$$

$$\text{Отсюда } y_3^2 : 2^4 \Rightarrow y_3 : 2^2 \Rightarrow y_3 = 2^2 y_4, y_4 \in N.$$

$$\text{Получим } 2^4 x_3^5 = 2^4 y_4^2; \quad x_3^5 = y_4^2.$$

Наименьшие натуральные значения, удовлетворяющие последнему равенству: $x_3 = 1, y_4 = 1$.

$$\text{Итак, } n = 2 \cdot x_1^5 = 2 \cdot 5^5 \cdot x_2^5 = 2 \cdot 5^5 \cdot 2^5 \cdot x_3^5 = 5^5 \cdot 2^6 = 200\,000.$$

Ответ: 200 000.

1696. Требуется найти все такие пары чисел $(a, b), a, b \in N$, что $a^2 - b^2 = 33; (a - b) \cdot (a + b) = 33$. Следовательно, числа $x = a - b$ и $y = a + b$, где $x < y$, являются делителями числа 33.

Возможны следующие случаи:

$$1) x = 1, y = 33, \text{ тогда } \begin{cases} a - b = 1, \\ a + b = 33; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ 2b = 32; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 17, \\ b = 16. \end{cases}$$

$$2) x = 3, y = 11, \text{ тогда } \begin{cases} a - b = 3, \\ a + b = 11; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + b, \\ 2b = 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7, \\ b = 4. \end{cases}$$

Ответ: (17; 16), (7; 4).

1697. Требуется найти все такие пары чисел $(a, b), a, b \in N$, что $a^2 - b^2 = 77; (a - b) \cdot (a + b) = 77$. Следовательно, числа $x = a - b$ и $y = a + b$, где $x < y$, являются делителями числа 77.

Возможны следующие случаи:

$$1) x = 1, y = 77, \text{ тогда } \begin{cases} a - b = 1, \\ a + b = 77; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ 2b = 76; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 39, \\ b = 38. \end{cases}$$

$$2) x = 7, y = 11, \text{ тогда } \begin{cases} a - b = 7, \\ a + b = 11; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 + b, \\ 2b = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9, \\ b = 2. \end{cases}$$

Ответ: (9; 2), (39; 38).

$$1698. \frac{n^2 + 13}{n + 1} \in N \Leftrightarrow n^2 + 13 : n + 1 \Leftrightarrow n^2 + 13 - n(n + 1) : n + 1 \Leftrightarrow$$

$$13 - n : n + 1 \Leftrightarrow 13 - n + n + 1 : n + 1 \Leftrightarrow 14 : n + 1.$$

$$\text{Так как } n + 1 \in N, n + 1 \geq 2, \text{ то } \begin{cases} n + 1 = 2, \\ n + 1 = 7, \\ n + 1 = 14; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1, \\ n = 6, \\ n = 13. \end{cases}$$

Ответ: 1; 6; 13.

$$1699. \frac{m^2 - 4}{m + 3} \in Z \Leftrightarrow m^2 - 4 : m + 3 \Leftrightarrow m^2 - 4 - m(m + 3) : m + 3 \Leftrightarrow$$

$$3m + 4 : m + 3 \Leftrightarrow 3m + 4 - 3(m + 3) : m + 3 \Leftrightarrow 5 : m + 3.$$

$$\text{Отсюда: } \begin{cases} m + 3 = -5, \\ m + 3 = -1, \\ m + 3 = 1, \\ m + 3 = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -8, \\ m = -4, \\ m = -2, \\ m = 2. \end{cases}$$

Ответ: -8; -4; -2; 2.

$$1700. -3xy - 10x + 13y + 35 = 0.$$

Умножим обе части уравнения на -3. Уравнение примет вид:

$$9xy + 30x - 39y - 105 = 0; 3x(3y + 10) - 13(3y + 10) + 130 - 105 = 0;$$

$$(3y + 10)(3x - 13) = -25.$$

Делители числа -25: $\pm 1, \pm 5, \pm 25$.

Множество всех целочисленных решений исходного уравнения содержится во множестве целочисленных решений систем уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x - 13 = 1, \\ 3y + 10 = -25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{3}, \\ y = -\frac{35}{3}; \end{cases} \quad \text{— не удовлетворяет условию}$$

$x, y \in Z$.

$$2) \begin{cases} 3x - 13 = -1, \\ 3y + 10 = 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x - 13 = 5, \\ 3y + 10 = -5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = -5. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x - 13 = -5, \\ 3y + 10 = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3}, \\ y = -\frac{5}{3}; \end{cases} \quad \text{— не удовлетворяет условию}$$

$x, y \in Z$.

$$5) \begin{cases} 3x - 13 = 25, \\ 3y + 10 = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{38}{3}, \\ y = -\frac{11}{3}; \end{cases} \quad \text{— не удовлетворяет условию}$$

$x, y \in Z$.

$$6) \begin{cases} 3x - 13 = -25, \\ 3y + 10 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = -3. \end{cases}$$

Ответ: $(-4; -3), (4; 5), (6; -5)$.

1701. $3xy + 16x + 13y + 61 = 0$.

Умножим обе части уравнения на 3. Уравнение примет вид:

$$9xy + 48x + 39y + 183 = 0,$$

$$3y(3x + 13) + 16(3x + 13) - 208 + 183 = 0,$$

$$(3x + 13)(3y + 16) = 25.$$

Делители числа 25: $\pm 1, \pm 5, \pm 25$.

Множество всех целочисленных решений исходного уравнения содержится во множестве целочисленных решений систем уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x + 13 = 1, \\ 3y + 16 = 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = 3. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + 13 = -1, \\ 3y + 16 = -25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{14}{3}, \\ y = -\frac{41}{3}; \end{cases} \quad \text{— не удовлетворяет условию}$$

$x, y \in Z$.

$$3) \begin{cases} 3x + 13 = 5, \\ 3y + 16 = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{3}, \\ y = -\frac{11}{3}; \end{cases} \quad \text{— не удовлетворяет условию}$$

$x, y \in Z$.

$$4) \begin{cases} 3x + 13 = -5, \\ 3y + 16 = -5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ y = -7. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 3x + 13 = 25, \\ 3y + 16 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = -5. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x + 13 = -25, \\ 3y + 16 = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{38}{3}, \\ y = -\frac{17}{3}; \end{cases} \quad \text{— не удовлетворяет условию}$$

$x, y \in Z$.

Ответ: $(-6; -7), (-4; 3), (4; -5)$.

1702. Из условия следует: $1000a + a + 1 = b^2 \Leftrightarrow 1001a = b^2 - 1, a, b \in N, 100 \leq a \leq 999$. Отсюда $100101 \leq b^2 \leq 1000000; 316 \leq b \leq 1000$. $1001a = b^2 - 1; 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a = (b - 1)(b + 1)$. Числа $b - 1$ и $b + 1$ не могут одновременно делиться ни на какое натуральное $p > 2$, так как иначе $(b + 1) - (b - 1) \vdots p; 2 \vdots p$, что невозможно. Поэтому из

$(b - 1)(b + 1) \vdots (7 \cdot 11 \cdot 13)$ получаем 8 случаев:

1) $b - 1 \vdots 7 \cdot 11 \cdot 13 \Rightarrow b - 1 \geq 1001 \Rightarrow b \geq 1002$. Противоречие с $b \leq 1000$.

2) $b - 1 \vdots 7 \cdot 11, b + 1 \vdots 13 \Rightarrow b = 77k + 1, k \in N, 5 \leq k \leq 12$. $b + 1 = 77k + 2 \equiv -k + 2 \pmod{13}; -k + 2 \not\equiv 0 \pmod{13}$ при $5 \leq k \leq 12$.

Здесь нет допустимых значений k , при которых $b + 1 \vdots 13$.

3) $b - 1 \vdots 7 \cdot 13, b + 1 \vdots 11 \Rightarrow b = 91k + 1, k \in N, 4 \leq k \leq 10$. $b + 1 = 91k + 2 \equiv 3k + 2 \pmod{11}; 3k + 2 \not\equiv 0 \pmod{11}$ при $4 \leq k \leq 10$.

Здесь нет допустимых значений k , при которых $b + 1 \vdots 11$.

4) $b - 1 \vdots 7, b + 1 \vdots 11 \cdot 13 \Rightarrow b = 143k - 1, k \in N, 3 \leq k \leq 7$. $b - 1 = 143k - 2 \equiv 3k - 2 \pmod{7}; 3k - 2 \equiv 0 \pmod{7}$ при $k = 3$. Имеем: $b + 1 = 143 \cdot 3, b - 1 = 143 \cdot 3 - 2 = 427 = 61 \cdot 7; 1001a = 143 \cdot 3 \cdot 61 \cdot 7; a = 3 \cdot 61 = 183$.

5) $b - 1 \vdots 11, b + 1 \vdots 7 \cdot 13 \Rightarrow b = 91k - 1, k \in N, 4 \leq k \leq 11$. $b - 1 = 91k - 2 \equiv 3k - 2 \pmod{11}; 3k - 2 \equiv 0 \pmod{11}$ при $k = 8$. Имеем: $b + 1 = 91 \cdot 8, b - 1 = 91 \cdot 8 - 2 = 726 = 66 \cdot 11; 1001a = 91 \cdot 8 \cdot 66 \cdot 11; a = 8 \cdot 66 = 528$.

6) $b - 1 \vdots 11 \cdot 13, b + 1 \vdots 7 \Rightarrow b = 143k + 1, k \in N, 3 \leq k \leq 6$. $b + 1 = 143k + 2 \equiv 3k + 2 \pmod{7}; 3k + 2 \equiv 0 \pmod{7}$ при $k = 4$. Имеем: $b - 1 = 143 \cdot 4, b + 1 = 143 \cdot 4 + 2 = 574 = 82 \cdot 7; 1001a = 143 \cdot 4 \cdot 82 \cdot 7; a = 4 \cdot 82 = 328$.

7) $b - 1 \vdots 13, b + 1 \vdots 7 \cdot 11 \Rightarrow b = 77k - 1, k \in N, 5 \leq k \leq 13$.

$b-1 = 77k-2 \equiv -k-2 \pmod{13}$; $-k-2 \equiv 0 \pmod{13}$ при $k = 11$. Имеем:
 $b+1 = 77 \cdot 11$, $b-1 = 77 \cdot 11 - 2 = 845 = 65 \cdot 13$; $1001a = 77 \cdot 11 \cdot 65 \cdot 13$;
 $a = 11 \cdot 65 = 715$.

8) $b+1 \vdots 7 \cdot 11 \cdot 13 \Rightarrow b+1 \geq 1001 \Rightarrow b \geq 1000$. Из $b \leq 1000$ получаем:
 $b = 1000$. Проверяем: $b+1 = 1001 \vdots 7 \cdot 11 \cdot 13$; $b-1 = 999$; $1001a = 1001 \cdot 999$;
 $a = 999$.

Ответ: 183, 328, 528, 715, 999.

1703. Из условия следует: $1000a + a + 4 = b^2 \Leftrightarrow 1001a = b^2 - 4$, $a, b \in N$,
 $100 \leq a \leq 999$. Отсюда $100104 \leq b^2 \leq 1000003$; $316 \leq b \leq 1000$.
 $1001a = b^2 - 4$; $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a = (b-2)(b+2)$. Числа $b-2$ и $b+2$ не
могут одновременно делиться ни на какое натуральное $p > 4$, т.к. иначе
 $(b+2) - (b-2) \vdots p$; $4 \vdots p$, что невозможно.

Поэтому из $(b-2)(b+2) \vdots (7 \cdot 11 \cdot 13)$ получаем 8 случаев:

1) $b-2 \vdots 7 \cdot 11 \cdot 13 \Rightarrow b-2 \geq 1001 \Rightarrow b \geq 1003$. Противоречие с
 $b \leq 1000$.

2) $b-2 \vdots 7 \cdot 11$, $b+2 \vdots 13 \Rightarrow b = 77k+2$, $k \in N$, $5 \leq k \leq 12$.
 $b+2 = 77k+4 \equiv -k+4 \pmod{13}$; $-k+4 \not\equiv 0 \pmod{13}$ при $5 \leq k \leq 12$.

Здесь нет допустимых значений k , при которых $b+2 \vdots 13$.

3) $b-2 \vdots 7 \cdot 13$, $b+2 \vdots 11 \Rightarrow b = 91k+2$, $k \in N$, $4 \leq k \leq 10$.
 $b+2 = 91k+4 \equiv 3k+4 \pmod{11}$; $3k+4 \equiv 0 \pmod{11}$ при $k = 6$. Имеем:
 $b-2 = 91 \cdot 6$, $b+2 = 91 \cdot 6 + 4 = 550 = 11 \cdot 50$; $1001a = 91 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 50$;
 $a = 6 \cdot 50 = 300$.

4) $b-2 \vdots 7$, $b+2 \vdots 11 \cdot 13 \Rightarrow b = 143k-2$, $k \in N$, $3 \leq k \leq 7$.
 $b-2 = 143k-4 \equiv 3k-4 \pmod{7}$; $3k-4 \equiv 0 \pmod{7}$ при $k = 6$. Имеем:
 $b+2 = 143 \cdot 6$, $b-2 = 143 \cdot 6 - 4 = 854 = 122 \cdot 7$; $1001a = 143 \cdot 6 \cdot 122 \cdot 7$;
 $a = 6 \cdot 122 = 732$.

5) $b-2 \vdots 11$, $b+2 \vdots 7 \cdot 13 \Rightarrow b = 91k-2$, $k \in N$, $4 \leq k \leq 11$.
 $b-2 = 91k-4 \equiv 3k-4 \pmod{11}$; $3k-4 \equiv 0 \pmod{11}$ при $k = 5$. Имеем:
 $b+2 = 91 \cdot 5$, $b-2 = 91 \cdot 5 - 4 = 451 = 41 \cdot 11$; $1001a = 91 \cdot 5 \cdot 41 \cdot 11$;
 $a = 5 \cdot 41 = 205$.

6) $b-2 \vdots 11 \cdot 13$, $b+2 \vdots 7 \Rightarrow b = 143k+2$, $k \in N$, $3 \leq k \leq 6$.
 $b+2 = 143k+4 \equiv 3k+4 \pmod{7}$; $3k+4 \not\equiv 0 \pmod{7}$ при $3 \leq k \leq 6$. Здесь
нет допустимых значений k , при которых $b+2 \vdots 13$.

7) $b - 2 \vdots 13, b + 2 \vdots 7 \cdot 11 \Rightarrow b = 77k - 2, k \in N, 5 \leq k \leq 13$.
 $b - 2 = 77k - 4 \equiv -k - 4 \pmod{13}; -k - 4 \equiv 0 \pmod{13}$ при $k = 9$. Имеем:
 $b + 2 = 77 \cdot 9, b - 2 = 77 \cdot 9 - 4 = 689 = 53 \cdot 13; 1001a = 77 \cdot 9 \cdot 53 \cdot 13;$
 $a = 9 \cdot 53 = 477$.

8) $b + 2 \vdots 7 \cdot 11 \cdot 13 \Rightarrow b + 2 \geq 1001 \Rightarrow b \geq 999$. Имеем $999 \leq b \leq 1000$
 $\Rightarrow b + 2 = 1001. b = 999; b - 2 = 997. 1001a = 1001 \cdot 997; a = 997$.

Ответ: 205, 300, 477, 732, 997.

1704. Пусть прогрессия возрастает (то есть её разность $d > 0$) и её члены равны a_1, a_2, \dots, a_n .

Обозначим $S(x) = |a_1 - x| + |a_2 - x| + \dots + |a_n - x|$. По условию $S(0) = S(1) = S(2) = 175$.

Легко видеть, что

$$S(x) = \begin{cases} -nx + c_0, & x \leq a_1, \\ (2i - n)x + c_i, & a_i \leq x \leq a_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1, \\ nx + c_n, & x \geq a_n; \end{cases}$$

где $c_i, i = 0, 1, \dots, n$ — некоторые константы.

Пусть $n = 2k + 1$ (нечётно), тогда $S(x)$ убывает при $x \leq a_{k+1}$ и возрастает при $x \geq a_{k+1}$, так что не может принимать равные значения в трех точках.

Пусть $n = 2k$ (чётно), тогда $S(x)$ убывает при $x \leq a_k$, постоянна на $[a_k; a_{k+1}]$, возрастает при $x \geq a_{k+1}$. Отсюда $S\left(a_k + \frac{d}{2}\right) = 175$.

Имеем: $a_k - a_i = (k - i)d$;

$$\begin{aligned} S\left(a_k + \frac{d}{2}\right) &= \left|-(k-1)d - \frac{d}{2}\right| + \left|-(k-2)d - \frac{d}{2}\right| + \dots + \left|-\frac{d}{2}\right| + \left|\frac{d}{2}\right| + \dots \\ &\dots + \left|(k-1)d + \frac{d}{2}\right| = |d|((2k-1) + (2k-3) + \dots + 1) = k^2 d = \frac{n^2 d}{4} \Rightarrow \\ \frac{n^2 d}{4} &= 175; \frac{n^2 d}{100} = \frac{1}{25} \cdot \frac{n^2 d}{4} = \frac{175}{25} = 7. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения для убывающей прогрессии приводят к результату $\frac{n^2 d}{100} = -7$.

Ответ: $-7; 7$.

1705. Пусть прогрессия возрастает (то есть её разность $d > 0$), и её члены равны a_1, a_2, \dots, a_n .

Обозначим $S(x) = |a_1 - x| + |a_2 - x| + \dots + |a_n - x|$.

По условию $S(0) = S(1) = S(2) = 325$.

Легко видеть, что

$$S(x) = \begin{cases} -nx + c_0, & x \leq a, \\ (2i - n)x + c_i, & a_i \leq x \leq a_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1, \\ nx + c_n, & x \geq a_n; \end{cases}$$

где $c_i, i = 0, 1, \dots, n$ — некоторые константы.

Пусть $n = 2k + 1$ (нечётно), тогда $S(x)$ убывает при $x \leq a_{k+1}$ и возрастает при $x \geq a_{k+1}$, так что не может принимать равные значения в трех точках.

Пусть $n = 2k$ (чётно), тогда $S(x)$ убывает при $x \leq a_k$, постоянна на $[a_k; a_{k+1}]$, возрастает при $x \geq a_{k+1}$. Отсюда $S\left(a_k + \frac{d}{2}\right) = 325$.

Имеем: $a_k - a_i = (k - i)d$;

$$\begin{aligned} S\left(a_k + \frac{d}{2}\right) &= \left| -(k-1)d - \frac{d}{2} \right| + \left| -(k-2)d - \frac{d}{2} \right| + \dots + \left| -\frac{d}{2} \right| + \left| \frac{d}{2} \right| + \dots \\ &\dots + \left| (k-1)d + \frac{d}{2} \right| = |d|((2k-1) + (2k-3) + \dots + 1) = k^2 d = \frac{n^2 d}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{n^2 d}{4} = 325; \quad \frac{n^2 d}{100} = \frac{1}{25} \cdot \frac{n^2 d}{4} = \frac{325}{25} = 13.$$

Аналогичные рассуждения для убывающей прогрессии приводят к результату $\frac{n^2 d}{100} = -13$.

Ответ: $-13; 13$.

1706. Заметим, что если пара (x, y) является решением исходного уравнения, то пара $(x, -y)$ также является его решением, поэтому будем рассматривать только значения $y \geq 0$.

Рассмотрим два случая.

1) x — чётно, то есть $x = 2n, n \in N$. В этом случае имеем

$$4 \cdot 3^{2n} - y^2 = 35, (2 \cdot 3^n - y)(2 \cdot 3^n + y) = 35.$$

Так как каждый множитель является целым числом и выражение $2 \cdot 3^n + y$ принимает только положительные значения, то последнее уравнение равносильно

$$\left[\begin{cases} 2 \cdot 3^n - y = 5, \\ 2 \cdot 3^n + y = 7, \\ 2 \cdot 3^n - y = 1, \\ 2 \cdot 3^n + y = 35; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} 4 \cdot 3^n = 12, \\ 2y = 2, \\ 4 \cdot 3^n = 36, \\ 2y = 34; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} n = 1, \\ y = 1, \\ n = 2, \\ y = 17. \end{cases} \right.$$

Таким образом, в данном случае получаем решения исходного уравнения $(2; 1), (2; -1), (4; 17), (4; -17)$.

2) x — нечётно, то есть $x = 2n + 1, n \in N$. В этом случае $4 \cdot 3^{2n+1}$ при делении на 5 даёт остатки 2 или 3. Число y^2 при делении на 5 дает

остатки 0, 1 или 4 (как квадрат целого числа) и такие же остатки даёт число $y^2 + 35$. Таким образом, в данном случае уравнение $4 \cdot 3^x = y^2 + 35$ не имеет решений в целых числах.

Ответ: (2; 1), (2; -1), (4; 17), (4; -17).

1707. Заметим, что если пара (x, y) является решением исходного уравнения, то пара $(x, -y)$ также является его решением, поэтому будем рассматривать только значения $y \geq 0$.

Рассмотрим два случая.

1) x чётно, то есть $x = 2n$, $n \in N$. В этом случае имеем $2^{2n} - y^2 = 63$, $(2^n - y)(2^n + y) = 63$.

Так как каждый множитель является целым числом и выражение $2^n + y$ принимает только положительные значения, то последнее уравнение равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2^n - y = 7, \\ 2^n + y = 9, \\ 2^n - y = 3, \\ 2^n + y = 21, \\ 2^n - y = 1, \\ 2^n + y = 63; \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} n = 3, \\ y = 1, \\ n = \log_2 3 + 2, \\ y = 9, \\ n = 5, \\ y = 31. \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 2^n = 16, \\ 2y = 2, \\ 2 \cdot 2^n = 24, \\ 2y = 18, \\ 2 \cdot 2^n = 64, \\ 2y = 62; \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

Таким образом, в данном случае получаем решения исходного уравнения (6; 1), (6; -1), (10; 31), (10; -31).

2) x нечётно, то есть $x = 2n + 1$, $n \in N$. В этом случае 2^{2n+1} при делении на три даёт остаток 2, y^2 при делении на 3 даёт остатки 1 или 0 (как квадрат целого числа), а число 63 делится на 3 нацело. Таким образом, в данном случае уравнение $2^x - y^2 = 63$ не имеет решений в целых числах.

Ответ: (6; 1), (6; -1), (10; 31), (10; -31).

1708. Равенство $\left(\frac{1}{n^5}\right)^k = \left(\frac{1}{k^5}\right)^n$ выполняется тогда и только тогда, когда $\left(\left(\frac{1}{n}\right)^k\right)^5 = \left(\left(\frac{1}{k}\right)^n\right)^5$, то есть когда $\left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{k}\right)^n \Leftrightarrow k \ln \frac{1}{n} = n \ln \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{k} \ln k = \frac{1}{n} \ln n \Leftrightarrow f(k) = f(n)$, где $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$,

$x > 0$.

Так как $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\ln x - \ln e}{x^2}$, то

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, 0 < x \leq e, \\ f'(x) \leq 0, x \geq e. \end{cases}$$

Значит, функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0; e]$ и убывает на интервале $[e; +\infty)$. Так как $k < n$, то равенство $f(n) = f(k)$ выполняется тогда и только тогда, когда $k < e < n$, то есть $k = 1$ или $k = 2$. При этом каждому значению k соответствует не более одного значения n .

Пусть $k = 1$. Тогда $f(n) = f(1); \frac{1}{n} \ln n = 0$. Следовательно, $n = 1$.

Противоречит тому, что $k < n$.

Пусть $k = 2$. Тогда $f(n) = f(2); \frac{1}{n} \ln n = \frac{1}{2} \ln 2$. Этому уравнению удовлетворяет единственное значение $n = 4$.

Ответ: $k = 2; n = 4$.

1709. Равенство $(\sqrt{n^5})^k = (\sqrt{k^5})^n$ выполняется тогда и только тогда, когда $(n^k)^{\frac{5}{2}} = (k^n)^{\frac{5}{2}}$, то есть когда $n^k = k^n \Leftrightarrow k \ln n = n \ln k \Leftrightarrow \frac{1}{k} \ln k = \frac{1}{n} \ln n \Leftrightarrow f(k) = f(n)$, где $f(x) = \frac{1}{x} \ln x, x > 0$.

Так как $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\ln x - \ln e}{x^2}$, то

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, 0 < x \leq e, \\ f'(x) \leq 0, x \geq e. \end{cases}$$

Значит, функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0; e]$ и убывает на интервале $[e; +\infty)$. Так как $k < n$, то равенство $f(n) = f(k)$ выполняется тогда и только тогда, когда $k < e < n$, то есть $k = 1$ или $k = 2$. При этом каждому значению k соответствует не более одного значения n .

Пусть $k = 1$. Тогда $f(n) = f(1); \frac{1}{n} \ln n = 0$. Следовательно, $n = 1$.

Противоречит тому, что $k < n$.

Пусть $k = 2$. Тогда $f(n) = f(2); \frac{1}{n} \ln n = \frac{1}{2} \ln 2$. Этому уравнению удовлетворяет единственное значение $n = 4$.

Ответ: $k = 2; n = 4$.

1710. Пусть k — искомое число. Тогда его можно записать в виде $k^2 = 100m^2 + n^2$, где $m, n \in N$. Так как $1 \leq n^2 < 100$, то $1 \leq n \leq 9$.

1) Пусть n — простое число, то есть $n \in \{2, 3, 5, 7\}$. Тогда $k^2 - 100m^2 = (k - 10m)(k + 10m) = n^2$. Так как $k - 10m < k + 10m$, то возможен единственный случай

$$\begin{cases} k - 10m = 1, \\ k + 10m = n^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 10m + 1, \\ 20m + 1 = n^2. \end{cases}$$

Система уравнений не имеет решений в натуральных числах, так как число $20m + 1$ оканчивается на 1, а ни одно из возможных значений n^2 не оканчивается на единицу.

2) Пусть n — составное чётное число, $n \in \{4, 6, 8\}$; $n = 2l$, $l \in N$. Тогда k — тоже чётное число, $k = 2p$, $p \in N$. Тогда $(p - 5m)(p + 5m) = l^2$, $l \in \{2, 3, 4\}$.

Если $l \in \{2, 3\}$, то, так как l — простое число и $p - 5m < p + 5m$, имеем $\begin{cases} p - 5m = 1, \\ p + 5m = l^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 5m + 1, \\ 10m + 1 = l^2 \end{cases}$ — не имеет решений аналогично случаю 1).

Если $l = 4$, то $l^2 = 16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8$, то есть

$$\left[\begin{cases} p = 5m + 1, \\ 10m + 1 = 16, \\ p = 5m + 2, \\ 10m + 2 = 8; \end{cases} \right. \quad \text{— нет решений аналогично случаю 1).}$$

3) Если $n = 9$, то $n^2 = 1 \cdot 9^2 = 3 \cdot 27$. Тогда

$$\left[\begin{cases} k - 10m = 1, \\ k + 10m = 9^2, \\ k - 10m = 3, \\ k + 10m = 27; \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} k = 10m + 1, \\ 20m + 1 = 81, \\ k = 10m + 3, \\ 20m + 3 = 27. \end{cases} \right.$$

Первая система имеет единственное решение $m = 4$, $k = 41$. Тогда $k^2 = 1681$. Вторая система не имеет решений в натуральных числах.

Ответ: 1681.

1711. Пусть k^2 — искомое шестизначное число.

Тогда $k^2 = 1000n^2 + m^2$, где $k, n, m \in N$. Так как k^2 — шестизначное число, то $100\,000 \leq k^2 < 1\,000\,000$; $317 \leq k \leq 999$. Так как n^2 — трёхзначное число, а m^2 — не более, чем трёхзначное, то $100 \leq n^2 \leq 999$; $10 \leq n \leq 31$ и $1 \leq m^2 \leq 999$; $1 \leq m \leq 31$.

Так как n^2 — количество тысяч числа k^2 , то наименьшее число, удовлетворяющее условию, соответствует наименьшему возможному значению n .

1) Пусть $n = 10$. Тогда $k^2 - m^2 = 1000n^2$;

$$(k - m)(k + m) = 100\,000 = 2^5 \cdot 5^5.$$

Из ограничений, накладываемых на числа k и m , получим условия:

$$\begin{aligned} k - m < k + m; \quad 286 \leq k - m \leq 998; \quad 318 \leq k + m \leq 1030; \\ 317 \leq k \leq 999; \quad 1 \leq m \leq 31. \end{aligned} \quad (1)$$

Проверкой убеждаемся, что любое разложение числа $2^5 \cdot 5^5$ на произведение двух множителей не удовлетворяет условиям (1).

2) Пусть $n = 11$. Тогда $(k - m)(k + m) = 1000 \cdot 11^2 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$. Проверкой убеждаемся, что любое разложение числа $2^3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$ на произведение двух множителей не удовлетворяет условиям (1).

3) Пусть $n = 12$. Тогда $(k - m)(k + m) = 1000 \cdot 12^2 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. Существует 5 возможных случаев, удовлетворяющих условиям (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} k - m = 3 \cdot 5^3 = 375, \\ k + m = 2^7 \cdot 3 = 384, \\ k - m = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300, \\ k + m = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480, \\ k - m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360, \\ k + m = 2^4 \cdot 5^2 = 400, \\ k - m = 2^5 \cdot 3^2 = 288, \\ k + m = 2^2 \cdot 5^3 = 500, \\ k - m = 2^6 \cdot 5 = 320, \\ k + m = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k, m \notin \mathbb{Z}, \\ m = 90, k = 390, \\ m = 20, k = 380, \\ m = 106, k = 394, \\ m = 65, k = 385. \end{array} \right.$$

Только значение $k = 380$ удовлетворяет условиям (1). Значит, $k^2 = 380^2 = 144\,400$.

Ответ: 144 400.

1712. Подставим $y = b - ax$ в первое уравнение, получим $x^2 - 4(b - ax)^2 = 1$; $x^2 - 4b^2 + 8abx - 4a^2x^2 = 1$; $(1 - 4a^2)x^2 + 8abx - 4b^2 - 1 = 0$.

Исходная система разрешима при любом b тогда и только тогда, когда при любом b разрешимо последнее уравнение.

Рассмотрим два случая.

1. $a = \pm 0,5$. Последнее уравнение примет вид $\pm 4bx = 4b^2 + 1$ — не разрешимо при $b = 0$, то есть не удовлетворяет условию.

2. $a \neq \pm 0,5$. При любом b должно выполняться $D \geq 0$.

$$(4ab)^2 - (4a^2 - 1)(4b^2 + 1) \geq 0;$$

$$16a^2b^2 - 16a^2b^2 - 4a^2 + 4b^2 + 1 \geq 0;$$

$$4a^2 \leq 4b^2 + 1.$$

Так как последнее неравенство должно выполняться для любого b , получим $4a^2 \leq 1$; $|a| \leq 0,5$. Так как $a = \pm 0,5$ не удовлетворяет условию,

то окончательно имеем $-0,5 < a < 0,5$.

Ответ: $(-0,5; 0,5)$.

1713. Подставим $y = ax - a + b = a(x-1) + b$ в первое уравнение, получим
 $x^2 = a^2(x-1)^2 + 2ab(x-1) + b^2 + 2$;
 $x^2 = a^2x^2 - 2a^2x + a^2 + 2abx - 2ab + b^2 + 2$;
 $(a^2 - 1)x^2 + (-2a^2 + 2ab)x + (a - b)^2 + 2 = 0$.

Исходная система разрешима при любом b тогда и только тогда, когда при любом b разрешимо последнее уравнение.

Рассмотрим два случая.

1. $a = \pm 1$.

При $a = 1$ последнее уравнение примет вид $-2x(1-b) + (b-1)^2 + 2 = 0$. Оно не разрешимо при $b = 1$.

При $a = -1$ последнее уравнение примет вид $-2x(1+b) + (b+1)^2 + 2 = 0$. Оно не разрешимо при $b = -1$.

Таким образом, $a = \pm 1$ не удовлетворяет условию.

2. $a \neq \pm 1$.

При любом b должно выполняться $D \geq 0$.

$$(-a + ab)^2 - ((a - b)^2 + 2)(a^2 - 1) \geq 0;$$

$$a^2(b - 1)^2 + ((a - b)^2 + 2)(1 - a^2) \geq 0.$$

Последнее неравенство должно выполняться для любых значений b . Подставив $b = 1$, получим $((a - 1)^2 + 2)(1 - a^2) \geq 0$, откуда следует $1 - a^2 \geq 0$; $a^2 \leq 1$; $|a| \leq 1$.

При найденных a неравенство $a^2(b - 1)^2 + ((a - b)^2 + 2)(1 - a^2) \geq 0$ выполняется при любых b , значит, найденные значения параметра a удовлетворяют условию, и только они.

Учитывая, что $a \neq \pm 1$, окончательно получим $-1 < a < 1$.

Ответ: $(-1; 1)$.

1714. Докажем, что a и b взаимно просты. Предположим противное, то есть у них есть общий простой делитель p . Тогда a и b можно представить в виде

$$a = a_1 \cdot p^m, \text{ где } a_1 \text{ не делится на } p, m \in N;$$

$$b = b_1 \cdot p^n, \text{ где } b_1 \text{ не делится на } p, n \in N.$$

При $m \geq n$ из первой строки системы получаем

$$a_1^3 p^{3m} + b_1 p^n = c(a_1^2 p^{2m} + b_1^2 p^{2n}),$$

$$a_1^3 p^{3m-n} + b_1 = c p^n (a_1^2 p^{2m-2n} + b_1^2),$$

$b_1 = c p^n (a_1^2 p^{2m-2n} + b_1^2) - a_1^3 p^{3m-n}$, что невозможно, так как правая часть равенства делится на p , а левая — не делится.

Аналогично при $m < n$ из второй строки системы получаем

$a_1 = dp^m(a_1^2 + b_1^2 p^{2n-2m}) - b_1^3 p^{3n-m}$, что также приводит к противоречию. Следовательно, числа a и b взаимно просты.

Рассмотрим число

$b(ab-1) = a(a^2+b^2) - (a^3+b) = a(a^2+b^2) - c(a^2+b^2) = (a-c)(a^2+b^2)$.
 Это число делится на $a^2 + b^2$. Из взаимной простоты чисел a и b следует взаимная простота чисел b и $a^2 + b^2$, поэтому $ab - 1$ делится на $a^2 + b^2$. Это невозможно при $ab > 1$, так как в этом случае $a^2 + b^2 \geq 2ab > ab - 1$. Следовательно, $ab = 1$ и $a = b = c = d = 1$.

Ответ: (1; 1; 1; 1).

1715. а) Предположим, что последовательность состоит из двух членов. Если обозначим через a одно из чисел этой последовательности, то второе число будет иметь вид $7a$. Тогда сумма членов равна $a + 7a = 8a$. Согласно условию, эта сумма равна 1935 и должна делиться на 8. Но 1935 не делится на 8. Пришли к противоречию. Следовательно, заданная последовательность не может состоять из двух членов.

б) Да, может. Например, таковой является последовательность чисел: 215; 1505; 215.

в) Минимальная сумма двух стоящих подряд членов последовательности равна 8 (два соседних числа равны 7 и 1).

$$1935 = 8 \cdot 241 + 7.$$

Значит, максимальное число членов последовательности может быть $241 \cdot 2 + 1 = 483$. В этом случае последовательность имеет вид:

$$7, 1, 7, 1, \dots, 7.$$

Ответ: а) нет; б) да; в) 483.

1716. Пусть $m = p^2 + 29$, p — некоторое простое число ($\in P$). Согласно основной теореме арифметики $m = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}$, где $\alpha_i = 0, 1, 2, \dots$ и n — наибольший множитель числа m .

Число всех делителей числа m вычисляется по формуле

$$N = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_5 + 1) \dots (\alpha_n + 1).$$

Согласно условию задачи m имеет ровно 4 различных делителя, значит, $m = p_i p_j$, $p_i \neq p_j$, $p_i, p_j \in P$ (делителями m являются 1, p_i , p_j , $p_i \cdot p_j$) или $m = p_k^3$, $p_k \in P$ (делителями m являются 1, p_i , p_i^2 , p_i^3).

В случае $p = 2$ число $m = 33 = 3 \cdot 11$ и имеет ровно 4 различных делителя.

В случае $p = 3$ число $m = 38 = 2 \cdot 17$ и также имеет ровно 4 различных делителя.

Пусть $p \neq 2, 3$, тогда $m = p^2 - 1 + 30 = (p-1)(p+1) + 30$. Произведение $(p-1)(p+1)$ делится на 6 (оно делится на 2, так как все простые числа, отличные от двойки, являются нечётными, и делится на 3, поскольку при

$p \neq 3$ одно из чисел $p-1$ или $p+1$ делится на 3). То есть $(p-1)(p+1) = 6k$, $k \in N$. Значит, $m = 2 \cdot 3 \cdot (k+5)$ и имеет более четырёх различных делителей (делителями m являются 1, 2, 3, 6, $k+5$, $6k+30$ и, возможно, другие).

Ответ: 2; 3.

1717. Разложим число P на простые множители $P = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}$, где n — наибольший простой множитель и $\alpha_i = 0, 1, 2, \dots$. Если запись числа P оканчивается t нулями, то либо $\alpha_2 = t$, $\alpha_5 \geq t$, либо $\alpha_2 \geq t$, $\alpha_5 = t$.

Оценим количество делителей k числа P :

$k = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_5 + 1) \dots (\alpha_n + 1) \geq (t + 1)^2$, при этом k делится на $t + 1$.

1. k — чётное число. Все делители разобьются на $\frac{k}{2}$ пар вида $\left(m; \frac{P}{m}\right)$ так, что произведение делителей в каждой паре равно P , поэтому произведение всех делителей равно $P^{\frac{k}{2}}$.

2. k — нечётное число. Тогда $k - 1$ делителей разобьются на пары вида $\left(m; \frac{P}{m}\right)$, и есть ещё один делитель \sqrt{P} . Произведение всех делителей в этом случае равно $P^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sqrt{P} = P^{\frac{k}{2}}$.

Значит, для любого P произведение всех делителей заканчивается $\frac{tk}{2}$ нулями. По условию $\frac{tk}{2} = 96$, $tk = 192$. Учитывая, что $k \geq (t + 1)^2$, имеем $192 = tk \geq t(t + 1)^2$, следовательно, t — делитель числа 192 и $t \leq 5$ (число 5 — большее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $t^3 + 2t^2 + t \leq 192$). Очевидно, $t = 5$ не удовлетворяет условию $192 = tk$.

Найдём возможные значения P , приняв все значения кратности всех простых множителей, кроме 5 и 2, равными 0.

Выпишем все такие t : 1, 2, 3, 4. Из равенства $192 = tk$ также следует, что 192 делится на $t + 1$. Поэтому возможно только $t = 1, 2, 3$.

1. $\alpha_2 = t = 1$, $k = 192 : t = 192$, $\alpha_5 + 1 = \frac{k}{t + 1} = \frac{192}{2} = 96$, $\alpha_5 = 95$ и $P = 2^1 \cdot 5^{95}$ (или в случае $\alpha_5 = t$ $P = 5^1 \cdot 2^{95}$).

2. $\alpha_2 = t = 2$, $k = 192 : t = 96$, $\alpha_5 + 1 = \frac{96}{3} = 32$, $\alpha_5 = 31$ и $P = 2^2 \cdot 5^{31}$ (или в случае $\alpha_5 = t$ $P = 5^2 \cdot 2^{31}$).

3. $\alpha_2 = t = 3, k = 192 : t = 64, \alpha_5 + 1 = \frac{64}{4} = 16, \alpha_5 = 15$ и $P = 2^3 \cdot 5^{15}$ (или в случае $\alpha_5 = t, P = 5^3 \cdot 2^{15}$).

Таким образом, для $t = 1, 2, 3$ найдены возможные значения P , оканчивающиеся t нулями, произведение делителей которых оканчивается 96 нулями.

Ответ: 1, 2, 3.

1718. Предположим, существует такое натуральное число n , что сумма первых n чисел натурального ряда $S_n = \frac{n+1}{2} \cdot n = \frac{n^2+n}{2}$ оканчивается на 123456789. Тогда последняя цифра числа $\frac{n^2+n}{2}$ — это 9, последняя

цифра числа $n^2 + n$ — это 8. Тогда $n^2 + n - 8 : 10 \Rightarrow 4n^2 + 4n - 32 : 10 \Rightarrow 4n^2 + 4n - 2 : 10 \Rightarrow (2n + 1)^2 - 3 : 10$. Отсюда получаем, что последней цифрой числа $(2n + 1)^2$ должна быть 3. Но это невозможно, так как квадрат натурального числа может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Следовательно, исходное предположение было неверным и искомого числа n не существует.

Ответ: Нет.

1719. По условию число a представимо в виде $10n + 2$, где $n \in Z, n \geq 0$, значит, при делении на 5 число a даст остаток 2, так как $10n$ делится на 5 нацело. Поэтому $\alpha = 2$. При делении на 9 число a должно также давать остаток 2, то есть a представимо в виде $9m + 2$, где $m \in Z, m \geq 0$. Таким образом, имеем $a = 10n + 2$ и $a = 9m + 2$, откуда $10n + 2 = 9m + 2$ и $10n = 9m$, поэтому $10n$ должно делиться на 9, а так как НОД(10; 9) равен 1, то n должно делиться на 9, то есть $n = 9k$, где $k \in Z, k \geq 0$, а значит, $a = 90k + 2$. Рассмотрим два случая:

1) Если k — чётное ($k = 2s, s \in Z, s \geq 0$), то $a = 180s + 2$, $180s$ делится на 4 нацело, a при делении на 4 даст остаток 2, то есть $\beta = 2$, а значит, при делении на 7 число a также должно давать остаток 2, то есть $a = 7r + 2, r \in Z, r \geq 0$, то есть $180s + 2 = 7r + 2, 180s = 7r$, а так как НОД(180; 7) равен 1, то s должно делиться на 7, то есть $s = 7t, t \in Z, t \geq 0$, тогда $a = 180 \cdot 7 \cdot t + 2 = 1260t + 2$. Учитывая, что $a < 5000$ при $t = 0, 1, 2, 3$, соответственно получим следующие значения a : 2, 1262, 2522, 3782.

2) Если k — нечётное ($k = 2s + 1, s \in Z, s \geq 0$), то $a = 90k + 2 = 180s + 92$, но 180 делится на 4 нацело, как и 92, то есть при делении на 4 число a даст нулевой остаток, $\beta = 0$. Значит, по условию задачи число a при делении

на 7 также должно давать нулевой остаток, то есть $a = 7r$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, откуда $180s + 92 = 7r$; $180(s-4) + 180 \cdot 4 + 92 = 7r$; $180(s-4) = 7(r-116)$. Отсюда $s-4$ делится нацело на 7, и s можно представить в виде $s = 7t + 4$, $t \in \mathbb{Z}$. Тогда $a = 180s + 92 = 1260t + 812$. Так как $0 < a \leq 5000$, то возможные значения a получаем при $t = 0, 1, 2, 3$, а именно: 812, 2072, 3332, 4592.

Ответ: 2; 1262; 2522; 3782; 812; 2072; 3332; 4592.

1720. Так как $b \neq 1$ и $(b^m - a^m) = (b^n - a^n)b$, то $b^m - a^m$ должно делиться на b , но b^m на b делится, значит, a^m должно делиться на b .

Пусть p — некоторый простой делитель b , тогда p также является делителем a , b представимо в виде $p^k s$, $s \in \mathbb{N}$, $s \not\vdash p$, a представимо в виде $p^l r$, $r \in \mathbb{N}$, $r \not\vdash p$, $l, k \in \mathbb{N}$. Будем считать, что $k \neq l$. Если это не так, то выберем другое p , для которого это верно, такое p найдётся, так как $a \neq b$. Тогда исходное равенство переписывается в виде $(p^{km} s^m - p^{lm} r^m) = p^k s(p^{kn} s^n - p^{nl} r^n)$.

Рассмотрим 2 случая:

1) $k < l$, тогда $p^{km}(s^m - p^{(l-k)m} r^m) = sp^{k+kn}(s^n - p^{(l-k)n} r^n)$, откуда $km = k + kn$ и $m = n + 1$ (так как $s^m - p^{(l-k)m} r^m$ на p не делится, так же, как $s^n - p^{(l-k)n} r^n$), тогда $b^{n+1} - a^{n+1} = b^{n+1} - a^n b$ и $a = b$, что противоречит условию.

2) $k > l$, $p^{lm}(s^m p^{(k-l)m} - r^m) = p^k \cdot s \cdot p^{ln}(s^n p^{(k-l)n} - r^n)$, откуда $lm = k + ln$, левая часть последнего равенства кратна l , значит, и правая тоже, то есть $(k + ln) — кратно l , то есть $k = ql$, $q \in \mathbb{N}$, тогда $lm = ql + ln$, $m = q + n$ (при этом $q > 1$, так как $k = ql > l$).$

Пусть $t \neq p$ — любой другой простой делитель b и a . Вводя для него значения \bar{k} и \bar{l} аналогично тому, как вводились значения k и l для числа p , получим, что $\bar{k} \geq \bar{l}$ (действительно, иначе $m = n + 1$, а это противоречит тому, что $m = q + n$, $q > 1$), значит, $b = au$, $u \in \mathbb{N}$.

Перепишем исходное равенство в виде

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{b(b^n - a^n)}{b^m - a^m} = \frac{aua^n(u^n - 1)}{a^m(u^m - 1)} = \frac{a^{n+1}u(u^n - 1)}{a^m(u^m - 1)} = \\ &= \frac{u^{n+1} - u}{a^{m-n-1}(u^m - 1)} < \frac{u^{n+1} - u}{u^m - 1} < \frac{u^{n+1} - 1}{u^m - 1} < 1, \text{ так как } m > n + 1. \end{aligned}$$

Ответ: решений нет.

1721. Перепишем уравнение: $6x^2 - 24 = 50 - 5y^2$, $6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)$, откуда $x^2 - 4 = 5u$, $10 - y^2 = 6v$, $\Rightarrow u = v$ ($u, v \in \mathbb{Z}$).

Итак, $x^2 = 5u + 4$, $5u + 4 \geq 0$, $\Rightarrow u \geq -\frac{4}{5}$. Аналогично $10 - y^2 = 6u$,

$$10 - 6u \geq 0, \Rightarrow u \leq \frac{5}{3}.$$

Итак, целое число u удовлетворяет условию $-\frac{4}{5} \leq u \leq \frac{5}{3} \Rightarrow u = 0$ или $u = 1$. При $u = v = 0 \Rightarrow 10 = y^2$, где y — целое, что неверно. При $u = v = 1 \Rightarrow x^2 = 9$, $y^2 = 4$.

Ответ: $(3, 2)$, $(3, -2)$, $(-3, 2)$, $(-3, -2)$.

1722. Так как для любых целых чисел a и b $a^2 + b^2 \vdots 3 \Leftrightarrow a \vdots 3$ и $b \vdots 3$ и $19 \nmid 3$ и $28 \nmid 3$, то из исходного уравнения следует, что $x \vdots 3$ и $y \vdots 3$, то есть $x = 3u$, $y = 3v$ ($u, v \in \mathbb{Z}$). Сделав соответствующие замены, получаем из исходного уравнения уравнение $19u^2 + 28v^2 = 81$. Повторяя рассуждения, получаем уравнение $19t^2 + 28s^2 = 9$ ($u = 3t$, $v = 3s$, $s, t \in \mathbb{Z}$), которое очевидно не имеет решений в целых числах.

Ответ: решений нет.

1723. Рассмотрим произвольное простое число p . Пусть p входит в разложение числа n на простые множители a раз, в разложение числа m входит b раз, то есть $n = p^a \cdot q$, где q не делится на p ; $m = p^b \cdot s$, где s не делится на p . Условия задачи для числа n не выполняются, если найдётся такое m , что m^5 делится на n^2 и m^{30} не делится на n^{17} , что в свою очередь выполняется при существовании простого множителя p и числа b таких, что

$$\begin{cases} 5b \geq 2a, \\ 30b < 17a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq \frac{2}{5}a, \\ b < \frac{17}{30}a; \end{cases} \Leftrightarrow b \in \left[\frac{2}{5}a; \frac{17}{30}a \right).$$

Рассмотрим, при каких значениях a возможно существование указанного целого числа b . При $a = 0$ указанного значения b не существует.

При $a = 1$ требуется $b \in \left[\frac{2}{5}; \frac{17}{30} \right)$. На этом полуинтервале нет целых чисел, следовательно, такое целое b не существует. При $a = 2$ требуется $b \in \left[\frac{4}{5}; 1\frac{4}{30} \right)$. Отсюда $b = 1$. При $a = 3$ требуется $b \in \left[1\frac{1}{5}; \frac{21}{30} \right)$.

Целых чисел здесь нет. При $a = 4$ требуется $b \in \left[1\frac{3}{5}; 2\frac{8}{30} \right)$. Отсюда $b = 2$. При $a = 5$ имеем $b = 2$. При $a \geq 6$ длина полуинтервала равна

$a \cdot \left(\frac{17}{30} - \frac{2}{5}\right) = a \cdot \frac{17-12}{30} = a \cdot \frac{1}{6} \geq 1$. Следовательно, на полуинтервале найдется целое число.

Итак, условие для числа n не выполняется, если в его разложении на простые множители есть множитель p , входящий в разложение $a = 2$ или $a \geq 4$ раз. Подсчитаем количество таких «неподходящих» чисел n , меньших 60. Такие числа n могут иметь один из следующих видов:

- 1) $p = 2, a = 2, n = 2^2 \cdot q$, где q нечетное. Это числа 4, 12, 20, 28, 36, 44, 52 — всего 7 чисел.
- 2) $p = 2, a = 4, n = 2^4 \cdot q$, где q нечетное. Это числа 16 и 48 — всего 2 числа.
- 3) $p = 2, a = 5, n = 2^5 \cdot q$, где q нечетное. Это единственное число 32.
- 4) $p = 3, a = 2, n = 3^2 \cdot q$, где q не делится 3. Это числа 9, 18, 36, 45. Так как число 36 уже было посчитано в первом пункте, то здесь остаются 3 числа.
- 5) $p = 5, a = 2, n = 5^2 \cdot q$, где q не делится 5. Это числа 25 и 50 — всего 2 числа.
- 6) $p = 7, a = 2, n = 7^2 \cdot q$, где q не делится 7. Это единственное число 49.

Суммируя количества «неподходящих» чисел по всем пунктам, получаем $7 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 = 16$ чисел. Так как всего натуральных чисел, меньших 60, имеется 59, то условию задачи удовлетворяет $59 - 16 = 43$ числа.

Ответ: 43.

1724. Рассмотрим произвольное простое число p . Пусть p входит в разложение числа n на простые множители a раз, а в разложение числа m входит b раз, то есть $n = p^a q$, где q не делится p ; $m = p^b s$, где s не делится на p .

Условие задачи для числа n не выполняется, если найдется такое число m , что m^5 делится на n и m^{40} не делится на n^{13} , что в свою очередь выполняется при существовании простого числа p и числа b , что

$$\begin{cases} 5b \geq a, \\ 40b < 13a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq \frac{1}{5}a, \\ b < \frac{13}{40}a; \end{cases} \Leftrightarrow b \in \left[\frac{1}{5}a; \frac{13}{40}a\right).$$

Рассмотрим, при каких значениях a возможно существование указанного целого числа b . При $a = 0$ указанного значения b не существует. При $a = 1$ требуется $b \in \left[\frac{1}{5}; \frac{13}{40}\right)$, здесь нет целых чисел, следовательно, требуемого числа b не существует. При $a = 2$ требуется $b \in \left[\frac{2}{5}; \frac{26}{40}\right)$ — целых чисел здесь нет. При $a = 3$ требуется $b \in \left[\frac{3}{5}; \frac{39}{40}\right)$. Целых чисел здесь нет. При $a = 4$ требуется $b \in \left[\frac{4}{5}; \frac{52}{40}\right) \Rightarrow b = 1$. При $a = 5$ требуется $b \in \left[\frac{5}{5}; \frac{65}{40}\right) \Rightarrow b = 1$. При $a = 6$ требуется $b \in \left[\frac{6}{5}; \frac{78}{40}\right)$. Целых чисел нет. При $a = 7$ требуется $b \in \left[\frac{7}{5}; \frac{91}{40}\right) \Rightarrow b = 2$. При $a \geq 8$ длина полуинтервала равна $\left(\frac{13}{40} - \frac{1}{5}\right)a = \frac{5}{40}a \geq 1$. Следовательно, на полуинтервале найдется целое число.

Итак, условие для числа n не выполняется, если в его разложении на простые множители есть множитель p , входящий в разложение $a = 4$, $a = 5$ или $a \geq 7$ раз. Подсчитаем количество таких «неподходящих» чисел n , меньших 200. Такие числа n могут иметь один из следующих видов:

- 1) $p = 2, a = 4, n = 2^4 q$, где q нечетное. Это числа 16, 48, 80, 112, 144, 176 — всего 6 чисел.
- 2) $p = 2, a = 5, n = 2^5 q$, где q нечетное. Это числа 32, 96, 160 — всего 3 числа.
- 3) $p = 2, a = 7, n = 2^7 q$, где q нечетное. Это единственное число 128.
- 4) $p = 3, a = 4, n = 3^4$, где q не делится на 3. Это числа 81 и 162 — всего 2 числа.

Суммируя количество «неподходящих» чисел по всем пунктам, получаем $6 + 3 + 1 + 2 = 12$ чисел. Так как всего натуральных чисел, меньших 200, имеется 199, то условию удовлетворяют $199 - 12 = 187$ чисел.

Ответ: 187.

1725. Пусть p — указанное в условии простое число $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$;

$\frac{m+n}{mn} = \frac{1}{p}$; $p(m+n) = mn$; $mn - np - mp = 0$, $(m-p)(n-p) = p^2$. Так

как число p — простое, то возможны только три случая:

$$1) \begin{cases} m - p = 1, \\ n - p = p^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = p + 1, \\ n = p^2 + p. \end{cases}$$

Подставив m и n в уравнение $m^2 + 2n^2 = k^2$, получим

$(p + 1)^2 + 2p^2(p + 1)^2 = k^2$, $(p + 1)^2(2p^2 + 1) = k^2$, что возможно только в том случае, если $2p^2 + 1 = l^2$, где $l \in N$.

$l^2 - 1 = 2p^2$; $(l - 1)(l + 1) = 2p^2$, что равносильно совокупности:

$$\left[\begin{cases} \begin{cases} l - 1 = 1, \\ l + 1 = 2p^2, \end{cases} \\ \begin{cases} l - 1 = 2, \\ l + 1 = p^2, \end{cases} \\ \begin{cases} l - 1 = p, \\ l + 1 = 2p; \end{cases} \end{cases} \right.$$

откуда имеем $p = 2$, тогда $m = 3$, $n = 6$, $k = 9$.

$$2) \begin{cases} m - p = p, \\ n - p = p; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2p, \\ n = 2p. \end{cases}$$

$m^2 + 2n^2 = k^2$, $12p^2 = k^2$, что невозможно.

$$3) \begin{cases} m - p = p^2, \\ n - p = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = p^2 + p, \\ n = p + 1. \end{cases}$$

$m^2 + 2n^2 = k^2$; $p^2(p + 1)^2 + 2(p + 1)^2 = k^2$, $(p + 1)^2(p^2 + 2) = k^2$, что невозможно, так как $p^2 + 2$ не может являться квадратом натурального числа.

Ответ: $m = 3, n = 6, k = 9$.

1726. Пусть p — указанное в условии простое число $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$;

$\frac{m+n}{mn} = \frac{1}{p}$; $p(m+n) = mn$; $mn - np - mp = 0$, $(m-p)(n-p) = p^2$. Так как число p — простое, то возможны только три случая:

$$1) \begin{cases} m - p = 1, \\ n - p = p^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = p + 1, \\ n = p^2 + p. \end{cases}$$

Подставив m и n в уравнение $4m^2 + 3n^2 = k^2$, получим

$4(p + 1)^2 + 3p^2(p + 1)^2 = k^2$, $(p + 1)^2(3p^2 + 4) = k^2$, что возможно только в том случае, если $3p^2 + 4 = l^2$, где $l \in N$.

$3p^2 + 4 = l^2$; $3p^2 = (l - 2)(l + 2)$;

$$\left[\begin{cases} l - 2 = 3, \\ l + 2 = p^2, \\ l - 2 = p, \\ l + 2 = 3p, \\ l - 2 = 1, \\ l + 2 = 3p^2; \end{cases} \right.$$

откуда имеем $p = 2$, тогда $m = 3, n = 6, k = 12$.

2) $\begin{cases} m - p = p, \\ n - p = p; \end{cases} \quad m = n = 2p \Leftrightarrow 4m^2 + 3n^2 = k^2, 7 \cdot 4p^2 = k^2$, что невозможно.

3) $\begin{cases} m - p = p^2, \\ n - p = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} m = p^2 + p, \\ n = p + 1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$4m^2 + 3n^2 = k^2; 4p^2(p+1)^2 + 3(p+1)^2 = k^2, (p+1)^2(4p^2+3) = k^2$, что невозможно, так как $(2p)^2 + 3$ не может являться квадратом натурального числа при натуральных p .

Ответ: $m = 3, n = 6, k = 12$.

1727. Если $n \leq 8$, то данное число $A = 2^8 + 2^{11} + 2^n = 2^n(1 + 2^{8-n} + 2^{11-n})$ является произведением четного числа 2^n и нечетного числа $1 + 2^{8-n} + 2^{11-n}$. Чтобы A было квадратом, n должно быть четным. Проверка показывает, что $n = 2, 4, 6, 8$ не подходят. Если $n = 9$, $A = 2^8(1 + 2 + 2^3) = 2^8 \cdot 11$, не подходит. $n = 10$, $A = 2^8(1 + 4 + 2^3) = 2^8 \cdot 13$ не подходит. Если $n > 10$, $A = 2^8(1 + 2^{n-8} + 2^3) = (2^4)^2(9 + 2^{n-8})$. Если A — квадрат, то $9 + 2^{n-8}$ тоже квадрат некоторого нечетного числа $2p + 1$, где $p \in \mathbb{N}$. $9 + 2^{n-8} = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1$, тогда $2^{n-8} = 4(p^2 + p - 2)$; $2^{n-10} = p^2 + p - 2 = (p - 1)(p + 2)$. 2^{n-10} делится только на 1 и четные числа, но $p - 1$ и $p + 2$ различаются на 3, значит, они разной четности. Тогда $p - 1 = 1, p = 2, 2^{n-10} = 1 \cdot 4 = 2^2; n - 10 = 2, n = 12$.

Ответ: $n = 12$.

1728. а) $4^m - 2^{100} = 4^m - 4^{50}$. Чтобы это число было натуральным, должно выполняться неравенство $m > 50$. Далее, $4^m - 4^{50} = 4^{50}(4^{m-50} - 1)$. Так как 4^{50} не делится на 3, то на 3 должно делиться число $4^{m-50} - 1$, что достигается уже при $m = 51$.

б) Чтобы число $4^m - 4^{62}$ было натуральным, должно выполняться неравенство $m > 62$. Далее, $4^m - 4^{62} = 4^{62}(4^{m-62} - 1)$. Так как 4^{62} не делится на 3, то число $4^{m-62} - 1$ должно делиться на $27 = 3^3$. Обозначим $k = m - 62$. Тогда $k \in \mathbb{N}$ и $4^{m-62} - 1 = 4^k - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$. Так как разность чисел $2^k + 1$ и $2^k - 1$ равна 2, то только одно из этих двух чисел может делиться на 3, поэтому оно же делится на 27. Найдём наи-

меньшее k , при котором одно из указанных двух чисел делится на 27.

При $k \leq 4$ имеем $2^k - 1 < 2^k + 1 < 27$, поэтому ни одно из рассматриваемых двух чисел не делится на 27.

При $k = 5$ имеем $2^k - 1 = 31$, $2^k + 1 = 33$, на 27 не делятся.

При $k = 6$ имеем $2^k - 1 = 63 = 7 \cdot 3^2$, $2^k + 1 = 65$, на 27 не делятся.

При $k = 7$ имеем $2^k - 1 = 127$, $2^k + 1 = 129 = 43 \cdot 3$, на 27 не делятся.

При $k = 8$ имеем $2^k - 1 = 255 = 85 \cdot 3$, $2^k + 1 = 257$, на 27 не делятся.

При $k = 9$ имеем $2^k - 1 = 511$, $2^k + 1 = 513 = 19 \cdot 27$, поэтому $2^9 + 1$ делится на 27.

Найденное наименьшее значение k равно 9. Искомое наименьшее значение m равно $k + 62 = 9 + 62 = 71$.

в) Рассмотрим вспомогательное утверждение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда $4^{3^n} - 1$ делится на 3^{n+1} . Доказательство будем вести индукцией по n . База: $n = 1$, $4^3 - 1 = 63$ делится на 3^2 . База доказана. Переход: пусть для некоторого n число $4^{3^n} - 1$ делится на 3^{n+1} . Рассмотрим число $4^{3^{n+1}} - 1 = 4^{3 \cdot 3^n} - 1 = (4^{3^n})^3 - 1 = (4^{3^n} - 1)(4^{2 \cdot 3^n} + 4^{3^n} + 1)$. По предположению индукции число в первых скобках делится на 3^{n+1} . Число во вторых скобках делится на 3. Действительно, число 4 даёт остаток 1 при делении на 3, следовательно, число 4 в любой натуральной степени даёт остаток 1 при делении на 3. Поэтому каждое из трёх слагаемых во вторых скобках даёт остаток 1 при делении на 3, число во вторых скобках делится на 3. Таким образом, $4^{3^{n+1}} - 1 = (4^{3^n} - 1)(4^{2 \cdot 3^n} + 4^{3^n} + 1)$ делится на $3^{n+1} \cdot 3 = 3^{n+2}$.

Из доказанного утверждения следует, что $4^{3^8} - 1 = 4^{6561} - 1$ делится на 3^9 . Поэтому $4^{53}(4^{3^8} - 1) = 4^{6614} - 4^{53}$ также делится на 3^9 . Число $m = 6614$ — искомое.

Ответ: а) 51; б) 71; в) 6614.

1729. а) $4^m - 8^{40} = 4^m - 2^{120} = 4^m - 4^{60}$. Чтобы это число было натуральным, должно выполняться неравенство $m > 60$. Далее, $4^m - 4^{60} = 4^{60}(4^{m-60} - 1)$. Так как 4^{60} не делится на 3, то на 3 должно делиться число $4^{m-60} - 1$, что достигается уже при $m = 61$.

б) Чтобы число $4^m - 4^{39}$ было натуральным, должно выполняться неравенство $m > 39$. Далее, $4^m - 4^{39} = 4^{39}(4^{m-39} - 1)$. Так как 4^{39} не делится на 3, то число $4^{m-39} - 1$ должно делиться на $27 = 3^3$. Обозначим $k = m - 39$. Тогда $k \in \mathbb{N}$ и $4^{m-39} - 1 = 4^k - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$. Так как разность чисел $2^k + 1$ и $2^k - 1$ равна 2, то только одно из этих двух чисел может делиться на 3, поэтому оно же делится на 27. Найдём наименьшее k , при котором одно из указанных двух чисел делится на 27.

При $k \leq 4$ имеем $2^k - 1 < 2^k + 1 < 27$, поэтому ни одно из рассматриваемых двух чисел не делится на 27.

При $k = 5$ имеем $2^k - 1 = 31$, $2^k + 1 = 33$, на 27 не делятся.

При $k = 6$ имеем $2^k - 1 = 63 = 7 \cdot 3^2$, $2^k + 1 = 65$, на 27 не делятся.

При $k = 7$ имеем $2^k - 1 = 127$, $2^k + 1 = 129 = 43 \cdot 3$, на 27 не делятся.

При $k = 8$ имеем $2^k - 1 = 255 = 85 \cdot 3$, $2^k + 1 = 257$, на 27 не делятся.

При $k = 9$ имеем $2^k - 1 = 511$, $2^k + 1 = 513 = 19 \cdot 27$, поэтому $2^9 + 1$ делится на 27.

Найденное наименьшее значение k равно 9. Искомое наименьшее значение m равно $k + 39 = 9 + 39 = 48$.

в) Рассмотрим вспомогательное утверждение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда $4^{3^n} - 1$ делится на 3^{n+1} . Доказательство будем вести индукцией по n . База: $n = 1$, $4^3 - 1 = 63$ делится на 3^2 . База доказана. Переход: пусть для некоторого n число $4^{3^n} - 1$ делится на 3^{n+1} . Рассмотрим число $4^{3^{n+1}} - 1 = 4^{3 \cdot 3^n} - 1 = (4^{3^n})^3 - 1 = (4^{3^n} - 1)(4^{2 \cdot 3^n} + 4^{3^n} + 1)$. По предположению индукции число в первых скобках делится на 3^{n+1} . Число во вторых скобках делится на 3. Действительно, число 4 даёт остаток 1 при делении на 3, следовательно, число 4 в любой натуральной степени даёт остаток 1 при делении на 3. Поэтому каждое из трёх слагаемых во вторых скобках даёт остаток 1 при делении на 3, число во вторых скобках делится на 3. Таким образом, $4^{3^{n+1}} - 1 = (4^{3^n} - 1)(4^{2 \cdot 3^n} + 4^{3^n} + 1)$ делится на $3^{n+1} \cdot 3 = 3^{n+2}$.

Из доказанного утверждения следует, что $4^{3^9} - 1 = 4^{19\,683}$ делится на 3^{10} . Поэтому $4^{44}(4^{3^9} - 1) = 4^{19\,727} - 4^{53}$ также делится на 3^{10} . Число $m = 19\,727$ — искомое.

Примечание. 4 первичных балла за эту задачу распределяются следующим образом: а) 1 балл; б) 1 балл; в) 2 балла.

Ответ: а) 61; б) 48; в) 19 727.

1730. Легко проверить, что при $x = -1$ уравнение $xy = x^3 - y$ не имеет решений. Пусть $x \neq -1$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$y = \frac{x^3}{x+1}. \text{ Но } \frac{x^3}{x+1} = \frac{x^3+1-1}{x+1} = \frac{x^3+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} =$$

$$= x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}. \text{ Число } y = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \text{ должно быть целым, но}$$

$x^2 - x + 1$ — целое для любого целого x , следовательно, 1 должно делиться на $(x+1)$ нацело, то есть $x+1 = \pm 1$. При $x+1 = 1$; $x = 0$; $y = 0$. При $x+1 = -1$; $x = -2$; $y = 8$.

Ответ: $(0; 0)$, $(-2; 8)$.

1731. Легко проверить, что при $x = 2$ уравнение $xy + 2 = 3x + 2y$ не имеет решений в целых числах. Пусть $x \neq 2$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде $y = \frac{3x-2}{x-2}$. Но $\frac{3x-2}{x-2} = \frac{3x-6-2+6}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} + \frac{4}{x-2} = 3 + \frac{4}{x-2}$. Число $y = 3 + \frac{4}{x-2}$ должно быть целым. Следовательно, 4 должно делиться на $(x-2)$ нацело, то есть $x-2 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$.

При $x-2 = 1$; $x = 3$, $y = 7$.

При $x-2 = -1$; $x = 1$, $y = -1$.

При $x-2 = 2$; $x = 4$, $y = 5$.

При $x-2 = -2$; $x = 0$, $y = 1$.

При $x-2 = 4$; $x = 6$, $y = 4$.

При $x-2 = -4$; $x = -2$, $y = 2$.

Ответ: $(-2; 2)$, $(0; 1)$, $(1; -1)$, $(3; 7)$, $(4; 5)$, $(6; 4)$.

1732. а) Пусть $n = \overline{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{s-1} \alpha_s}$ — первое число данной последовательности.

Предположим, что все 79 чисел данной последовательности принадлежат одной сотне, тогда $\overline{\alpha_{s-1} \alpha_s} \in [1; 22]$. В такой последовательности найдутся 40 последовательных чисел, последние две цифры которых $\overline{\alpha 0}$, $\overline{\alpha 1}$, ..., $\overline{\alpha 9}$, $\overline{(\alpha+1)0}$, ..., $\overline{(\alpha+1)9}$, $\overline{(\alpha+2)0}$, ..., $\overline{(\alpha+2)9}$, $\overline{(\alpha+3)0}$, ..., $\overline{(\alpha+3)9}$, где $\alpha \in [1; 6]$, и сумма двух последних цифр для каждого числа в этой последовательности может принимать значения α , $\alpha+1$, ..., $\alpha+12$. Значит, среди этих 40 чисел найдётся число, сумма цифр которого делится на 13.

В случае если не все числа принадлежат одной сотне, в последовательности найдётся число, оканчивающееся двумя нулями. Предположим, что ни сумма его цифр, ни сумма цифр предыдущего числа не делятся на 13, и обозначим его n_0 , а сумму его цифр S_{n_0} . Сумму цифр числа $n_0 - 1$ обозначим S_{n_0-1} . Суммы цифр чисел n_0 , $n_0 + 1$, ..., $n_0 + 39$ принимают все значения от S_{n_0} до $S_{n_0} + 12$, значит, среди этих чисел есть число, делящееся на 13 (так как сумма цифр чисел от 0 до 39 принимает значения от 0 до 12). Суммы цифр чисел $n_0 - 40$, $n_0 - 39$, ..., $n_0 - 1$ также принимают все значения от S_{n_0-1} до $S_{n_0-1} - 12$, значит, среди этих чисел есть число, делящееся на 13. Ясно, что в последовательности из 79 последовательных чисел найдётся или 39 чисел последовательности, больших числа, оканчивающегося двумя нулями, или 40 чисел, меньших числа, оканчивающегося двумя нулями.

Таким образом, среди выписанных на доске последовательных натуральных чисел найдётся число, делящееся на 13.

б) Если 78 чисел данной последовательности такие, что суммы их цифр не делятся на 13, то последнее число этой последовательности оканчивается числом 38 (или 39), а первое числом 60 (или 61). Если последнее число, оканчивается на 38, то сумма первых цифр должна давать остаток 1 при делении на 13. То есть в качестве последнего числа можно взять число вида $10\dots038$, при этом сумма цифр числа $999\dots960$ должна делиться на 13. Отсюда $9k + 6 = 13n$, $n, k \in \mathbb{N}$, что выполняется, например, для $n = 6$ и $k = 8$. Таким образом, первым числом в такой последовательности может быть число $9\,999\,999\,960$ (или аналогично полученное число $9\,999\,999\,961$).

Ответ: а) да; б) $9\,999\,999\,960$, $9\,999\,999\,961$

1733. Пусть число n разлагается на различные простые множители в виде $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. Тогда $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ ввиду того, что i -й простой сомножитель может входить в разложение делителя числа n от 0 до a_i раз.

В случае а) $d(m^2 - 196) = 2$, поэтому $m^2 - 196 = p$, где p — некоторое простое число. Отсюда $p = (m - 14)(m + 14)$. Ввиду того, что число p — простое, один из сомножителей $m - 14$ и $m + 14$ равен 1, а другой — простое число. Поэтому $m - 14 = 1$; $m = 15$; $m + 14 = 29$ — простое. Случаю а) удовлетворяет единственное число $m = 15$.

В случае б) $d(m^2 + 24) = 3$, поэтому $m^2 + 24 = p^2$, где p — некоторое простое число. Отсюда $(p - m)(p + m) = 24$. Сумма чисел $p - m$ и $p + m$ делится на 2 нацело, поэтому $p - m$ и $p + m$ имеют одинаковую чётность. Кроме того, $p - m < p + m$, поэтому возможны 2 варианта разложения числа 24 на множители $p - m$ и $p + m$:

$$1) \begin{cases} p - m = 2, \\ p + m = 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 7, \\ m = 5. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} p - m = 4, \\ p + m = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 5, \\ m = 1. \end{cases}$$

Случаю б) удовлетворяют числа $m = 1$ и $m = 5$.

В случае в) рассмотрим отдельно варианты $m = 2$, $m = 3$ и $m > 3$. При $m = 2$ имеем $d(m^2 + 23) = d(27) = d(3^3) = 4$. При $m = 3$ имеем $d(m^2 + 23) = d(32) = d(2^5) = 6$. При простом $m > 3$ имеем $m^2 + 23 = (m - 1)(m + 1) + 24$. Так как m — простое число, большее 3, то $m - 1$ и $m + 1$ — два последовательных чётных числа, следовательно, одно из них делится на 4, и $(m - 1)(m + 1)$ делится на 8. Кроме того, число m не

делится на 3, поэтому на 3 делится одно из чисел $m - 1$ и $m + 1$. Следовательно, $(m - 1)(m + 1)$ делится на $8 \cdot 3 = 24$ и $m^2 + 23 = (m - 1)(m + 1) + 24$ также делится на 24. Поэтому $d(m^2 + 23) \geq d(24) = d(2^3 \cdot 3) = 4 \cdot 2 = 8$. Случаю в) удовлетворяет единственное число $m = 3$.

Примечание. 4 первичных балла за эту задачу распределяются следующим образом: а) 1 балл; б) 1 балл; в) 2 балла.

Ответ: а) 15; б) 1 и 5; в) 3.

1734. Пусть число n разлагается на различные простые множители в виде $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. Тогда $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ ввиду того, что i -й простой сомножитель может входить в разложение делителя числа n от 0 до a_i раз.

В случае а) $d(m^2 - 324) = 2$, поэтому $m^2 - 324 = p$, где p — некоторое простое число. Отсюда $p = (m - 18)(m + 18)$. Ввиду того, что число p простое, один из сомножителей $m - 18$ и $m + 18$ равен 1, а другой — простое число. Поэтому $m - 18 = 1$; $m = 19$; $m + 18 = 37$ — простое. Случаю а) удовлетворяет единственное число $m = 19$.

В случае б) $d(m^2 + 40) = 3$, поэтому $m^2 + 40 = p^2$, где p — некоторое простое число. Отсюда $(p - m)(p + m) = 40$. Сумма чисел $p - m$ и $p + m$ делится на 2 нацело, поэтому $p - m$ и $p + m$ имеют одинаковую чётность. Кроме того, $p - m < p + m$, поэтому возможны 2 варианта разложения числа 40 на множители $p - m$ и $p + m$:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} p - m = 2, \\ p + m = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 11, \\ m = 9. \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} p - m = 4, \\ p + m = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 7, \\ m = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Случаю б) удовлетворяют числа $m = 3$ и $m = 9$.

В случае в) рассмотрим отдельно варианты $m = 2$, $m = 3$ и $m > 3$. При $m = 2$ имеем $d(m^2 + 35) = d(39) = d(3 \cdot 13) = 2 \cdot 2 = 4$. При $m = 3$ имеем $d(m^2 + 35) = d(44) = d(2^2 \cdot 11) = 3 \cdot 2 = 6$. При простом $m > 3$ имеем $m^2 + 35 = (m - 1)(m + 1) + 36$. Так как m — простое число, большее 3, то $m - 1$ и $m + 1$ — чётные числа, и $(m - 1)(m + 1)$ делится на 4. Кроме того, число m не делится на 3, поэтому на 3 делится одно из чисел $m - 1$ и $m + 1$. Следовательно, $(m - 1)(m + 1)$ делится на $4 \cdot 3 = 12$ и $m^2 + 35 = (m - 1)(m + 1) + 36$ также делится на 12. Поэтому делителями числа $m^2 + 35$ являются все делители числа 12 (это 1, 2, 3, 4, 6, 12), а также само число $m^2 + 35 > 12$. Поэтому $d(m^2 + 35) \geq 7$. Случаю в) удовлетворяет единственное число $m = 3$.

Примечание. 4 первичных балла за эту задачу распределяются сле-

дующим образом: а) 1 балл; б) 1 балл; в) 2 балла.

Ответ: а) 19; б) 3 и 9; в) 3.

1735. Индукцией по n докажем следующее утверждение: при каждом натуральном n среди чисел 3^{2^n} , 5^{2^n} , 6^{2^n} одно число даёт при делении на 7 остаток 2, другое — остаток 4, третье — остаток 1.

База: $n = 1$. Имеем $3^{2^1} = 9$, остаток 2 при делении на 7; $5^{2^1} = 25$, остаток 4 при делении на 7; $6^{2^1} = 36$, остаток 1 при делении на 7.

Переход: пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ утверждение выполняется. Докажем его для $n + 1$. Так как $3^{2^{n+1}} = (3^{2^n})^2$, $5^{2^{n+1}} = (5^{2^n})^2$, $6^{2^{n+1}} = (6^{2^n})^2$, то для нахождения остатков от деления этих чисел на 7 рассмотрим квадраты остатков от деления на 7 чисел 3^{2^n} , 5^{2^n} , 6^{2^n} . По предположению индукции остатки равны 2, 4 и 1 (необязательно в указанном порядке). Квадраты остатков равны 4, 16 и 1. 4 при делении на 7 даёт остаток 4; 16 — остаток 2; 1 — остаток 1. Следовательно, переход доказан.

Из доказанного утверждения следует, что для всех натуральных n число $3^{2^n} + 5^{2^n} + 6^{2^n}$ делится на 7, откуда следует, что это число составное.

Ответ: 0.

1736. Разложение числа n на простые множители имеет вид

$n = 2^a \cdot 3^b \cdot \dots \cdot 11^d \cdot \dots \cdot p^k$, где все показатели — целые, неотрицательные числа. Так как n делится на $8 = 2^3$, на $9 = 3^2$ и на $11 = 11^1$, то $a \geq 3$, $b \geq 2$, $d \geq 1$.

Количество всех делителей числа n равно

$(a+1)(b+1) \dots (d+1) \dots (k+1) = 30$, но число 30 единственным образом раскладывается в виде произведения $2 \cdot 3 \cdot 5$, поэтому только три множителя $a+1$, $b+1$ и $d+1$ могут принимать значения 2, 3 и 5 в различных вариантах. Остальные множители являются единицами, а значит, соответствующие показатели в разложении числа n на простые множители равны нулю.

Учитывая, что $a \geq 3$, $b \geq 2$, $d \geq 1$, имеем единственный вариант:

$$\begin{cases} a+1 = 5, \\ b+1 = 3, \\ d+1 = 2, \end{cases} \text{ поэтому } a = 4, b = 2 \text{ и } d = 1, \text{ и число } n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^1 = 1584.$$

Ответ: 1584.

1737. Разложение числа n на простые множители имеет вид

$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot \dots \cdot p^k$, где все показатели — целые, неотрицательные числа. Так как n делится на $4 = 2^2$, на $9 = 3^2$ и на $49 = 7^2$, то $a \geq 2$, $b \geq 2$, $d \geq 2$.

Количество всех делителей числа n равно

$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \dots (k+1) = 45$, но число 45 единственным

образом раскладывается в виде произведения $3 \cdot 3 \cdot 5$, поэтому только три множителя $a + 1$, $b + 1$ и $d + 1$ могут принимать значения 3, 3 и 5 в различных вариантах. Остальные множители являются единицами, а значит, соответствующие показатели в разложении числа n на простые множители равны нулю.

Вариантов может быть три:

- 1) $\begin{cases} a + 1 = 3, \\ b + 1 = 3, \\ d + 1 = 5, \end{cases}$ поэтому $a = 2$, $b = 2$ и $d = 4$, и число $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^4 = 86\,436$.
- 2) $\begin{cases} a + 1 = 3, \\ b + 1 = 5, \\ d + 1 = 3, \end{cases}$ поэтому $a = 2$, $b = 4$ и $d = 2$, и число $n = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 = 15\,876$.
- 3) $\begin{cases} a + 1 = 5, \\ b + 1 = 3, \\ d + 1 = 3, \end{cases}$ поэтому $a = 4$, $b = 2$ и $d = 2$, и число $n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 70\,56$.

Ответ: 7056, 15 876, 86 436.

1738. Обозначим числа, записанные на доске как a_1, a_2, \dots, a_n , где $a_1 = 2^{q_1}, a_2 = 2^{q_2}, \dots, a_n = 2^{q_n}$; $q_1, q_2, \dots, q_n \in N, q_1 < q_2 < \dots < q_n$.

По условию задачи $8 = 2^3 = \sqrt[n]{2^{q_1} \cdot 2^{q_2} \cdot \dots \cdot 2^{q_n}} = 2^{\frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{n}}$, откуда

$$\frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{n} = 3. \text{ С другой стороны } \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{n} \geq \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{(1 + n)n}{2n} = \frac{1 + n}{2}. \text{ Значит, } 3 \geq \frac{1 + n}{2}, \text{ то есть } n \leq 5.$$

Рассмотрим пять случаев:

- 1) При $n = 1$ $a_1 = 8$, среднее геометрическое равно 8, $n = 1$ — решение.
- 2) При $n = 2$ $a_1 \cdot a_2 = 8^2 = 2^6 = 2^1 \cdot 2^5$, где $\frac{2 + 2^5}{2} = 17$, $n = 2$ — решение.
- 3) При $n = 3$ $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 8^3 = 2^9 = 2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^5$, где $\frac{2 + 2^3 + 2^5}{3} = 14$, $n = 3$ — решение.
- 4) При $n = 4$ $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 8^4 = 2^{12}$. Так как $q_2 > q_1 \geq 1$ получим, что $q_2 \geq 2, q_4 > q_3 > q_2 \geq 2$, а значит, $2^{q_2} + 2^{q_3} + 2^{q_4}$ делится нацело на 4 (так как каждое слагаемое делится на 4). $\frac{2^{q_1} + 2^{q_2} + 2^{q_3} + 2^{q_4}}{4} \in N$, поэтому

$q_1 \geq 2$, а если $q_1 \geq 2$, то $q_2 \geq 3$, $q_3 \geq 4$, $q_4 \geq 5$, $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \geq 14$ и $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \geq 2^{14}$, что противоречит условию.

5) При $n = 5$ $2^{q_1} \cdot 2^{q_2} \cdot 2^{q_3} \cdot 2^{q_4} \cdot 2^{q_5} = 2^{15}$, $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 15$, но $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. То есть равенство достигается только при $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 3$, $q_4 = 4$, $q_5 = 5$, но $\frac{2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5}{5} = \frac{2 + 4 + 8 + 16 + 32}{5} = \frac{62}{5} \notin N$.

Ответ: 1, 2, 3.

1739. Обозначим числа, записанные на доске, как a_1, a_2, \dots, a_n , где $a_1 = 2^{p_1}, a_2 = 2^{p_2}, \dots, a_n = 2^{p_n}; p_1, p_2, \dots, p_n \in N, p_1 < p_2 < \dots < p_n$.

По условию задачи $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 112$, откуда

$2^{p_1}(1 + 2^{p_2 - p_1} + \dots + 2^{p_n - p_1}) = 2^4 \cdot 7n$, а значит, $p_1 \geq 4$. Пусть $b_1 = 2^{p_1 - 4} = 2^{q_1}$, $b_2 = 2^{p_2 - 4} = 2^{q_2}$, \dots , $b_n = 2^{p_n - 4} = 2^{q_n}$ ($q_1, q_2, \dots, q_n \in Z$, $0 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_n$). Тогда $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 7n$. Заметим, что $b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, тогда $7n \geq 2^n - 1$. Докажем, что при $n \geq 6$ имеет место неравенство $2^n - 1 > 7n$. Это можно сделать несколькими способами.

Первый способ. Для $n = 6$ имеем $2^6 - 1 > 7 \cdot 6$. Если утверждение верно для $n = k$ (то есть $2^k - 1 > 7k$), тогда для $n = k + 1$ получим $2^{k+1} - 1 > 2^k - 1 + 2^k - 1 > 7k + 7k > 7k + 7 = 7(k + 1)$, а значит, утверждение справедливо для всех $n \in N, n \geq 6$.

Второй способ. Рассмотрим функцию $f(x) = 2^x - 7x - 1, x \in R$, тогда $f'(x) = 2^x \ln 2 - 7, f'(x_0) = 0$, если $2^{x_0} = \frac{7}{\ln 2}, x_0 = \log_2 7 - \log_2 \ln 2 <$

$< \log_2 7 - \log_2 \log_4 2 < \log_2 8 - \log_2 \frac{1}{2} = 4$, откуда $f'(x) > 0$ при $x \geq 4$, то есть $f(x)$ возрастает на $[4; +\infty)$, $f(6) = 64 - 42 - 1 > 0, f(n) \geq f(6) > 0$, а значит, и $2^n - 1 > 7n$ при $n \geq 6$.

Рассмотрим пять случаев:

1) $n = 1; 2^{q_1} = 7$ — нет решений.

2) $n = 2; 2^{q_1} + 2^{q_2} = 14; 2^{q_1}(1 + 2^{q_2 - q_1}) = 2 \cdot 7; 1 + 2^{q_2 - q_1} = 7; 2^{q_2 - q_1} = 6$ — нет решений.

3) $n = 3; 2^{q_1} + 2^{q_2} + 2^{q_3} = 21$. Поскольку при $q_1 = 0, q_2 = 2$ и $q_3 = 4$ $2^{q_1} + 2^{q_2} + 2^{q_3} = 1 + 4 + 16 = 21, n = 3$ — решение.

4) $n = 4$; $2^{q_1} + 2^{q_2} + 2^{q_3} + 2^{q_4} = 4 \cdot 7$; $2^{q_1}(1 + 2^{q_2 - q_1} + 2^{q_3 - q_1} + 2^{q_4 - q_1}) = 2^2 \cdot 7$; $2^{q_2 - q_1} + 2^{q_3 - q_1} + 2^{q_4 - q_1} = 6$; $2^{q_2 - q_1}(1 + 2^{q_3 - q_2} + 2^{q_4 - q_2}) = 2 \cdot 3$; $2^{q_3 - q_2} + 2^{q_4 - q_2} = 2$ — нет решений.

5) $n = 5$; $2^{q_1} + 2^{q_2} + 2^{q_3} + 2^{q_4} + 2^{q_5} = 35$; $2^{q_5} \leq 32$. Если $2^{q_5} = 32$, то $2^{q_1} + 2^{q_2} + 2^{q_3} + 2^{q_4} = 3$ — не имеет решений. Если $2^{q_5} < 32$, то так как $0 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_n$, $2^{q_1} = 1$; $2^{q_2} = 2$; $2^{q_3} = 4$; $2^{q_4} = 8$; $2^{q_5} = 16$ — не удовлетворяет условию.

Ответ: 3.