

ЕГЭ

$$\sqrt{x^6 - 64} + \sqrt{x^5} = 2 - x$$

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова



готовимся
к ЕГЭ

РЕШЕБНИК

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫЕ
ТЕСТЫ

ПОДГОТОВКА
К ЕГЭ-2013

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»



Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

РЕШЕБНИК

УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2013

Учебно-методическое пособие



ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2013

ББК 22.1

М 34

Рецензенты: *О. Б. Кожевников* — к.ф.-м.н., доцент
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель РФ

Авторский коллектив:

Иванов С. О., Коннова Е. Г., Кулабухов С. Ю., Нужа Г. Л.,
Ольховая Л. С., Резникова Н. М., Ханин Д. И.

М 34 Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2013. Учебно-тренировочные тесты: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 192 с. — (Готовимся к ЕГЭ)

ISBN 978-5-9966-0249-0

Данный решебник предназначен для подготовки обучающихся к ЕГЭ по математике. Он содержит решения всех вариантов учебно-тренировочных тестов пособия «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013. Учебно-тренировочные тесты» под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова.

Надеемся, что данная книга поможет выпускнику быстро освоить весь необходимый материал и алгоритмы выполнения всех типов экзаменационных заданий и успешно подготовиться к ЕГЭ.

Пособие является частью **учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ»**, включающего такие книги, как «Математика. Подготовка к ЕГЭ. Учебно-тренировочные тесты», «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2013. Пособие для „чайников“» (В1 – В6 и В7 – В14) и др.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать по почте или на электронный адрес:

legionrus@legionrus.com.

Обсудить пособие, оставить замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства <http://legionr.rossite.org>.

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0249-0

© ООО «Легион», 2013

Оглавление

Решения вариантов тестов	4
Решение варианта 1	4
Решение варианта 2	11
Решение варианта 3	19
Решение варианта 4	27
Решение варианта 5	36
Решение варианта 6	45
Решение варианта 7	51
Решение варианта 8	57
Решение варианта 9	65
Решение варианта 10	73
Решение варианта 11	81
Решение варианта 12	88
Решение варианта 13	96
Решение варианта 14	104
Решение варианта 15	114
Решение варианта 16	124
Решение варианта 17	133
Решение варианта 18	141
Решение варианта 19	150
Решение варианта 20	161
Решение варианта 21	170
Решение варианта 22	178

Решения вариантов тестов

Решение варианта 1

В1. В сутках 24 часа, то есть в первый день поезд Ростов — Москва был в пути 10 часов 20 минут ($24 - 13.40 = 10.20$), а в следующий день — 7 часов 40 минут. Отсюда, $10.20 + 7.40 = 18.00$. Поезд находился в пути 18 часов.

Ответ: 18.

В2. Искомое напряжение через 2 часа после начала работы будет равно 1,2 вольта (ордината, соответствующая 2 часам, равна 1,2).

Ответ: 1,2.

В3. Площадь данного треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$S = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2} = 17,5 \text{ (см}^2\text{)}.$$

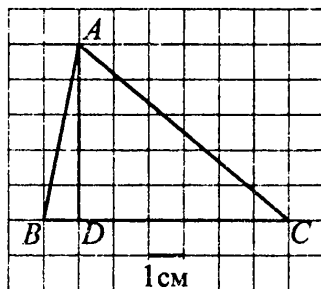


Рис. 1.

Ответ: 17,5.

В4. Определим время (в часах), которое потребуется на дорогу с использованием разных видов транспорта.

Автобус: $\frac{1}{6} + 2\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{27}{12} + \frac{4}{12} = 3\frac{3}{4} = 2,75 \text{ (ч)}.$

Электричка: $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ (ч)}.$

Маршрутное такси: $\frac{1}{4} + 1\frac{5}{6} + \frac{5}{12} = \frac{3}{12} + \frac{22}{12} + \frac{5}{12} = \frac{30}{12} = 2,5 \text{ (ч)}.$

Наименьшее время равно 2,25 часа.

Ответ: 2,25.

В5. $\frac{3}{7}x = -6\frac{3}{7}, \frac{3}{7}x = -\frac{45}{7}, x = -15.$

Ответ: -15.

В6. BK — высота трапеции. Проведём радиусы OE и OF из центра O к точкам касания E и F .

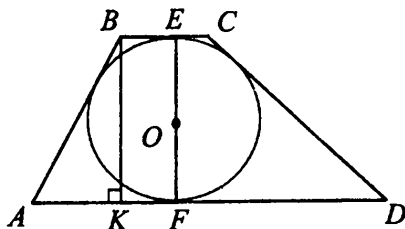


Рис. 2.

Окружность вписана, значит, стороны трапеции являются касательными к данной окружности, $OE \perp BC$, $OF \perp AD$ как радиусы, проведённые в точку касания, $BC \parallel AD$, следовательно EF — диаметр. $BK = EF = 2 \cdot 12 = 24$.

Ответ: 24.

В7. $5^9 \cdot 6^{12} : 30^9 = \frac{5^9 \cdot 6^{12}}{5^9 \cdot 6^9} = 6^3 = 216.$

Ответ: 216.

В8. Касательная к графику функции $f(x)$ в некоторой точке параллельна прямой $y = -x + 2$, если значение производной функции в этой точке равно угловому коэффициенту прямой, то есть $f'(x) = -1$. По графику видно, что $f'(x)$ принимает значение -1 в двух точках.

Ответ: 2.

В9. Известны все три измерения прямоугольного параллелепипеда: 12, 24, 3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений (см. рис. 3 на с. 6).

$$DB_1^2 = C_1D_1^2 + BC^2 + BB_1^2.$$

$$DB_1^2 = 12^2 + 24^2 + 3^2 = 144 + 576 + 9 = 729, DB_1 = 27.$$

Ответ: 27.

В10. В вагоне среди 20 пассажиров 3 без билета. Вероятность того, что контролёр проверил билет именно у безбилетного пассажира, равна

$$\frac{3}{20} = 0,15.$$

Ответ: 0,15.

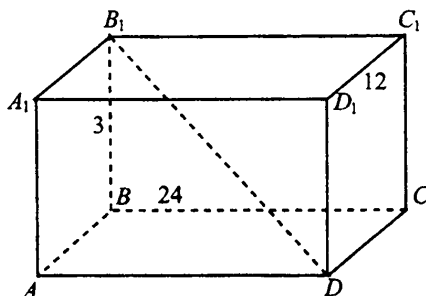


Рис. 3.

В11. Так как $V_{\text{цилиндра}} = S_{\text{осн}} \cdot h$, а $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$, то

$$V_{\text{цилиндра}} = 3V_{\text{конуса}} = 3 \cdot 15 = 45.$$

Ответ: 45.

В12. $p = 105 - 7k$, k — цена продукции (тысяч рублей). $q = p \cdot k$, $q \geq 182$,
 $(105 - 7k)k \geq 182$, $-7k^2 + 105k - 182 \geq 0$, $7k^2 - 105k + 182 \leq 0$,
 $k^2 - 15k + 26 \leq 0$, $2 \leq k \leq 13$.

Максимальный уровень цены k равен 13 тыс. рублей.

Ответ: 13.

В13. Скорость сближения двух человек равна $5 \text{ км/ч} + 4 \text{ км/ч} = 9 \text{ км/ч}$.
 Следовательно, они встретятся через $22,5 \text{ км} : 9 \text{ км/ч} = 2,5 \text{ ч}$.

Ответ: 2,5.

В14. Найдём стационарные точки функции $y = 10x^3 + 15x^2 - 180x + 17$.
 $y' = 30x^2 + 30x - 180$, $y' = 0$, $x^2 + x - 6 = 0$, $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$.

При переходе через точку $x = -3$ производная меняет знак с «+» на «-», следовательно, $x = -3$ — точка максимума, а при переходе через точку $x = 2$ производная меняет знак с «-» на «+», следовательно, $x = 2$ — точка минимума.

Ответ: 2.

С1. а) $2 \log_2(\cos 2x - \sin x + 2\sqrt{2}) = 3$.

$$\cos 2x - \sin x + 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}},$$

$$\cos 2x - \sin x + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\cos 2x - \sin x = 0,$$

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0,$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0,$$

Обозначим $\sin x = t$. $2t^2 + t - 1 = 0$. $t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$.

$$t_1 = -1; t_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

6) Найдём все корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$.

$$-\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq -\pi; \quad -\frac{5}{2} \leq -\frac{1}{2} + 2n \leq -1, \quad -2 \leq 2n \leq -\frac{1}{2},$$

$$-1 \leq n \leq -\frac{1}{4}, \quad n = -1.$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{5\pi}{2}.$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \leq -\pi.$$

$$k \text{ — чётное; } -\frac{5}{2} \leq \frac{1}{6} + k \leq -1, \quad -\frac{8}{3} \leq k \leq -\frac{7}{6}, \quad -2\frac{2}{3} \leq k \leq -1\frac{1}{6}.$$

$$k = -2, \quad x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}.$$

$$k \text{ — нечётное; } -\frac{5}{2} \leq -\frac{1}{6} + k \leq -1, \quad -\frac{7}{3} \leq k \leq -\frac{5}{6}, \quad -2\frac{1}{3} \leq k \leq -\frac{5}{6}.$$

$k = -2$ — чётное, не удовлетворяет условию k — нечётное; $k = -1$,

$$x = -\frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{7\pi}{6}.$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.

С2. 1. Треугольник ABD — прямоугольный (см. рис. 4 на с. 8).

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20.$$

2. Из точки A опустим перпендикуляр AK на прямую B_1D_1 ; $AK \perp B_1D_1$. Построим $KH \perp ABD$. Тогда $KH \perp A_1B_1D_1$, так как $A_1B_1D_1 \parallel ABD$.

Следовательно, $\angle AKH$ — линейный угол искомого двугранного угла между плоскостями BDD_1 и AB_1D_1 . $AH \perp BD$ по теореме о трёх перпендикулярах.

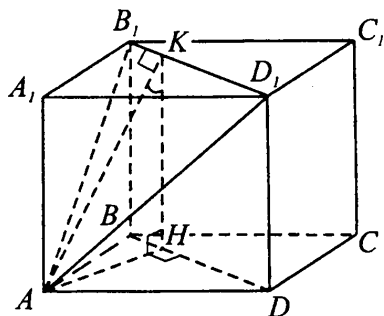


Рис. 4.

3. Из $\triangle ABD$ найдём AH : $S_{ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AH = 10AH$;

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96; 10AH = 96; AH = \frac{48}{5}.$$

4. Из прямоугольного $\triangle AKH$ находим:

$$\operatorname{tg} \angle AKH = \frac{AH}{KH} = \frac{48}{5 \cdot 9} = \frac{16}{15}. \text{ Следовательно, } \angle AKH = \operatorname{arctg} \frac{16}{15}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{16}{15}$.

СЗ. Решим каждое неравенство системы по отдельности.

$$1) \log_x(x+2) > 2, \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x+2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$\log_x(x+2) > 2, \log_x(x+2) > \log_x x^2$. Применяя метод рационализации, получаем, что на ОДЗ это неравенство равносильно неравенству $(x-1)(x+2-x^2) > 0, (x+1)(x-2)(x-1) < 0$.

С учётом ОДЗ получаем $x \in (1; 2)$.

$$2) (x-1) \log_5 2 + \log_5(2^{x+1} + 1) < \log_5(7 \cdot 2^x + 12).$$

Заметим, что для всех вещественных x выполнено $2^{x+1} + 1 > 0$ и $7 \cdot 2^x + 12 > 0$.

Далее получим $\log_5 2^{x-1} + \log_5(2^{x+1} + 1) < \log_5(7 \cdot 2^x + 12)$, $\log_5(2^{2x} + 2^{x-1}) < \log_5(7 \cdot 2^x + 12)$, $4^x + 2^{x-1} < 7 \cdot 2^x + 12$, $2^{2x} - \frac{13}{2} \cdot 2^x - 12 < 0$. Пусть $2^x = t$, $t^2 - \frac{13}{2}t - 12 < 0$. Корнями уравнения

$$t^2 - \frac{13}{2}t - 12 = 0 \text{ являются } t_1 = 8, t_2 = -\frac{3}{2}.$$

Неравенство выполнено при $t \in \left(-\frac{3}{2}; 8\right)$, $2^x \in \left(-\frac{3}{2}; 8\right) \Leftrightarrow 2^x < 8$; $x < 3$.

3) Найдём пересечение решений первого и второго неравенств системы, получим $x \in (1; 2)$.

Ответ: $(1; 2)$.

С4. Возможны два случая.

1) Биссектрисы при стороне AD пересекаются внутри параллелограмма (см. рис. 5).

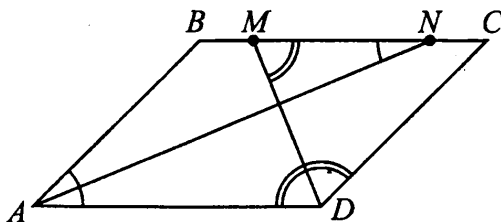


Рис. 5.

$\angle DAN = \angle BNA$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AN) $\Rightarrow \triangle ABN$ равнобедренный: $BN = AB = 20$. Аналогично, $MC = CD = 20$. Так как $BM : MN = 2 : 3$, то $MN = 1,5BM$; $BN = BM + MN = 2,5BM$; $2,5BM = 20$; $BM = 8$; $BC = BM + MC = 8 + 20 = 28$.

2) Биссектрисы при стороне AD не пересекаются внутри параллелограмма (см. рис. 6).

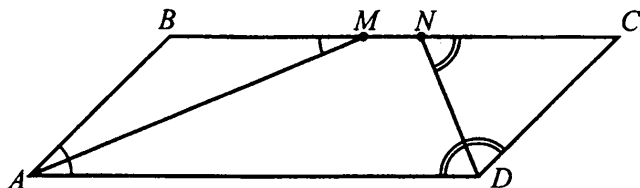


Рис. 6.

Аналогично предыдущему случаю $BM = AB = 20$ и $CN = CD = 20$. Так как $BM : MN = 2 : 3$, то $MN = 1,5BM = 30$. $BC = BM + MN + CN = 20 + 30 + 20 = 70$.

Ответ: 28 или 70.

С5. Запишем уравнение в виде $a|x - 6| = 4 - \sqrt{x}$ и построим графики $y = 4 - \sqrt{x}$ и $y = a|x - 6|$. Из рисунка 7 видно, что искомые значения па-

раметра a должны удовлетворять условию $a_1 < a < a_2$, при этом графики будут иметь более 2-х общих точек.

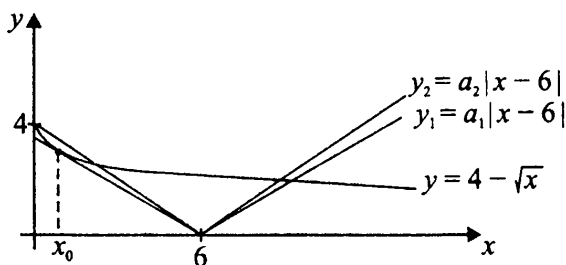


Рис. 7.

Так как $y_2(0) = a_2|0 - 6| = 6a_2 = 4$, то $a_2 = \frac{2}{3}$.

Пусть x_0 — абсцисса точки касания графиков функций $y = 4 - \sqrt{x}$ и $y_1 = a_1|x - 6|$. При этом уравнение касательной имеет вид $f(x) = a_1(6 - x) = -a_1x + 6a_1$. Тогда угловым коэффициентом касательной $-a_1 = y'(x_0) = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, то есть $a_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

С другой стороны, $y(x_0) = f(x_0)$, то есть $-a_1x_0 + 6a_1 = 4 - \sqrt{x_0}$. Таким образом, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \\ -a_1x_0 + 6a_1 = 4 - \sqrt{x_0}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $\sqrt{x_0} = 4 \pm \sqrt{10}$. Из рисунка 7 следует, что $x_0 < 6$; $\sqrt{x_0} < \sqrt{6}$. Следовательно, $\sqrt{x_0} = 4 - \sqrt{10}$.

$$\text{Итак, } a_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2(4 - \sqrt{10})} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{12}.$$

$$\text{Таким образом, } \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{12} < a < \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{12}; \frac{2}{3} \right).$$

С6. а) Пусть c, d — некоторые натуральные числа, такие, что $cd = 600$.

Пусть $k = \text{НОД}(c, d)$. Тогда $c = \alpha k$, $d = \beta k$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\text{НОД}(\alpha, \beta) = 1$. Но в этом случае $cd = \alpha\beta k^2$, откуда $\alpha\beta k^2 = 600$.

Определим наибольшее значение k , при котором $\alpha\beta k^2 = 600, 600:k^2$.

Очевидно, что при $k = 10$ выполняется то, что $600:k^2$, при этом $\alpha\beta = 6$.

Покажем, что это наибольшее возможное значение k . Действительно, k принимает наибольшее значение в том случае, когда $\alpha\beta$ принимает наименьшее значение. Если $\alpha\beta < 6$, то $\alpha\beta = 5, \alpha\beta = 4, \alpha\beta = 3, \alpha\beta = 2$ или $\alpha\beta = 1$.

При этом соответственно должно выполняться $k^2 = 120, k^2 = 150, k^2 = 200, k^2 = 300$ или $k^2 = 600$. Однако ни одно из чисел 120, 150, 200, 300, 600 не является полным квадратом. Значит, $\alpha\beta = 6$ и $k = 10$.

Если, например, $\alpha = 2, \beta = 3$, то $c = 20, d = 30$.

б) Пусть $cd = 12$. Аналогично предыдущему случаю, $c = \alpha k, d = \beta k, cd = \alpha\beta k^2$.

Заметим, что $12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1$. Так как $12!$ делится на k^2 , число k состоит из тех же простых делителей что и $12!$, то есть $k = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot 7^{x_4} \cdot 11^{x_5}$, при этом $k^2 = 2^{2x_1} \cdot 3^{2x_2} \cdot 5^{2x_3} \cdot 7^{2x_4} \cdot 11^{2x_5}$. Значит, $2x_1 \leq 10, 2x_2 \leq 5, 2x_3 \leq 2, 2x_4 \leq 1, 2x_5 \leq 1$.

Наибольшее значение число k принимает при $x_1 = 5, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$, в этом случае $k = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 1440$. При этом можно, например, считать $\alpha = 1, \beta = \frac{12!}{(1440)^2}$.

в) При $n \leq 300$, аналогично получим, что $\alpha\beta k^2 \leq 500, k^2 \leq 500, k \leq 22$.

При $k = 22$ возьмём $\alpha = \beta = 1$, тогда $cd = 480$.

Ответ: а) 10; б) 1440; в) 22.

Решение варианта 2

В1. В каждом подъезде 35 квартир. $109 = 3 \cdot 35 + 4$, то есть 4 квартиры расположены в четвёртом подъезде, в том числе и квартира № 109.

Ответ: 4.

В2. Наименьшая цена нефти определяется по графику как точка с наименьшим значением 70 по оси ординат. Ей соответствует 25-й день на оси чисел месяца.

Ответ: 25.

В3. Из рисунка видно, что основание треугольника (на рисунке это вертикальный отрезок) равно 6, а высота равна 4. Следовательно, его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.

Ответ: 12.

В4. Определим время (в часах), которое потребуется на дорогу с использованием разных видов транспорта.

$$\text{Автобус: } \frac{1}{12} + 3\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + 3\frac{2}{12} + \frac{3}{12} = 3\frac{6}{12} = 3,5 \text{ (ч).}$$

$$\text{Электричка: } \frac{1}{3} + 2\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{4}{12} + 2\frac{1}{12} + \frac{4}{12} = 2\frac{9}{12} = 2,75 \text{ (ч).}$$

$$\text{Маршрутное такси: } \frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 2\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 3 \text{ (ч).}$$

Наименьшее время равно 2,75 часа.

Ответ: 2,75.

В5. $\frac{1-2x}{x+13} = -3$.

ОДЗ. $x \neq -13$.

$$1 - 2x = -3(x + 13), \quad -2x + 3x = -39 - 1, \quad x = -40.$$

Ответ: -40.

В6. Пусть $BC = 9$, $AB = 3\sqrt{7}$. $AC = 2R$, где R — радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$. Из треугольника ABC найдём $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{63 + 81} = \sqrt{144} = 12$. Отсюда $R = 6$.

Ответ: 6.

В7. $\frac{b^{4,44}}{b^{3,11} \cdot b^{3,33}} = \frac{b^{4,44}}{b^{6,44}} = \frac{1}{b^2}, \quad \frac{6^2}{(\sqrt{5})^2} = 36 : 5 = 7,2$.

Ответ: 7,2.

В8. Значение производной $f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту k касательной к графику функции в этой точке. На касательной выберем две точки $A(5; 4)$ и $B(0; -3)$ (см. рис. 8), тогда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 4}{0 - 5} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Ответ: 1,4.

В9. DC_2 — диагональ прямоугольного параллелепипеда с тремя измерениями $DC = 4$, $AA_2 = 10$, $D_1F_1 = 3$.

$$DC_2^2 = DC^2 + AA_2^2 + D_1F_1^2, \quad DC_2^2 = 16 + 100 + 9 = 125.$$

Ответ: 125.

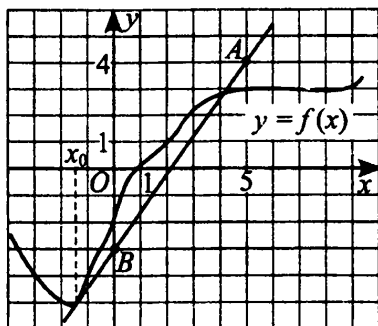


Рис. 8.

В10. Тетрадей в линию $15 - 9 = 6$ штук. Вероятность того, что наугад взятая тетрадь — в линию, равна $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4$.

Ответ: 0,4.

В11. Прямоугольный параллелепипед, описанный около сферы, является кубом, ребро которого $a = 2R$, где R — радиус вписанной сферы. Его объём $V = a^3 = (2R)^3 = (2 \cdot 2,5)^3 = 5^3 = 125$.

Ответ: 125.

В12. $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, $10(1 + 1,2 \cdot 10^{-5} t^\circ) = 10 + 11,4 \cdot 10^{-3}$,
 $10 + 12 \cdot 10^{-5} t^\circ = 10 + 11,4 \cdot 10^{-3}$, $12 \cdot 10^{-5} t^\circ = 11,4 \cdot 10^{-3}$, $t^\circ = \frac{11,4 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-5}}$,
 $t^\circ = 0,95 \cdot 10^2$, $t^\circ = 95$.

Ответ: 95.

В13. Скорость поезда $v = 90 \text{ км/ч} = \frac{90 \cdot 1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = 25 \text{ м/с}$.

За 24 с поезд проезжает мимо семафора, то есть $S = 25 \cdot 24 = 600 \text{ (м)}$, это и есть длина поезда.

Ответ: 600.

В14. $y = \sqrt{x^2 + 8x + 25}$, $y' = \frac{2x + 8}{2\sqrt{x^2 + 8x + 25}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x + 25}}$;

$x^2 + 8x + 25 = (x + 4)^2 + 9 > 0$ при любом значении x .

$y' = 0$, $x = -4$.

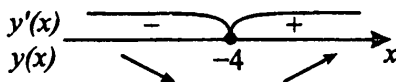


Рис. 9.

$x = -4$ — точка минимума (см. рис. 9), следовательно, в ней функция принимает наименьшее значение.

$$y(-4) = \sqrt{(-4)^2 + 8 \cdot (-4) + 25} = \sqrt{9} = 3.$$

Ответ: 3.

$$\text{С1. а) } \log_3 \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{5}{12} \right) = -1.$$

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{5}{12} = \frac{1}{3}, \quad \frac{3 - 9 \operatorname{tg}^2 x}{12(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = 0;$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) Найдём все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5}{2}\pi\right]$.

$$-4\pi \leq \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \leq -\frac{5\pi}{2},$$

$$-4 \leq \pm \frac{1}{6} + n \leq -\frac{5}{2},$$

$$-4 - \frac{1}{6} \leq n \leq -\frac{5}{2} - \frac{1}{6},$$

$$-\frac{25}{6} \leq n \leq -\frac{16}{6},$$

$$-\frac{25}{6} \leq n \leq -\frac{8}{3},$$

$$n = -4; n = -3.$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{23\pi}{6}.$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} - 3\pi = -\frac{17\pi}{6}.$$

$$-4 + \frac{1}{6} \leq n \leq -\frac{5}{2} + \frac{1}{6},$$

$$-\frac{23}{6} \leq n \leq -\frac{14}{6},$$

$$-3\frac{5}{6} \leq n \leq -2\frac{1}{3},$$

$$n = -3.$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{6} - 3\pi = -\frac{19\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: а) } \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{23\pi}{6}, -\frac{19\pi}{6}, -\frac{17\pi}{6}.$$

С2. 1. Из точки A опустим перпендикуляр на прямую BD ; $AK \perp BD$ (см. рис. 10).

Прямая AK является проекцией A_1K на плоскость нижнего основания. Так как $AK \perp BD$, то $A_1K \perp BD$ по теореме о трёх перпендикулярах. Тогда $\angle KAA_1$ — линейный угол искомого двугранного угла между плоскостями ABD и A_1BD .

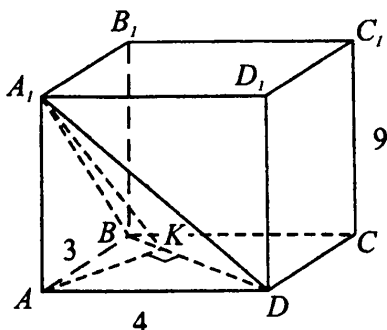


Рис. 10.

2. Так как $\triangle ABD$ — прямоугольный, то $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$.

3. Из $\triangle ABD$ найдём AK , $S_{ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AK$, $S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD$;

$$BD \cdot AK = AB \cdot AD; AK = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

4. Из прямоугольного $\triangle AA_1K$ находим

$$\operatorname{tg} \angle KAA_1 = \frac{A_1A}{AK} = 9 : \frac{12}{5} = \frac{15}{4} = 3,75; \quad \angle KAA_1 = \operatorname{arctg} 3,75.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 3,75$.

СЗ. 1) Решим первое неравенство системы.

$$4^2 \cdot 2^{2\sqrt{x-1}} + 3 \cdot 2^2 \cdot 2^{\sqrt{x-1}} - 16 \leq 15 \cdot 2^{2\sqrt{x-1}} + 2^3 \cdot 2^{\sqrt{x-1}} + 5 \cdot 2 \cdot 2^{\sqrt{x-1}},$$

Обозначим $2^{\sqrt{x-1}} = t$, $t > 0$.

$$16t^2 + 12t - 16 \leq 15t^2 + 8t + 10t, \quad t^2 - 6t - 16 \leq 0, \quad -2 \leq t \leq 8.$$

С учётом $t > 0$, $0 < t \leq 8$.

$$2^{\sqrt{x-1}} \leq 8, \quad \sqrt{x-1} \leq 3, \quad \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-1 \leq 9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 10. \end{cases} \quad 1 \leq x \leq 10.$$

2) Решим второе неравенство системы.

$$\lg(10^{\lg(x^2+21)}) > 1 + \lg x, \quad \lg(x^2+21) > \lg(10x),$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 21 > 0, & 0 < x < 3 \text{ и } x > 7. \\ x > 0; \end{cases}$$

3) Выпишем решение исходной системы: $x \in [1; 3) \cup (7; 10]$.

Ответ: $[1; 3) \cup (7; 10]$

С4. Возможны два случая.

1) Биссектрисы при стороне AD пересекаются внутри параллелограмма (см. рис. 11). $\angle DAN = \angle BNA$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AN) $\Rightarrow \triangle ABN$ равнобедренный и $BN = AB = 40$. Аналогично, $MC = CD = 40$. Так как $BM : MN = 3 : 5$, то $MN = \frac{5}{3}BM$;

$$BN = BM + MN = \frac{8}{3}BM; \quad \frac{8}{3}BM = 40; \quad BM = 15;$$

$$BC = BM + MC = 15 + 40 = 55.$$

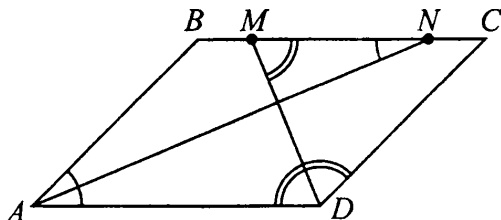


Рис. 11.

2) Биссектрисы при стороне AD не пересекаются внутри параллелограмма (см. рис. 12).

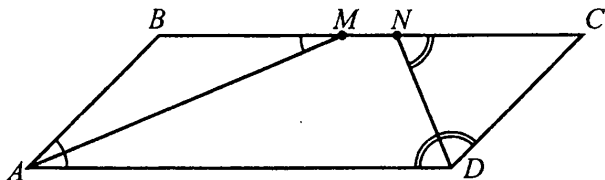


Рис. 12.

Аналогично предыдущему случаю $BM = AB = 40$ и $CN = CD = 40$.

$$\text{Так как } BM : MN = 3 : 5, \text{ то } MN = \frac{5}{3}BM = \frac{200}{3}.$$

$$BC = BM + MN + CN = 40 + \frac{200}{3} + 40 = 146\frac{2}{3}.$$

Ответ: 55; $146\frac{2}{3}$.

С5. Запишем уравнение в виде $a|x + 6| = 5 - \sqrt{-x}$.

Построим графики $y = a|x + 6|$ и $y = 5 - \sqrt{-x}$.

Рассмотрим случай 1 при $a > 0$. Из рисунка 13 видно, что искомые значения параметра a должны удовлетворять условию $a \in \{a_1\} \cup (a_2; +\infty)$.

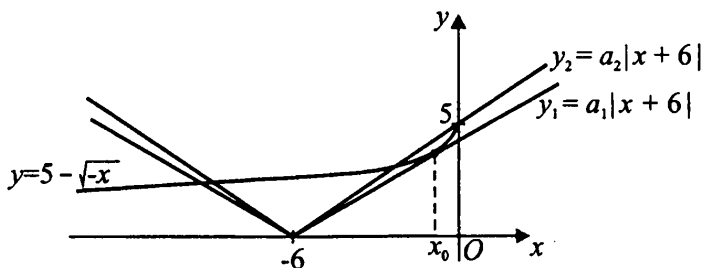


Рис. 13.

Так как $y_2(0) = a_2|0 + 6| = 6a_2 = 5$, то $a_2 = \frac{5}{6}$.

Пусть x_0 — абсцисса точки касания графиков функций $y = 5 - \sqrt{-x}$ и $y_1 = a_1|x + 6|$. При этом уравнение касательной имеет вид $f(x) = a_1(x + 6) = a_1x + 6a_1$. Тогда угловой коэффициент касательной $a_1 = y'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{-x_0}}$.

С другой стороны, $y(x_0) = f(x_0)$, то есть $a_1x_0 + 6a_1 = 5 - \sqrt{-x_0}$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2\sqrt{-x_0}}, \\ a_1x_0 + 6a_1 = 5 - \sqrt{-x_0}. \end{cases}$$

Подставляя выражение для a_1 из первого уравнения во второе и решая полученное уравнение относительно $\sqrt{-x_0}$, получим $\sqrt{-x_0} = 5 \pm \sqrt{19}$.

Из рисунка 13 следует, что $x_0 > -6$; $\sqrt{-x_0} < \sqrt{6}$. Следовательно, $\sqrt{-x_0} = 5 - \sqrt{19}$.

$$\text{Значит, } a_1 = \frac{1}{2\sqrt{-x_0}} = \frac{1}{2(5 - \sqrt{19})} = \frac{5 + \sqrt{19}}{12}.$$

Таким образом, $a \in \left\{ \frac{5 + \sqrt{19}}{12} \right\} \cup \left(\frac{5}{6}; +\infty \right)$.

Случай 2. $a < 0$, $a \in (a_1, 0)$. Из рисунка 14 (с. 18) видно, что точки пересечения будут при $x < -6$. $-a(x + 6) = 5 - \sqrt{-x}$, $-a = \frac{1}{2\sqrt{-x}}$.

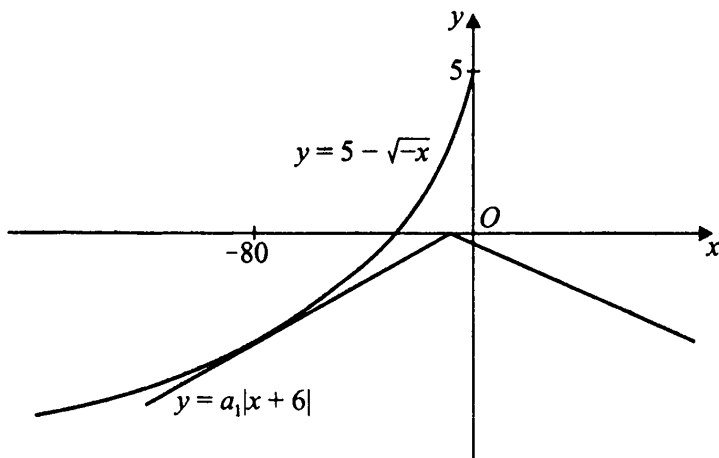


Рис. 14.

Обозначим $\sqrt{-x} = t$ и решим уравнение

$$\frac{x+6}{2\sqrt{-x}} = 5 - \sqrt{-x}, \text{ аналогично первому случаю } t = 5 + \sqrt{19},$$

$$a_1 = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\frac{5 - \sqrt{19}}{12} = \frac{\sqrt{19} - 5}{12}. a \in \left(\frac{\sqrt{19} - 5}{12}; 0\right).$$

Таким образом, общий ответ $a \in \left(\frac{\sqrt{19} - 5}{12}; 0\right) \cup \left\{\frac{5 + \sqrt{19}}{12}\right\} \cup \left(\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{19} - 5}{12}; 0\right) \cup \left\{\frac{5 + \sqrt{19}}{12}\right\} \cup \left(\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

С6. а) Пусть c и d — некоторые натуральные числа, такие, что $cd = 800$.

Пусть $k = \text{НОД}(c, d)$. Тогда $c = \alpha k$, $d = \beta k$, где $\alpha, \beta \in N$, $\text{НОД}(\alpha, \beta) = 1$.

Определим наибольшее значение k , при котором $800 = \alpha\beta k^2$, $800 : k^2$.

Очевидно, что при $k = 20$ выполняется то, что $800 : k^2$, при этом $\alpha\beta = 2$.

Покажем, что это наибольшее возможное значение k . Действительно, k принимает наибольшее значение в том случае, когда $\alpha\beta$ принимает наименьшее значение. Если $\alpha\beta < 2$, то $\alpha\beta = 1$, откуда должно выполняться $800 = k^2$, что неверно. Значит, $k = 20$, $\alpha, \beta = 2$. Если, например, $\alpha = 2$; $\beta = 1$, то $c = 40$, $d = 20$.

б) Пусть $cd = 10!$. Аналогично предыдущему случаю, $c = \alpha k$, $d = \beta k$, $cd = \alpha\beta k^2$. Заметим, что $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$. Так как $10!$ делится на k^2 , число k состоит из тех же простых делителей, что и

$10!$, то есть $k = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot 7^{x_4}$, при этом $k^2 = 2^{2x_1} \cdot 3^{2x_2} \cdot 5^{2x_3} \cdot 7^{2x_4}$. Значит, $2x_1 \leq 8$, $2x_2 \leq 4$, $2x_3 \leq 2$, $2x_4 \leq 1$.

Наибольшее значение число k примет при $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$. В этом случае $k = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 16 \cdot 9 \cdot 5 = 720$.

в) При $n \leq 1000$ аналогично получим, что $\alpha\beta k^2 \leq 1000$, $k^2 \leq 1000$, $k \leq 31$.

При $k = 31$ возьмём $\alpha = \beta = 1$, тогда $cd = 961$.

Ответ: а) 20; б) 720; в) 31.

Решение варианта 3

В1. $50 : 6,8 = 7\frac{24}{68}$. Наибольшее число круассанов равно 7.

Ответ: 7.

В2. Из рисунка видно, что наименьшая цена меди на момент закрытия биржевых торгов была достигнута 12 августа и составила 7250 долларов США за тонну.

Ответ: 7250.

В3. $ABCD$ — трапеция, CN — её высота (см. рис. 15).

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CN = \frac{3 + 4}{2} \cdot 4 = 14.$$

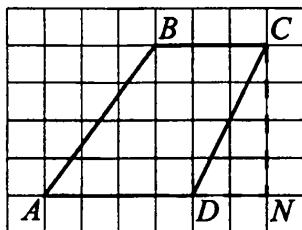


Рис. 15.

Ответ: 14.

В4. Через пункт C едет автобус. Путь, пройденный им, равен $30 + 48 + 26 = 104$ (км), время в пути до пункта B равно $104 : 65 = 1,6$ (ч).

Через пункт D едет грузовик. Путь, пройденный им, равен $33 + 47 = 80$ (км), время в пути до пункта B равно $80 : 60 = \frac{4}{3}$ (ч).

Легковой автомобиль, идя без остановок, проходит расстояние 104 км до пункта B за $104 : 80 = 1,3$ (ч).

Значит, позже других в пункте B будет автобус, он потратит на весь путь 1,6 часа.

Ответ: 1,6.

B5. $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$; $x_1 = 2$, $x_2 = -4$.
Наименьший корень уравнения равен -4 .

Ответ: -4 .

B6. Пусть $\angle BCD = 47^\circ$, $\angle ADC = 35^\circ$, тогда из условия, что окружность описана около четырёхугольника, следует $\angle ABC + \angle ADC = \angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$.

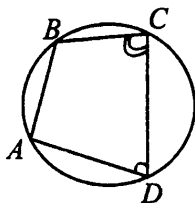


Рис. 16.

Чтобы найти больший из оставшихся углов, надо из 180° вычесть меньший из углов, данных в условии.

$$180^\circ - 35^\circ = 145^\circ.$$

Ответ: 145.

$$\text{B7. } \frac{(\sqrt[11]{5 \cdot a^7})^{33}}{a^{21}} = \frac{(5 \cdot a^7)^3}{a^{21}} = \frac{5^3 \cdot a^{21}}{a^{21}} = 5^3 = 125.$$

Ответ: 125.

B8. Производная в точке касания равна тангенсу угла наклона α касательной к положительному направлению оси Ox (см. рис. 17). Значит,

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \angle ABC) = -\operatorname{tg} \angle ABC = -\frac{AC}{BC} = -\frac{9}{10}.$$

Ответ: $-0,9$.

B9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ даны все три его измерения: 2, 5, 14 (см. рис. 18).

$A_1 C$ — диагональ прямоугольного параллелепипеда,

$$A_1 C^2 = C_1 D_1^2 + AD^2 + BB_1^2.$$

$$A_1 C^2 = 25 + 4 + 196 = 225,$$

$$A_1 C = 15.$$

Ответ: 15.

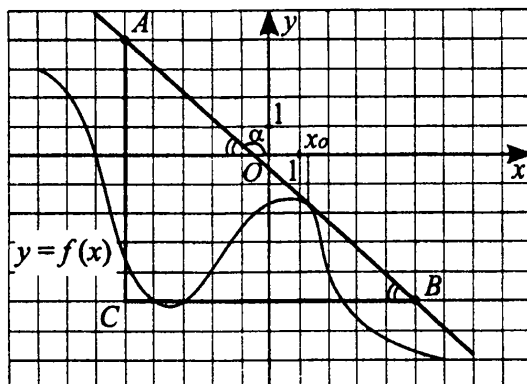


Рис. 17.

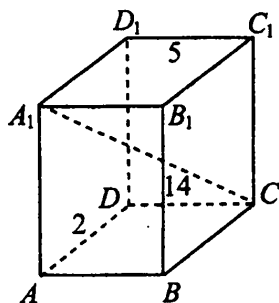


Рис. 18.

В10. Вероятность купить бракованный ноутбук равна $\frac{19}{50} = 0,38$.

Ответ: 0,38.

В11. $V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = S_{\text{осн.}} \cdot h$, так как сторона основания равна $2R$, то $S_{\text{осн.}} = (2R)^2 = 4R^2$, $S_{\text{осн.}} = 4 \cdot 25 = 100$. $V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = 100 \cdot 7 = 700$.

Ответ: 700.

В12. Общее сопротивление электросети должно быть не менее 40 Ом, то есть $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \geq 40$. Тогда $\frac{R_1 \cdot 120}{R_1 + 120} \geq 40$, $120R_1 \geq 40R_1 + 4800$, $80R_1 \geq 4800$, $R_1 \geq 60$.

Ответ: 60.

В13. Обозначим через x расстояние от A до B в километрах. Тогда

$$\frac{x}{20} = \frac{x}{30} + 1; 3x = 2x + 60; x = 60 \text{ (км)}.$$

Ответ: 60.

В14. При переходе через точку минимума производная меняет знак с « $-$ » на « $+$ ».

$$y' = 2(x-4)(x+7) + (x-4)^2 = (x-4)(2x+14+x-4) = (x-4)(3x+10).$$

$$y' = 0 \text{ при } x = -\frac{10}{3} \text{ и } x = 4.$$

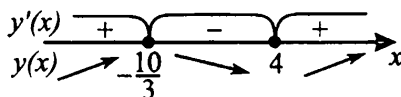


Рис. 19.

Точка $x = 4$ — точка минимума (см. рис. 19).

Ответ: 4.

С1. а) $\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = \sin x$,

$$\sin x(\sin x - 1) = 0,$$

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) Из серии решений $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ выберем те корни, которые принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \pi n \leq 2\pi, -\frac{1}{2} \leq n \leq 2, n = 0; 1; 2. \text{ При этом } x = 0; x = \pi; x = 2\pi.$$

Из серии решений $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ выберем те корни, которые принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2\pi, -\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{3}{4}, n = 0; x = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: а) $\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $0; \pi; 2\pi; \frac{\pi}{2}$.

С2. Пусть O — центр окружности, тогда $R = OA = \frac{24}{2} = 12$,

$$AC = \frac{AB}{2} = 8 \text{ (см. рис. 20). } OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{144 - 64} = \sqrt{80}.$$

OS — высота конуса, значит, OC является проекцией CS на плоскость основания. Так как $OC \perp AB$, то по теореме о трёх перпендикулярах SC также перпендикулярна AB , следовательно, $\angle OCS$ — искомый.

$$\operatorname{tg} \angle OCS = \sqrt{\frac{125}{80}} = 1,25.$$

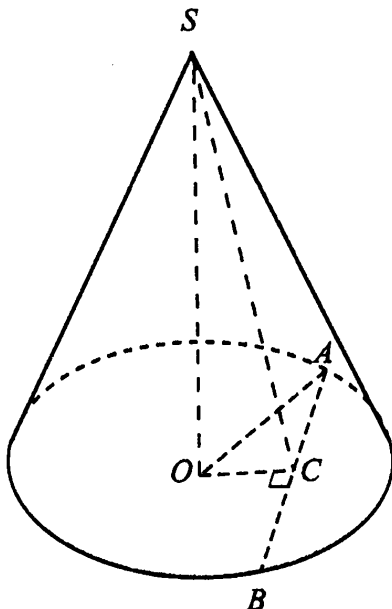


Рис. 20.

Ответ: 1,25.

С3. 1) $\frac{9^x - 1}{3^x - 1} \geq 3$. ОДЗ: $x \neq 0$.

Пусть $t = 3^x$, $t > 0$. Тогда неравенство примет вид $\frac{t^2 - 1}{t - 1} \geq 3$. Далее,

$$\frac{t^2 - 1 - 3(t - 1)}{t - 1} \geq 0; \frac{(t - 2)(t - 1)}{t - 1} \geq 0; t \geq 2.$$

Тогда $3^x \geq 2$; $x \geq \log_3 2$.

2) $\log_{|x-2|}(x^2 - 1) \leq 2$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} |x-2| > 0, \\ |x-2| \neq 1, \\ x^2 - 1 > 0, \end{cases} \begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq 3, \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

Решаем неравенство:

$$\log_{|x-2|}(x^2 - 1) - 2 \log_{|x-2|} |x-2| \leq 0;$$

$$\log_{|x-2|}(x^2 - 1) - \log_{|x-2|}(x-2)^2 \leq 0;$$

$$(|x-2| - 1)(x^2 - 1 - (x-2)^2) \leq 0;$$

$$(|x-2| - 1)(4x - 5) \leq 0.$$

$$\text{а) } x > 2, \quad (x-3)(4x-5) \leq 0; \quad \frac{5}{4} \leq x \leq 3, \text{ откуда } 2 < x \leq 3.$$

$$\text{б) } x \leq 2, \quad (1-x)(4x-5) \leq 0; \quad x \leq 1 \text{ и } x \geq \frac{5}{4}, \text{ откуда } x \leq 1 \text{ и}$$

$$\frac{5}{4} \leq x \leq 2.$$

Учитывая ОДЗ, получим решение исходного неравенства

$$x \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{5}{4}; 2\right) \cup (2; 3).$$

3) Так как $\log_3 2 < 1$, то решением исходной системы является $\left[\frac{5}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$.

$$\text{Ответ: } \left[\frac{5}{4}; 2\right) \cup (2; 3).$$

С4. Возможны два случая (см. рис. 21), при этом вписанная трапеция является равнобедренной.

1. Центр описанной окружности точка O лежит внутри трапеции.

Пусть MN — высота трапеции $ABCD$, проходящая через середины оснований. Тогда, используя теорему Пифагора для соответствующих треугольников, получим:

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2};$$

$$OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2};$$

$$ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1.$$

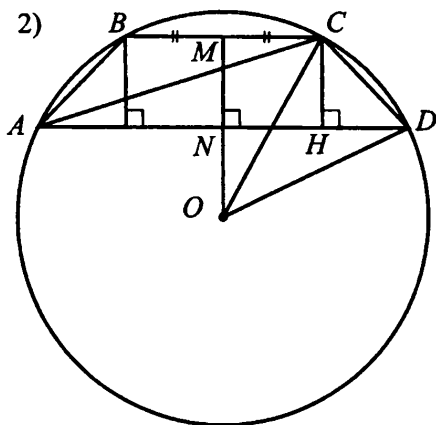
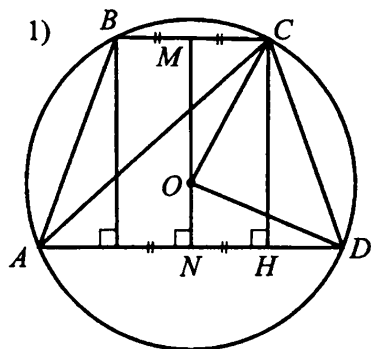


Рис. 21.

Так как $CH = MN = OM + ON = \frac{\sqrt{11}}{2} + 1$, то

$$AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{16 + \sqrt{11}}.$$

2. Центр описанной окружности точка O лежит вне трапеции.

В данном случае рассуждения аналогичны п. 1 за исключением того, что $CH = MN = OM - ON = \frac{\sqrt{11}}{2} - 1$. Тогда $AC = \sqrt{16 - \sqrt{11}}$.

Ответ: $\sqrt{16 \pm \sqrt{11}}$.

С5. Обозначим $f(x) = ax - 10a = a(x - 10)$.

Графиком $y = f(x)$ является прямая, проходящая через точку $(10; 0)$.

$$\text{Обозначим } g(x) = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x+2|}{x+2} + \sqrt{64-x^2}.$$

Построим график функции $y = g(x)$. Это фрагменты окружностей (см. рис. 22 на с. 26).

$$1) x \in [-8; -2), \quad g(x) = -2 + \sqrt{64-x^2}, \quad \begin{cases} y \geq -2, \\ (y+2)^2 + x^2 = 64; \end{cases}$$

$$2) x \in (-2; 5), \quad g(x) = \sqrt{64-x^2}, \quad \begin{cases} y^2 + x^2 = 64, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

$$3) x \in (5; 8], \quad g(x) = 2 + \sqrt{64-x^2}, \quad \begin{cases} y \geq 2, \\ (y-2)^2 + x^2 = 64. \end{cases}$$

Не менее двух решений уравнение имеет при $a \in (a_1; a_2) \cup (a_3; a_4]$.

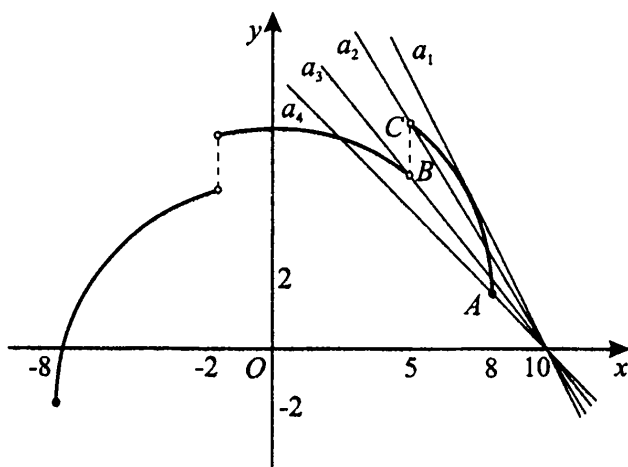


Рис. 22.

Если $a = a_4$, то $f(x)$ проходит через точку $A(8; 2)$, откуда $2 = a_4(8 - 10)$, $a_4 = -1$.

Если $a = a_3$, то $f(x)$ проходит через точку $B(5; \sqrt{39})$, откуда $a_3 = \frac{\sqrt{39}}{-5}$.

Если $a = a_2$, то $f(x)$ проходит через точку $C(5; 2 + \sqrt{39})$, откуда $a_2 = \frac{2 + \sqrt{39}}{-5}$.

Если $a = a_1$, то $f(x)$ — касательная к $g(x)$ на $x \in (5; 8]$.

Найдём, при каких a окружность $(y - 2)^2 + x^2 = 64$ имеет одну общую точку с $y = a(x - 10)$.

$$y^2 - 4y + 4 + x^2 = 64; (ax - 10a)^2 - 4(ax - 10a) + x^2 - 60 = 0;$$

$$a^2x^2 - 20a^2x + 100a^2 - 4ax + 40a + x^2 - 60 = 0;$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 2(10a^2 + 2a)x + 100a^2 + 40a - 60 = 0.$$

Условием касания является $D = 0$;

$$\frac{D}{4} = (10a^2 + 2a)^2 - (a^2 + 1)(100a^2 + 40a - 60) = 0;$$

$$100a^4 + 40a^3 + 4a^2 - 100a^4 - 100a^2 - 40a^3 - 40a + 60a^2 + 60 = 0;$$

$$-36a^2 - 40a + 60 = 0; 9a^2 + 10a - 15 = 0;$$

$$a = \frac{-5 \pm 4\sqrt{10}}{9}. \text{ По рисунку 22 определяем: } a < 0, a = \frac{-5 - 4\sqrt{10}}{9}.$$

$$a \in \left(\frac{-5 - 4\sqrt{10}}{9}; -\frac{2 + \sqrt{39}}{5} \right) \cup \left(\frac{-\sqrt{39}}{5}; -1 \right].$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-5 - 4\sqrt{10}}{9}; -\frac{2 + \sqrt{39}}{5} \right) \cup \left(\frac{-\sqrt{39}}{5}; -1 \right].$$

С6. а) Заметим, что $\frac{2!}{1!} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$, $\frac{3!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3$,

$$\frac{k!}{(k-1)!} = \frac{k(k-1)!}{(k-1)!} = k \text{ — для любого } k \in N, k \geq 2.$$

Тогда $\frac{2!}{1!} + \frac{3!}{2!} + \frac{4!}{3!} + \dots + \frac{39!}{38!} = 2 + 3 + 4 + \dots + 39 = \frac{2+39}{2} \cdot 38 = 779$
(сумма 38-ми членов арифметической прогрессии).

б) Так как $39! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 39$, число $39!$ делится на все простые числа $p \leq 39$. Наибольшим среди них является 37. Все простые числа $q > 39$ не являются делителями числа 39, так как q не является простым делителем ни одного из натуральных чисел $n \leq 39$.

в) Учитывая, что $39! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 39$, получим, что $39!$ делится на 9, а значит, и сумма его цифр делится на 9. Обозначив пропущенную цифру как x , получаем, что $184 + x$ должно делиться на 9, $(180 + (4 + x)) : 9$, $(4 + x) : 9$.

Учитывая, что $0 \leq x \leq 9$, находим значение $x = 5$.

г) Количество нулей в конце числа $54!$ равно максимальному значению $m \in N$, такому, что $54!$ делится на 10^m , при этом $54!$ делится на 5^m и на 2^m . $54! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 5 \cdot \dots \cdot 10 \cdot \dots \cdot 15 \cdot \dots \cdot 20 \cdot \dots \cdot 25 \cdot \dots \cdot 30 \cdot \dots \cdot 35 \cdot \dots \cdot 40 \cdot \dots \cdot 45 \cdot \dots \cdot 50 \cdot \dots \cdot 54$, значит, $54! = 5^{12}d$, где d не делится на 5. Значит, $m \leq 12$.

Так как $54!$ делится на $8 \cdot 16 \cdot 32 = 2^{12}$, получим, что $54! : 2^{12}$. Таким образом, $m = 12$.

Ответ: а) 779; б) 37; в) 5; г) 12.

Решение варианта 4

В1. Так как 6 буханок стоят $6 \cdot 14,5 = 87 < 100$ рублей, а 7 буханок стоят $101,5 > 100$ рублей, то купить можно 6 буханок.

Ответ: 6.

В2. Из рисунка видно, что наибольшая цена алюминия на момент закрытия биржевых торгов была достигнута 6 марта и составила 3190 долларов США за тонну.

Ответ: 3190.

В3. $ABCD$ — прямоугольная трапеция (см. рис. 23).

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD = \frac{1}{2}(3 + 5) \cdot 8 = 32.$$

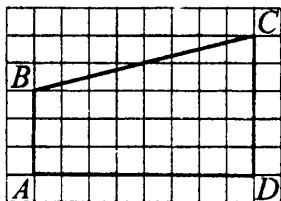


Рис. 23.

Ответ: 32.

В4. Площадь всех стёкол $10 \cdot 2,5 = 25 \text{ м}^2$. Составим таблицу:

	Цена 25 м ² стекла (руб)	Резка и шлифовка 10 стёкол (руб)	Итого (руб)
А	$220 \cdot 25 = 5\,500$	$185 \cdot 10 = 1\,850$	7 350
Б	$240 \cdot 25 = 6\,000$	$125 \cdot 10 = 1\,250$	7 250
В	$260 \cdot 25 = 6\,500$	$120 \cdot 10 = 1\,200$	7 700

Ответ: 7 250.

$$\text{В5. } 2x^2 - 9x - 35 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-35)}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{361}}{4} =$$

$$= \frac{9 \pm 19}{4}; \quad x_1 = -2,5, \quad x_2 = 7.$$

$$x_1 + x_2 = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

В6. Пусть после сторон с длинами 15 и 21 находятся последовательно стороны с длинами x и y . Тогда $x + 15 = y + 21$, так как у описанного около окружности четырёхугольника суммы противоположных сторон равны. Кроме того, сумма длин всех сторон равна периметру: $15 + 21 + x + y = 132$. Объединим полученные уравнения в систему и решим её:

$$\begin{cases} x + 15 = y + 21, \\ 15 + 21 + x + y = 132; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 6, \\ x + y = 96; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 102, \\ 2y = 90; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 51, \\ y = 45. \end{cases}$$

Длина большей стороны равна 51.

Ответ: 51.

$$\text{В7. } \frac{\log_7 \sqrt[5]{35}}{\log_7 35} = \frac{1}{5} = 0,2; \quad \text{так как } \log_7 \sqrt[5]{35} = \frac{1}{5} \log_7 35.$$

Ответ: 0,2.

В8. Из условия следует, что касательная проходит через точки с координатами $(0; 0)$ и $(5; 5)$. Искомое значение $f'(5)$ равно тангенсу угла наклона этой касательной к оси абсцисс, поэтому $f'(5) = \frac{5-0}{5-0} = 1$.

Ответ: 1.

В9. Сделаем чертёж (см. рис. 24):

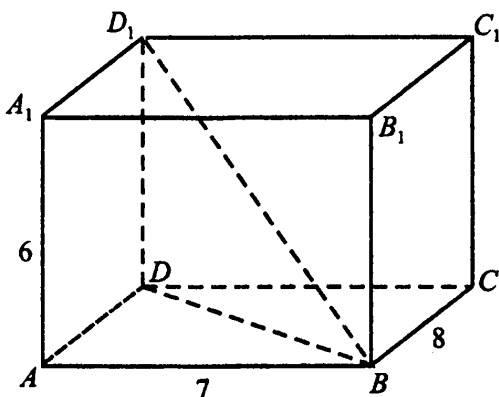


Рис. 24.

$$BD_1^2 = AB^2 + AD^2 + DD_1^2 = 49 + 64 + 36 = 149.$$

Ответ: 149.

В10. Всего в магазине было $9 + 11 = 20$ упаковок мороженого. Из них 11 упаковок — сливочного мороженого. Вероятность покупки сливочного мороженого равна: $\frac{11}{20} = 0,55$.

Ответ: 0,55.

В11. $V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = S_{\text{осн.}} \cdot AA_1 = AB \cdot AD \cdot AA_1$, $AD = 2R = 6$,
 $V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = 72$, $AA_1 = \frac{72}{6 \cdot 6} = \frac{72}{36} = 2$ (см. рис. 25 на с. 30).

Ответ: 2.

В12. $S \leq 8$, $v_0 t + \frac{at^2}{2} \leq 8$, $28t + \frac{32t^2}{2} \leq 8$, $16t^2 + 28t - 8 \leq 0$,
 $4t^2 + 7t - 2 \leq 0$, $-2 \leq t \leq \frac{1}{4}$.

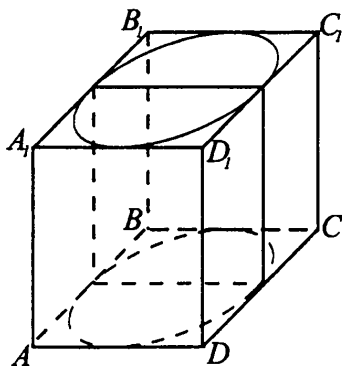


Рис. 25.

Так как по смыслу задачи $t \geq 0$, то $t \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$. Следовательно, мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи 15 минут.

Ответ: 15.

В13. Пусть x км/ч — скорость течения реки. Тогда $(18 + x)$ км/ч — скорость теплохода по течению реки, $(18 - x)$ км/ч — скорость теплохода против течения реки. Время, затраченное на движение по течению реки, равно $\frac{315}{18 + x}$ ч. Время, затраченное на дорогу назад, равно $\frac{315}{18 - x}$ ч.

Составим уравнение: $\frac{315}{18 + x} + \frac{315}{18 - x} = 36$.

Решим его: $315(18 - x) + 315(18 + x) = 36(18^2 - x^2)$;
 $315(18 - x + 18 + x) = 36(18^2 - x^2)$; $315 \cdot 36 = 36(18^2 - x^2)$; $x^2 = 324 - 315$;
 $x^2 = 9$; $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. При этом x_2 не удовлетворяет условию, так как скорость должна быть положительна.

Ответ: 3.

В14. Найдём производную функции $y = (x - 3)^2 \cdot (x - 5) + 7$.
 $y'(x) = 2(x - 3) \cdot (x - 5) + (x - 3)^2 = (x - 3)(2x - 10 + x - 3) = (x - 3)(3x - 13)$.

$y'(x) = 0$ при $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$ (см. рис. 26).

При переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак с «+» на «-». Следовательно, $x = 3$ — точка максимума.

Ответ: 3.

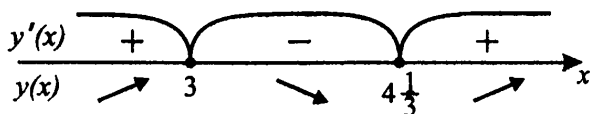


Рис. 26.

C1. а) $\cos^2 x + \operatorname{ctg} x = 1 + \cos 2x,$

$$\cos^2 x + \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \cos^2 x, \frac{\cos x}{\sin x} = \cos^2 x, \sin x \neq 0.$$

$$\cos x \left(\frac{1}{\sin x} - \cos x \right) = 0, \begin{cases} \cos x = 0, \\ 1 - \sin x \cos x = 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) Выберем корни, принадлежащие заданному промежутку:

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq 2\pi,$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + n \leq 2; 0 \leq n \leq \frac{3}{2}; n = 0 \text{ и } n = 1, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{2} \text{ и } x = \frac{3\pi}{2}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}.$

C2. Пусть O — центр основания конуса, тогда $R = OA = \frac{26}{2} = 13,$

$$AC = \frac{AB}{2} = 12 \text{ (см. рис. 27). } OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$$

$$OS = R \cdot \operatorname{tg} \angle OKS = 13 \cdot 8 = 104.$$

OS — высота конуса, тогда OC является проекцией CS на плоскость основания, значит, так как $OC \perp AB$, то по теореме о трёх перпендикулярах CS также перпендикулярна AB , следовательно, $\angle OCS$ — искомый.

$$\operatorname{tg} \angle OCS = \frac{OS}{OC} = \frac{104}{5} = 20,8.$$

Ответ: 20,8.

C3. 1) $5^x - 29 + \frac{28}{5^x - 1} \leq 0.$

Обозначим $5^x = t, t > 0$ и решим неравенство относительно t :

$$t - 29 + \frac{28}{t - 1} \leq 0.$$

$$\frac{t^2 - 29t - t + 29 + 28}{t - 1} \leq 0,$$

$$\begin{aligned}
 \log_{3-x}(3-x) &\leq 2 \cdot \log_{3-x}(3-x), \\
 \log_{3-x}(3-x) &\leq \log_{3-x}(3-x)^2, \\
 (3-x-1)(3-x-(3-x)^2) &\leq 0, \\
 (2-x)(3-x)(1-3+x) &\leq 0, \\
 (x-2)(x-3)(x-2) &\leq 0, \\
 (x-2)^2(x-3) &\leq 0 \quad (\text{см. рис. 29}).
 \end{aligned}$$



Рис. 29.

Учитывая ОДЗ (см. рис. 30):

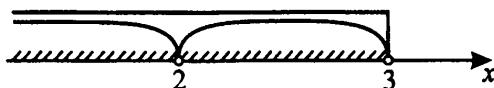


Рис. 30.

$$x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3).$$

3) Решим систему неравенств (см. рис. 31):

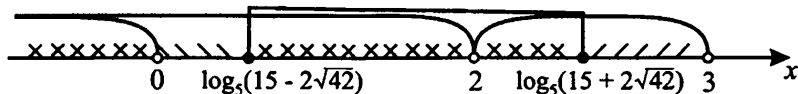


Рис. 31.

$$\begin{cases} x < 0, \log_5(15 - 2\sqrt{42}) \leq x \leq \log_5(15 + 2\sqrt{42}), \\ x < 2, 2 < x < 3. \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; 0) \cup [\log_5(15 - 2\sqrt{42}); 2) \cup (2; \log_5(15 + 2\sqrt{42})].$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup [\log_5(15 - 2\sqrt{42}); 2) \cup (2; \log_5(15 + 2\sqrt{42})].$

С4. Возможны два случая (см. рис. 32 на с. 34).

1. Центр описанной окружности точка O лежит внутри трапеции.

Пусть MN — высота трапеции $ABCD$, проходящая через середины оснований. Тогда, используя теорему Пифагора для соответствующих треугольников, получим:

$$CD = \sqrt{DH^2 + CH^2};$$

$$OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2};$$

$$ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1.$$

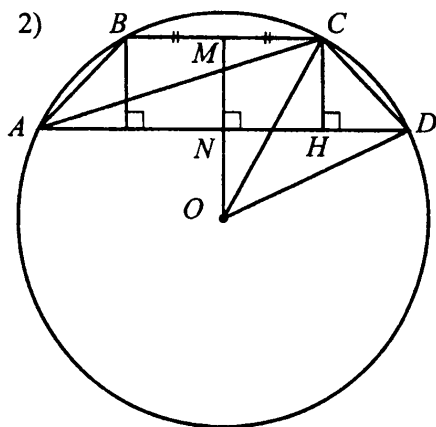
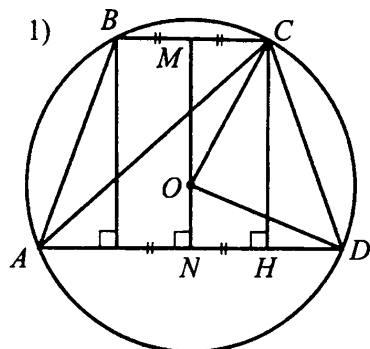


Рис. 32.

Так как $CH = MN = OM + ON = \frac{\sqrt{19}}{2} + 1$ и $DH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{3}{2}$,

$$\text{то } CD = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{19}}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{8 + \sqrt{19}}.$$

2. Центр описанной окружности точка O лежит вне трапеции.

В данном случае рассуждения аналогичны п. 1 за исключением того, что $CH = MN = OM - ON = \frac{\sqrt{19}}{2} - 1$. Тогда $CD = \sqrt{8 - \sqrt{19}}$.

Ответ: $\sqrt{8 \pm \sqrt{19}}$.

С5. Преобразуем систему
$$\begin{cases} y = \frac{|x-5|}{5-x} + \frac{5}{x} - 2, \\ y = a(x-2) - 4. \end{cases}$$

$$\text{Обозначим } g(x) = \frac{|x-5|}{5-x} + \frac{5}{x} - 2 = \begin{cases} \frac{5}{x} - 3, & x > 5, \\ \frac{5}{x} - 1, & x < 5. \end{cases}$$

График этой функции — фрагменты гиперболы (см. рис. 33).

Пусть $g(x) = a(x-2) - 4$. $y = g(x)$ — прямая, проходящая через точку $(2; -4)$.

Две точки пересечения этих графиков будет при $a \in (-\infty; a_2) \cup (a_1; 0) \cup (0; a_4) \cup (a_3; +\infty)$.

Найдём a_1 и a_2 из условия касания прямой и гиперболы.

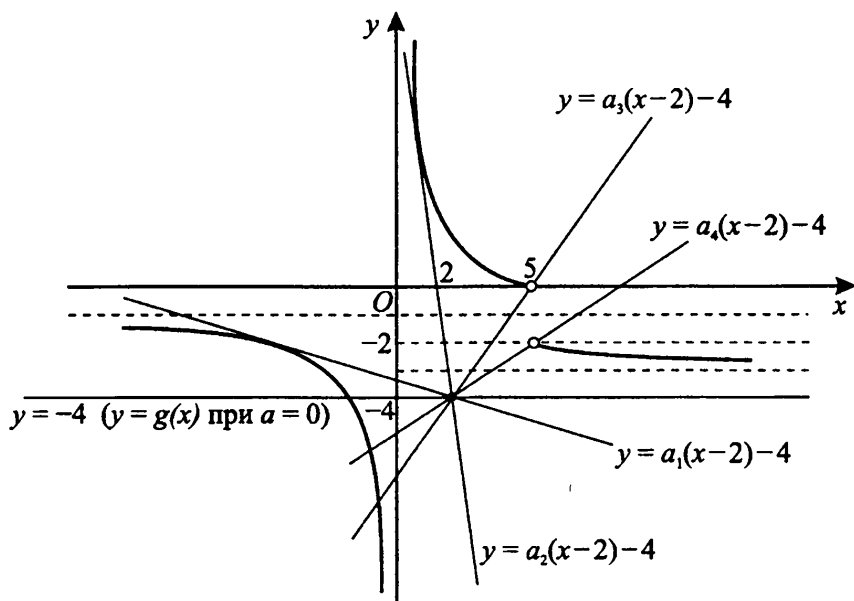


Рис. 33.

$$a(x-2) - 4 = \frac{5}{x} - 1,$$

$$ax^2 - 2ax - 3x - 5 = 0;$$

$ax^2 - (2a+3)x - 5 = 0$, единственный корень при $a \neq 0$ будет, если $D = 0$.

$$D = 4a^2 + 12a + 9 + 20a = 4a^2 + 32a + 9 = 0; a^2 + 8a + \frac{9}{4} = 0;$$

$$a_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{55}}{2}, \text{ откуда } a_1 = \frac{-8 + \sqrt{55}}{2}, a_2 = \frac{-8 - \sqrt{55}}{2}.$$

Найдём a_3 и a_4 .

При $a = a_3$ прямая $y = g(x)$ проходит через точку $(5; 0)$, поэтому $0 = (5-2)a - 4$; $a_3 = \frac{4}{3}$.

При $a = a_4$ прямая $y = g(x)$ проходит через точку $(5; -2)$, поэтому $-2 = (5-2)a - 4$; $a_4 = \frac{2}{3}$.

Ровно 2 решения исходная система имеет при

$$a \in \left(-\infty; \frac{-5 - \sqrt{55}}{2}\right) \cup \left(\frac{-8 + \sqrt{55}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{-5 - \sqrt{55}}{2}\right) \cup \left(\frac{-8 + \sqrt{55}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right).$

С6. а) Заметим, что $\frac{2!}{1!} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$, $\frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3$,

$$\frac{k!}{(k-1)!} = \frac{k \cdot (k-1)!}{(k-1)!} = k \text{ для любого } k \in N, k \geq 2.$$

Тогда $\frac{2!}{1!} + \frac{3!}{2!} + \frac{4!}{3!} + \dots + \frac{36!}{35!} = 2 + \dots + 36 = \frac{2+36}{2} \cdot 35 = 665$ (как сумма арифметической прогрессии).

б) $36! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 36$, значит $36!$ делится на все простые числа $p \leq 36$. Наибольшим среди них является 31. Все простые числа $q > 36$ очевидно не являются делителями числа $36!$, так как q не является простым множителем ни одного из натуральных чисел $n \leq 36$.

в) Учитывая, что $36! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 36$, заметим, что $36!$ делится на 9, а значит, и сумма его цифр делится на 9. Обозначив пропущенную цифру как x , получим, что $168 + x$ должно делиться на 9, $(162 + (6 + x)) : 9$, $(6 + x) : 9$. Учитывая, что $0 \leq x \leq 9$, находим значение $x = 3$.

г) Количество нулей в конце числа $57!$ равно максимальному значению $m \in N$, такому, что $57!$ делится на 10^m . При этом $57!$ делится на 5^m и на 2^m . Заметим, что $57! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 57 = 5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 50 \cdot 55 \cdot s$, где s не делится на 5. Тогда $57! = (5 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 2) \cdot \dots \cdot (5 \cdot 10) \cdot (5 \cdot 11)s = 5^{13}K$, K не делится на 5, $m \leq 13$. В то же время $(57!) : (2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32); (57!) : 2^{13}$. Таким образом, $m = 13$.

Ответ: а) 665; б) 31; в) 3; г) 13.

Решение варианта 5

В1. Три лимона стоят $7 \cdot 3 = 21$ рубль. Но за эти деньги по акции можно купить 4 лимона. Так как $100 : 21 = 4\frac{16}{21}$, то за $21 \cdot 4 = 84$ рубля можно купить $4 \cdot 4 = 16$ лимонов и ещё останется $100 - 84 = 16$ рублей, за которые можно купить ещё 2 лимона. Таким образом, всего можно купить 18 лимонов.

Ответ: 18.

В2. Цена деления на шкале температуры составляет 2°C , поэтому наименьшая температура равна $-16 - 2 = -18$ градусов Цельсия.

Ответ: -18 .

В3. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $S_{ABCD} = AH \cdot BC = 8 \cdot 4 = 32$ (см. рис. 34).

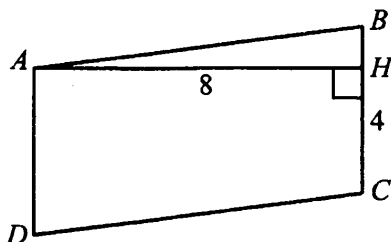


Рис. 34.

Ответ: 32.

В4. Поездка на поезде стоит: $830 \cdot 4 = 3\,320$ (руб).

Поездка на машине стоит: $9 \cdot \frac{1600}{100} \cdot 21,3 = 9 \cdot 16 \cdot 21,3 = 3\,067,2$ (руб).

Ответ: 3067,2.

В5. $2^{x+3} = 4^{x-1}$; $2^{x+3} = (2^2)^{x-1}$; $2^{x+3} = 2^{2x-2}$; $x+3 = 2x-2$; $x = 5$.

Ответ: 5.

В6. На рисунке 35 изображён параллелограмм $ABCD$.

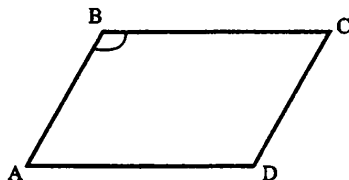


Рис. 35.

$$\cos \angle B = \cos(180^\circ - \angle A) = -\cos \angle A = -\sqrt{1 - 0,28^2} = -0,96.$$

Ответ: $-0,96$.

$$\text{В7. } \frac{\ln 42}{\ln \sqrt[3]{42}} = \frac{\ln 42}{\frac{1}{3} \ln 42} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Ответ: 3.

В8. Так как касательная параллельна прямой $y = 1$, то её угловой коэффициент равен 0 и тогда производная равна 0. По графику определяем, что производная обращается в ноль при $x = 5$.

Ответ: 5.

В9. Сделаем чертёж (см. рис. 36):

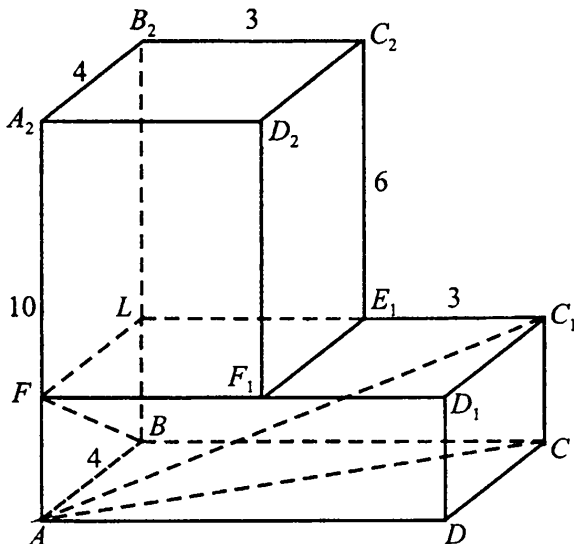


Рис. 36.

Требуется найти квадрат расстояния между вершинами A и C_1 многогранника. Все двугранные углы прямые. AC_1 — диагональ параллелепипеда $ABCDFLC_1D_1$ с измерениями: $AD = 3 + 3 = 6$, $DC = 4$ и $CC_1 = 10 - 6 = 4$.

$$AC_1^2 = AD^2 + DC^2 + CC_1^2.$$

$$AC_1^2 = 6^2 + 4^2 + 4^2 = 68.$$

Ответ: 68.

В10. Всего на остановке стояло $16 + 9 = 25$ автобусов и троллейбусов. Из них было 16 автобусов. Вероятность того, что Оля села в автобус равна отношению $\frac{16}{16 + 9} = \frac{16}{25} = 0,64$.

Ответ: 0,64.

В11. Объём исходного многогранника равен сумме объёмов двух параллелепипедов со сторонами 3, 4, 6 и 5, 5, 6 (см. рис. 37).

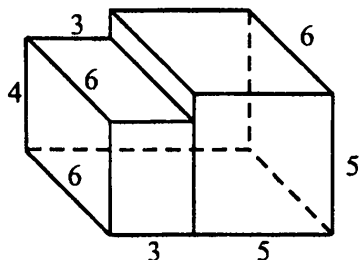


Рис. 37.

$$V = 3 \cdot 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 \cdot 6 = 222.$$

Ответ: 222.

В12. Чтобы ответить на вопрос, с какой высоты горизонт виден на расстоянии 16 километров, подставим в формулу $l = \sqrt{2Rh}$ известные величины и решим уравнение:

$$\begin{aligned}\sqrt{2 \cdot 6400 \cdot h} &= 16, \\ 80\sqrt{2 \cdot h} &= 16, \\ \sqrt{2 \cdot h} &= \frac{16}{80}, \quad \sqrt{2 \cdot h} = \frac{1}{5}, \quad 2 \cdot h = \frac{1}{25}, \\ h &= \frac{1}{50} = 0,02, \quad h = 0,02 \text{ км.}\end{aligned}$$

Ответ: 0,02.

В13. Алексей внёс $800\,000 \cdot 0,3 = 240\,000$ (рублей), Виктор внёс $800\,000 \cdot \frac{1}{8} = 100\,000$ (рублей), Егор внёс 160 000 рублей, Демьян внёс оставшуюся сумму:

$$800\,000 - (240\,000 + 100\,000 + 160\,000) = 300\,000 \text{ (руб.)}$$

Демьяну причитается от прибыли 1 200 000 рублей сумма:

$$\frac{1\,200\,000 \cdot 300\,000}{800\,000} = 450\,000 \text{ рублей.}$$

Ответ: 450 000.

В14. Найдём производную функции $y = (x - 6)^2 \cdot (x + 4) - 7$.

$$y'(x) = 2(x - 6) \cdot (x + 4) + (x - 6)^2.$$

$$y'(x) = (x - 6) \cdot (3x + 2).$$

$y'(x) = 0$ при $x_1 = 6$, $x_2 = -\frac{2}{3}$ (см. рис. 38).

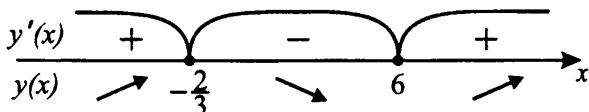


Рис. 38.

Так как при переходе через точку $x_1 = 6$ производная меняет знак с минуса на плюс, то $x = 6$ — точка минимума.

Ответ: 6.

$$\text{С1. а) } \begin{cases} 4 \sin^2 x \cdot \cos x + 3 \cos^3 x = \cos x - 2 \cos^2 x, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

$$3 \cos^3 x + 4 \sin^2 x \cdot \cos x - \cos x + 2 \cos^2 x = 0,$$

$$\cos x (3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x - 1 + 2 \cos x) = 0,$$

$$\cos x (3 \cos^2 x + 4 - 4 \cos^2 x - 1 + 2 \cos x) = 0,$$

$$\cos x (\cos^2 x - 2 \cos x - 3) = 0,$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos^2 x - 2 \cos x - 3 = 0. \end{cases}$$

$$1) \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2) $\cos^2 x - 2 \cos x - 3 = 0$, $\cos x = 1 \pm 2$, $\cos x = 3$ — нет решений, $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как $\sin(\pi + 2\pi n) = 0$, то $x = \pi + 2\pi n$ — не удовлетворяет условию $\sin x \neq 0$.

б) Выберем корни, принадлежащие промежутку $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$-\pi < \frac{\pi}{2} + \pi n \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2} < n \leq 0, n = -1; n = 0. x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

С2. Проведём $PK \parallel BD$, $BD \perp AA_1C_1 \Rightarrow PK \perp AA_1C_1$, тогда прямая C_1K — проекция прямой C_1P на плоскость AA_1C_1 и $\angle KC_1P$ — искомый угол (см. рис. 39).

$$\sin \angle KC_1P = \frac{KP}{C_1P}.$$

Обозначим ребро куба через a .

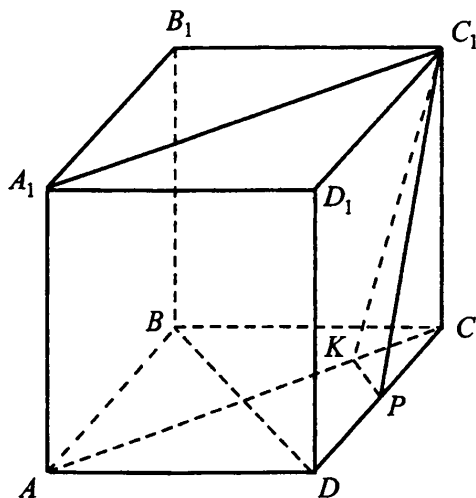


Рис. 39.

$$\begin{aligned}
 KP &= \frac{1}{4} BD = \frac{1}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}; C_1P = \sqrt{CC_1^2 + CP^2} = \\
 &= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \sin \angle KC_1P = \frac{a\sqrt{2} \cdot 2}{4 \cdot a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$$C3. \log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}.$$

$$OD3: \begin{cases} x > 0, \\ 1 - \frac{x}{4} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

$$\frac{1}{4} \log_3^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}},$$

$$\log_3^2 x \geq \log_3^2 \left(1 - \frac{x}{4}\right),$$

$$\log_3^2 x - \log_3^2 \left(1 - \frac{x}{4}\right) \geq 0,$$

$$\left(\log_3 x - \log_3 \left(1 - \frac{x}{4}\right)\right) \left(\log_3 x + \log_3 \left(1 - \frac{x}{4}\right)\right) \geq 0,$$

$$\log_3 \frac{4x}{4-x} \cdot \log_3 \frac{x(4-x)}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \frac{4x}{4-x} \geq 0, \\ \log_3 \frac{x(4-x)}{4} \geq 0, \\ 0 < x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \frac{4x}{4-x} \leq 0, \\ \log_3 \frac{x(4-x)}{4} \leq 0, \\ 0 < x < 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4x}{4-x} \geq 1, \\ x(4-x) \geq 4, \\ 0 < x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,8 \leq x < 4, \\ (x-2)^2 \leq 0, \\ 0 < x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0,8, \\ x > 4, \\ (x-2)^2 \geq 0, \\ 0 < x < 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ 0 < x \leq 0,8. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0,8] \cup \{2\}$.

С4. Пусть Q — точка пересечения биссектрис, $PF = x$, $FT = y$, $TK = z$.
 $MP = AK$, $AM = PK$. Точка F лежит между P и T , так как $\frac{x}{y} = \frac{3}{5} < 1$.

Возможны два случая.

1. Точка Q лежит внутри параллелограмма (см. рис. 40).

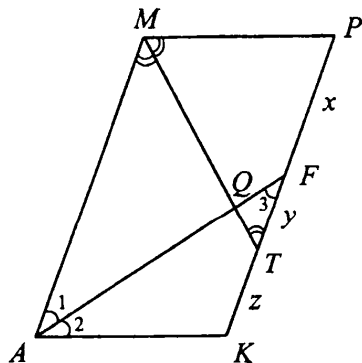


Рис. 40.

Треугольники MPT и AKF равнобедренные (для треугольника AKF : $\angle 1 = \angle 2$, так как AF — биссектриса $\angle A$; $\angle 1 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллельных прямых AM и KP и секущей AF . Для треугольника MPT аналогично).

Тогда $x + y = MP = 24$; $y + z = AK = 24$; $x = z$; $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$; $x = 9$; $y = 15$; $z = 9$; $PK = x + y + z = 9 + 15 + 9 = 33$.

2. Точка Q лежит вне параллелограмма (см. рис. 41).

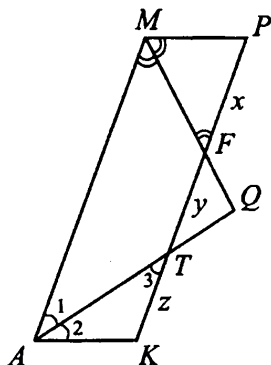


Рис. 41.

Треугольники MPF и AKT равнобедренные. Тогда $x = MP = 24$; $z = AK = 24$; $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$; $y = \frac{5}{3}x = 40$; $PK = x + y + z = 24 + 40 + 24 = 88$.

Ответ: 33; 88.

С5. Так как $a + \sqrt{a^2 + 2} > 0$ при любом действительном значении a , то выражение, стоящее в правой части исходного уравнения, всегда имеет смысл. Рассмотрим графики функций $f(x) = \ln x$ и $g(x) = (x - a)^2 + \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + 2}}{2e}$ (см. рис. 42 на с. 44).

Уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ касаются в точке с абсциссой x_0 (см. рис. 42 б). Соответствующее значение a можно найти из системы:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x_0 = (x_0 - a)^2 + \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + 2}}{2e}, \\ \frac{1}{x_0} = 2(x_0 - a). \end{cases}$$

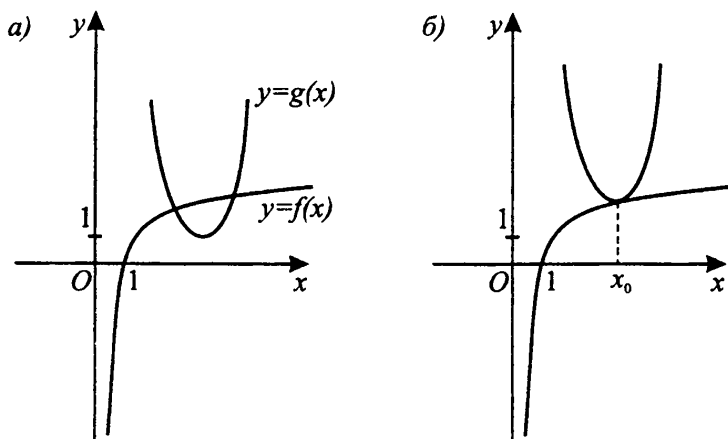


Рис. 42.

Решим второе уравнение последней системы, учитывая, что $x_0 > 0$:

$$2x_0^2 - 2x_0a - 1 = 0, (x_0)_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2}}{2}, x_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2}}{2}.$$

Подставим найденное значение x_0 в первое уравнение системы:

$$\begin{aligned} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + 2}}{2} &= \left(\frac{\sqrt{a^2 + 2} - a}{2} \right)^2 + \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + 2}}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{\sqrt{a^2 + 2} - a}{2} \right)^2 &= 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2 + 2} - a}{2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2 = (a + 2)^2, \\ a + 2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ a &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

С6. 1. Наибольшая сумма получится, если все слагаемые взять со знаком плюс. Но тогда сумма всевозможных произведений равна произведению $(5 + 6 + \dots + 13) \cdot (11 + 12 + \dots + 20) = \frac{5+13}{2} \cdot 9 \cdot \frac{11+20}{2} \cdot 10 = 12555$.

2. Расстановка знаков в полученной сумме всевозможных произведений не меняет чётности результата. Но один из результатов, а именно 12555, нечётен. Значит, чётным результат быть не может ни при какой расстановке знаков. Поэтому значение 0 получиться не может.

3. Из вышесказанного следует, что наименьшее по абсолютной величине значение является натуральным числом. Меньше 1 оно быть не может. Но единица может быть получена, например, следующим образом:

$$(5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10 - 11 + 12 - 13) \cdot$$

$$\cdot (-11 + 12 - 13 + 14 - 15 + 16 + 17 - 18 + 19 - 20) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: а) 12555; б) нет; в) 1.

Решение варианта 6

В1. Всего в школе $27 \cdot \frac{100\%}{9\%} = 300$ учащихся.

Ответ: 300.

В2. По графику определяем, что наименьшая температура 15 января составила -16° .

Ответ: -16 .

В3. Примем за основание сторону треугольника, расположенную горизонтально. Тогда длина основания — 2 см, длина высоты — 4 см, площадь — $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$ (см²).

Ответ: 4.

В4. Подсчитаем стоимость каждого способа и выберем самый дешёвый.

А: необходимо 5 автомобилей, $5 \cdot 70 \cdot 17 = 5\,950$ руб.

Б: необходимо 4 автомобиля, $4 \cdot 100 \cdot 17 = 6\,800$ руб.

В: необходимо 3 автомобиля, $3 \cdot 120 \cdot 17 = 6\,120$ руб.

Ответ: 5 950.

В5. $2^{2x-4} = 16$; $2^{2x-4} = 2^4$; $2x - 4 = 4$; $2x = 8$; $x = 4$.

Ответ: 4.

В6. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{27 + 9} = 6$ (см.

рис. 43). Тогда $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$.

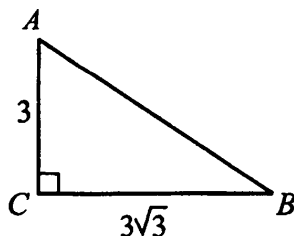


Рис. 43.

Ответ: 0,5.

$$\text{В7. } \frac{5 \cos 37^\circ}{\sin 53^\circ} = \frac{5 \cos 37^\circ}{\cos(90^\circ - 53^\circ)} = \frac{5 \cos 37^\circ}{\cos 37^\circ} = 5.$$

Ответ: 5.

В8. На интервале $(-1; 5)$ производная функции $f(x)$ меняет знак с плюса на минус, причём $f'(3) = 0$. Значит, $x = 3$ является точкой экстремума (в данном случае это точка максимума).

Ответ: 3.

$$\text{В9. } A_2C^2 = A_2A^2 + AD^2 + DC^2 = 10^2 + (3+3)^2 + 4^2 = 100 + 36 + 16 = 152.$$

Ответ: 152.

В10. С зелёным чаем $80 - 32 - 14 - 12 = 22$ пакетика. Искомая вероятность равна $\frac{22}{80} = 0,275$.

Ответ: 0,275.

В11. Площадь передней грани равна $8 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 37$; правой грани — $5 \cdot 6 = 30$; нижней грани — $6 \cdot 8 = 48$. Площадь всей поверхности равна $2(37 + 30 + 48) = 230$.

Ответ: 230.

В12. Из условия следует неравенство $F_A \leq 588\,000$. Тогда $1000 \cdot 9,8 \cdot 3 \cdot R^2 \cdot 5 \leq 588\,000$; $15R^2 \leq 60$; $R^2 \leq 4$. Следовательно, максимальный радиус $R = \sqrt{4} = 2$.

Ответ: 2.

В13. Пассажирский поезд движется относительно товарного со скоростью $85 - 45 = 40$ (км/ч). $1,2$ мин $= \frac{1,2}{60}$ ч $= 0,02$ ч. За это время пассажирский поезд переместится относительно товарного на $40 \cdot 0,02 = 0,8$ (км), то есть на 800 метров. Длина пассажирского поезда равна $800 - 600 = 200$ (м).

Ответ: 200.

В14. $y' = 2(x+7)(x-4) + (x+7)^2 = (x+7)(2x-8+x-7) = (x+7)(3x-15) = 3(x+7)(x-5)$. Производная равна нулю в точках $x = -7$ и $x = 5$, отрицательна на интервале $(-7; 5)$ и положительна на промежутках $(-\infty; -7)$ и $(5; +\infty)$. Отсюда $x = -7$ является точкой максимума.

Ответ: -7 .

С1. а) $2 \cos^2 x - \sin 2x = 1$; $2 \cos^2 x - \sin 2x - 1 = 0$; $\cos 2x - \sin 2x = 0$. Заметим, что если $\cos 2x = 0$, то $\cos 2x - \sin 2x = \pm 1$. Значит, $\cos 2x \neq 0$.

Тогда $1 - \operatorname{tg} 2x = 0$, $\operatorname{tg} 2x = 1$, $2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{б) } -\pi \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \leq \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{9}{4} \leq n \leq \frac{3}{4}.$$

При $n = -2$ имеем $x = \frac{\pi}{8} - \pi = -\frac{7\pi}{8}$.

При $n = -1$ имеем $x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8}$. При $n = 0$ имеем $x = \frac{\pi}{8}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}$.

С2. Проведём $KQ \parallel BD$, $BD \perp AA_1C_1 \Rightarrow KQ \perp AA_1C_1$, тогда прямая C_1K — проекция прямой C_1Q на плоскость AA_1C_1 и $\angle KC_1Q$ — искомый угол (см. рис. 44). $\sin \angle KC_1Q = \frac{KQ}{C_1Q}$.

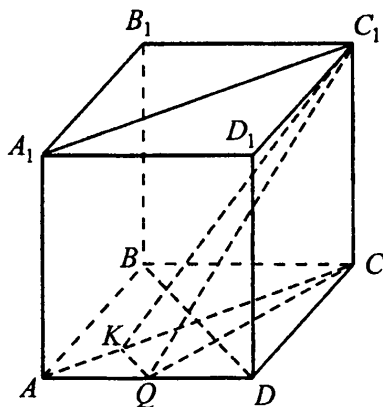


Рис. 44.

Обозначим ребро куба через a .

$$KQ = \frac{1}{4} BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \quad C_1Q = \sqrt{C_1C^2 + CQ^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2},$$

$$\sin \angle KC_1Q = \frac{a\sqrt{2} \cdot 2}{4 \cdot 3a} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

$$\text{С3. } \log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1},$$

$$\log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < -\log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1},$$

$$\log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < 0,$$

$$0 < \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < 1,$$

$$1 < \frac{4x-1}{x+1} < 4,$$

$$\begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} < 4, \\ \frac{4x-1}{x+1} > 1; \end{cases} \begin{cases} \frac{-5}{x+1} < 0, \\ \frac{3x-2}{x+1} > 0; \end{cases} \begin{cases} x+1 > 0, \\ 3x-2 > 0; \end{cases} \quad x > \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

С4. Пусть Q — точка пересечения биссектрис, $PF = x$, $FT = y$, $TK = z$.
 $MP = AK$, $AM = PK$. Точка F лежит между P и T , так как $\frac{x}{y} = \frac{2}{11} < 1$.

Возможны два случая.

1. Точка Q лежит внутри параллелограмма (см. рис. 45). Треугольники

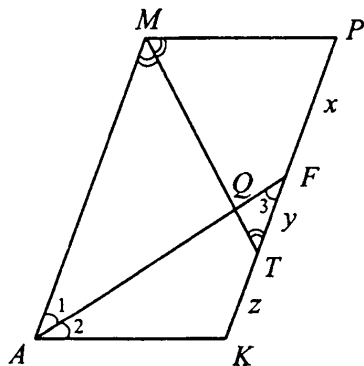


Рис. 45.

MPT и AKF равнобедренные (для треугольника AKF : $\angle 1 = \angle 2$, так как AF — биссектриса $\angle A$; $\angle 1 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллель-

ных прямых AM и KP . Для треугольника MPT аналогично). $AK = FK$, $MP = PT$.

Тогда $x + y = MP = 26$; $y + z = AK = 26$; $\frac{x}{y} = \frac{2}{11}$; $x = 4$; $y = 22$; $z = 4$; $AM = x + y + z = 4 + 22 + 4 = 30$.

2. Точка Q лежит вне параллелограмма (см. рис. 46). Треугольники

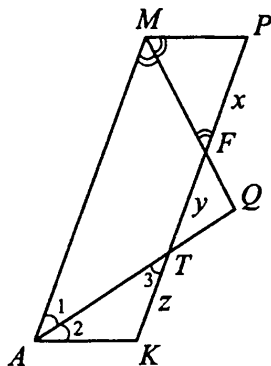


Рис. 46.

MPF и AKT равнобедренные. Тогда $x = MP = 26$; $z = AK = 26$; $\frac{x}{y} = \frac{2}{11}$; $y = \frac{11 \cdot 26}{2} = 143$; $AM = PK = x + y + z = 26 + 143 + 26 = 195$.

Ответ: 30; 195.

С5. Так как $\sqrt{a^2 + 2} - a > 0$ при любом действительном значении a , то выражение $\ln \frac{\sqrt{a^2 + 2} - a}{e^4}$ всегда имеет смысл. Рассмотрим графики функций $f(x) = \ln(-2x)$ и $g(x) = (x - a)^2 + \ln \frac{\sqrt{a^2 + 2} - a}{e^4}$ (см. рис. 47 а).

Уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ касаются в точке с абсциссой $x = x_0$ (см. рис. 47 б). Соответствующее значение a можно найти из системы:

$$\begin{cases} \ln(-2x) = (x - a)^2 + \ln \frac{\sqrt{a^2 + 2} - a}{e^4}, \\ (\ln(-2x))' = ((x - a)^2 + \ln \frac{\sqrt{a^2 + 2} - a}{e^4})'. \end{cases}$$

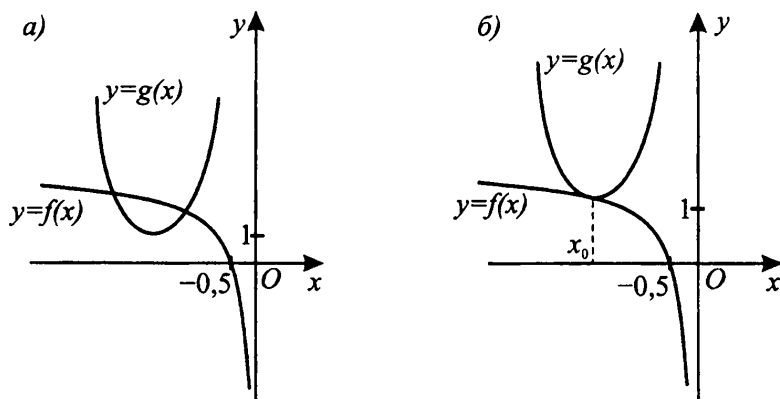


Рис. 47.

Решим второе уравнение системы:

$$\frac{-2}{-2x} = 2(x-a); 2x^2 - 2ax - 1 = 0; x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2}}{2}, x = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2}}{2},$$

так как $x_0 < 0$.

Подставим найденное значение x в первое уравнение системы, получим:

$$\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 2}}{2}\right)^2 + \ln(\sqrt{a^2 + 2} - a) - \ln e^4 = \ln(\sqrt{a^2 + 2} - a),$$

$$\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 2}}{2}\right)^2 = 4, \text{ но } a + \sqrt{a^2 + 2} > 0, \text{ значит, } \frac{a + \sqrt{a^2 + 2}}{2} = 2,$$

$$\sqrt{a^2 + 2} = 4 - a, \begin{cases} a^2 + 2 = 16 - 8a + a^2, \\ 4 - a \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{7}{4}.$$

Ответ: $\frac{7}{4}$.

С6. а) Наибольшая сумма получится, если все слагаемые взять со знаком плюс. Но тогда эта сумма всевозможных произведений равна произведению

$$(3+4+\dots+15)(13+14+\dots+22) = \frac{3+15}{2} \cdot 13 \cdot \frac{13+22}{2} \cdot 10 = 20\,475.$$

б) Расстановка знаков в полученной сумме всевозможных произведений не меняет чётности результата. Но один из результатов, а именно 20 475, нечётен. Следовательно, наименьшее по абсолютной величине значение также является нечётным натуральным числом, число 0 получить невозможно.

в) Как было доказано, меньше единицы модуль суммы быть не может. Единица может быть получена, например, следующим образом:

$$(-3 + 4 + 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10 - 11 + 12 - 13 + 14 - 15) \times \\ \times (-13 + 14 - 15 + 16 + 17 - 18 + 19 - 20 - 21 + 22) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: а) 20 475; б) нет; в) 1.

Решение варианта 7

В1. Чтобы сварить варенье из 16 кг малины, нужно $16 \cdot 1,2 = 19,2$ кг сахара. Следовательно, необходимо 20 килограммовых упаковок.

Ответ: 20.

В2. По графику определяем: 19° — наибольшая температура 25 сентября.

Ответ: 19.

В3. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей. Диагонали ромба, изображённого на рисунке, равны 6 и 10.

$$\text{Следовательно, } S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 = 30.$$

Ответ: 30.

В4. При покупке у поставщика А придётся заплатить

$$2400 \cdot 70 + 16\,400 = 184\,400 \text{ (руб.)}.$$

Стоимость 70 м^2 бруса у поставщика Б равна

$$2600 \cdot 70 = 182\,000 \text{ (руб.)} < 190\,000 \text{ (руб.)}, \text{ значит, полностью за покупку с доставкой придётся заплатить } 182\,000 + 2\,300 = 184\,300 \text{ (руб.)}.$$

Аналогично для поставщика В имеем: $2\,700 \cdot 70 = 189\,000 > 170\,000$, всего нужно будет заплатить 189 000.

Итак, наименьшая стоимость покупки с доставкой равна 184 300 руб.

Ответ: 184 300.

$$\text{В5. } \log_3(x + 4) = \log_3(5x + 2); x + 4 = 5x + 2; 2 = 4x; x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

В6. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$. Тогда

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = 0,6 \text{ (см. рис. 48)}.$$

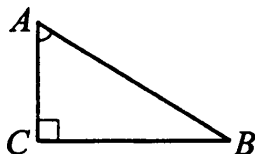


Рис. 48.

Ответ: 0,6.

$$\begin{aligned} \text{В7. } \frac{36}{\sin\left(-\frac{38\pi}{3}\right) \cos\left(-\frac{35\pi}{6}\right)} &= \frac{36}{\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6}} = 36 : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= -36 \cdot \frac{4}{3} = -48. \end{aligned}$$

Ответ: -48.

В8. Функция $f(x)$ имеет экстремум в точках, при переходе через которые её производная меняет знак. На отрезке $[-3; 5]$ таких точек 3 (см. рис. 49).

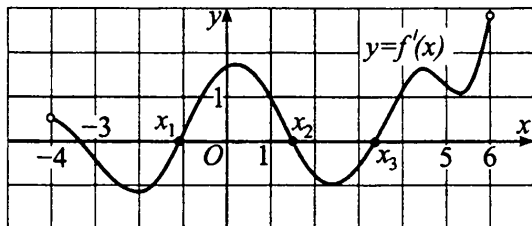


Рис. 49.

Ответ: 3.

$$\begin{aligned} \text{В9. } AK^2 &= AD^2 + DD_1^2 + D_1K^2 = 3^2 + 6^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 9 + 36 + 4 = 49; \\ AK &= 7 \text{ (см. рис. 50).} \end{aligned}$$

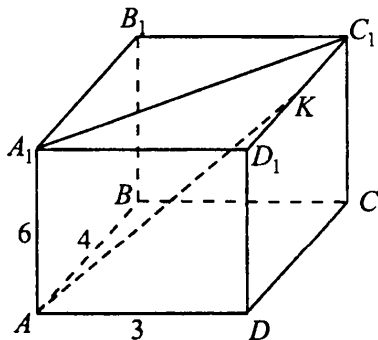


Рис. 50.

Ответ: 7.

В10. В среднем 25 опечаток встречаются на $75 + 25 = 100$ страницах, поэтому вероятность обнаружения опечатки на наугад выбранной странице равна $\frac{25}{100} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

В11. $S_{\text{бок.}} = 2\pi rh$. Тогда $8\pi = 2\pi \cdot r \cdot 2$; $r = 2$. Значит, диаметр основания цилиндра $d = 2r = 4$.

Ответ: 4.

В12. $\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% \geq 37,5\%$; $\frac{(T_1 - T_2) \cdot 100 - 37,5T_1}{T_1} \geq 0$. Так как $T_1 > 0$, то $62,5T_1 - 27\,000 \geq 0$, $T_1 \geq 432$.

Ответ: 432.

В13. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x км/ч. На прямой путь лодка затратила $\frac{144}{x-2}$ часа, а на обратный — $\frac{144}{x+2}$ часа. По условию, $\frac{144}{x-2} = \frac{144}{x+2} + 3$.

Так как по смыслу задачи $x > 2$, то получаем $48(x+2) = 48(x-2) + (x-2)(x+2)$; $x^2 = 49 \cdot 4$; $x = 14$.

Ответ: 14.

В14. $y' = -e^{2-x} - (5-x)e^{2-x} = (x-6)e^{2-x}$.

$y' = 0$ при $x = 6$; $y' < 0$ при $x < 6$; $y' > 0$ при $x > 6$. $x = 6$ — точка минимума.

Ответ: 6.

С1. а) $2\cos^2 x - 2\sin 2x = -1$; $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$. При $\cos x = 0$ имеем $\sin x = \pm 1$, что не удовлетворяет уравнению. Поэтому можно разделить обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$. Получим $\text{tg}^2 x - 4\text{tg} x + 3 = 0$; $\text{tg} x = 1$ или $\text{tg} x = 3$. Отсюда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $x = \arctg 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \pi k < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4}$, $k = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

$\frac{\pi}{2} < \arctg 3 + \pi n < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \arctg 3 < \pi n < \frac{3\pi}{2} - \arctg 3$, $n = 1$, $x = \arctg 3 + \pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\arctg 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}$; $\arctg 3 + \pi$.

C2. Так как призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямая, то

$\angle CAA_1 = \angle BDD_1 = 90^\circ$. Из прямоугольных $\triangle CAA_1$ и $\triangle BDD_1$:

$$AC = AA_1 \operatorname{ctg} \angle CAA_1 = CC_1 \operatorname{ctg} \angle CAA_1 = 1 \cdot 2 = 2.$$

$$BD = DD_1 \operatorname{ctg} \angle BDD_1 = CC_1 \operatorname{ctg} \angle BDD_1 = 1 \cdot 4 = 4.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4. \text{ Искомый объём вычисляется по}$$

$$\text{формуле } V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = 4 \cdot 1 = 4.$$

Ответ: 4.

C3. Решим первое неравенство системы $6 \cdot 5^{1-x} \leq 77 - 5^{x+1}$,

$$5 \cdot 5^{2x} - 77 \cdot 5^x + 30 \leq 0;$$

$$0,4 \leq 5^x \leq 15;$$

$$\log_5 0,4 \leq x \leq 1 + \log_5 3.$$

Решим второе неравенство системы $\log_x 1,5 \cdot \log_{1,5} \frac{4x}{9} + 1 \geq 0$.

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$. Преобразуем неравенство на ОДЗ.

$$\log_x \frac{4x}{9} + \log_x x \geq 0;$$

$$\log_x \frac{4x^2}{9} \geq 0. \text{ На ОДЗ это неравенство равносильно неравенству}$$

$$(x-1) \left(\frac{4x^2}{9} - 1 \right) \geq 0;$$

$$(x-1)(2x-3)(2x+3) \geq 0;$$

$$(x-1)(x-1,5) \geq 0. \text{ С учётом ОДЗ получаем: } 0 < x < 1, x \geq 1,5.$$

Найдём общее решение системы. Так как $\log_5 0,4 < 0$, $\log_5 3 > 0,5$ (последнее выполняется ввиду $3 > \sqrt{5}$), то $x \in (0; 1) \cup [1,5; 1 + \log_5 3]$.

Ответ: $(0; 1) \cup [1,5; 1 + \log_5 3]$.

C4. Пусть x — радиус окружности с центром O_3 , в которую вписан равносторонний треугольник. Могут представиться два случая расположения окружности.

1. Проведём $O_2 F \parallel AB$ и $DE \parallel AB$ (см. рис. 51), $ABO_2 F$ и $ABED$ — прямоугольники. Из прямоугольного треугольника $O_2 F O_1$ находим,

$$O_2 F = \sqrt{O_1 O_2^2 - (O_1 A - O_2 B)^2} = \sqrt{45^2 - 27^2} = 36,$$

$$AB = O_2 F = 36.$$

Из прямоугольных треугольников $O_1 D O_3$ и $O_2 E O_3$ имеем:

$$DO_3 = \sqrt{(36+x)^2 - (36-x)^2} = 12\sqrt{x},$$

$$EO_3 = \sqrt{(9+x)^2 - (9-x)^2} = 6\sqrt{x}.$$

$$DE = DO_3 + EO_3 = 18\sqrt{x}, DE = AB = 36, 18\sqrt{x} = 36, x = 4.$$

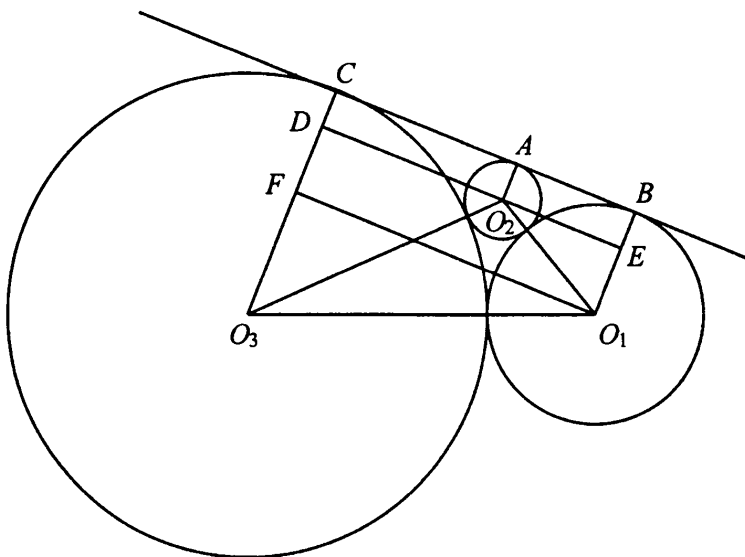


Рис. 52.

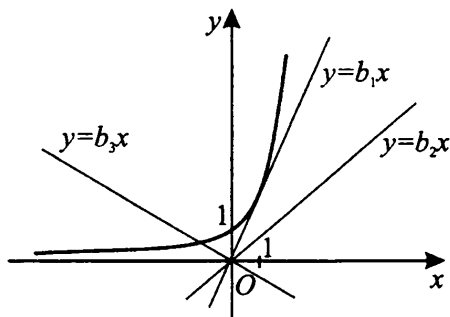


Рис. 53.

ций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют при $b_1 > 0$, когда графики этих функций касаются. Найдём b_1 из условия касания:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_0} = b_1 x_0, \\ e^{x_0} = b_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1, \\ b_1 = e. \end{cases}$$

Вспоминая, что $b = a^2 - 3a + 1$, найдём искомое значение a :

$$1) b < 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 1 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

$$2) b = e \Leftrightarrow a^2 - 3a + 1 - e = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{5 + 4e}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \cup \left\{ \frac{3 + \sqrt{5 + 4e}}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{3 - \sqrt{5 + 4e}}{2} \right\}.$$

С6. а) Разделим все 48 чисел на пары соседних: 1 и 2, 3 и 4, ..., 47 и 48. Взяв разность чисел в каждой паре, мы получим 24 единицы, из которых далее получим 12 нулей.

б) Пусть $M = 4k + 1$. Заметим, что при проведении указанной в условии процедуры не меняется чётность суммы всех чисел на доске. Изначально сумма равна $0,5 \cdot (4k + 1) \cdot (4k + 1 + 1) = (4k + 1)(2k + 1)$, это число нечётно. Поэтому оставить на доске только нули нельзя.

в) Если $M = 4k$, то решение аналогично описанному в пункте а. Если $M = 4k - 1$, то разделим все числа, кроме 1, на пары соседних: 2 и 3, 4 и 5, ..., $4k - 2$ и $4k - 1$. Всего получили $2k - 1$ пару. После взятия разности чисел в каждой паре у нас останется $2k$ единиц, которые можно стереть и записать k нулей.

Осталось рассмотреть случай $M = 4k + 2$. Аналогично пункту б, сумма всех чисел равна $0,5 \cdot (4k + 2) \cdot (4k + 2 + 1) = (2k + 1)(4k + 3)$, это число нечётно. Поэтому оставить на доске только нули нельзя.

Ответ: а) да; б) нет; в) можно для $M = 4k$ и $M = 4k - 1$, где $k \in N$.

Решение варианта 8

В1. После повышения цены билет будет стоить $500 \cdot 1,15 = 575$ рублей.

$5000 : 575 = 8 \frac{400}{575}$, значит, можно будет купить 8 билетов.

Ответ: 8.

В2. По графику определяем: 35° — наибольшая температура.

Ответ: 35.

В3. Обозначим точки $A(2; 2)$, $B(9; 6)$, $C(11; 2)$, $D(9; 2)$ (см. рис. 54 на с. 58). Сторона AC параллельна оси абсцисс, BD — оси ординат. Следовательно, $BD \perp AC$ и значит, BD — высота треугольника ABC .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 18.$$

Ответ: 18.

В4. Посчитаем стоимость всех покупок и выберем самую дешёвую:

1. $190 \cdot 150 + 10\,000 = 38\,500$ (руб).

2. $210 \cdot 150 + 8\,000 = 39\,500$ (руб).

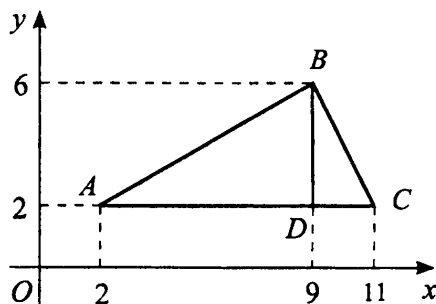


Рис. 54.

3. $220 \cdot 150 = 33\,000$ (руб) — самая низкая цена.

Ответ: 33 000.

B5. $\log_{17}(5x + 7) = \log_{17} 22$; $5x + 7 = 22$; $x = 3$.

Ответ: 3.

B6. $AB = BC \cdot \operatorname{tg} C = 4 \cdot 0,75 = 3$; $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Ответ: 5.

B7. $\log_4 25,6 + \log_4 10 = \log_4 256 = 4$.

Ответ: 4.

B8. Точек максимума здесь две, так как график производной 3 раза меняет знак на интервале $(-6; 5)$, из которых 2 раза с плюса на минус. Это и есть точки максимума.

Ответ: 2.

B9. $NL \parallel CC_1$, $NL = CC_1 = 5\sqrt{6}$ (рис. 55).

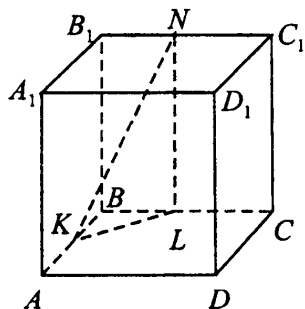


Рис. 55.

Так как точки K и L — середины равных рёбер, то $KB = BL = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.

В $\triangle KBL$ $\angle B = 90^\circ$,

$$KL^2 = 2 \cdot \left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{2 \cdot 25 \cdot 6}{4} = 75.$$

В $\triangle KLN$ $\angle L = 90^\circ$,

$$KN^2 = KL^2 + LN^2, LN = 5\sqrt{6},$$

$$KN^2 = 75 + 25 \cdot 6 = 75 + 150 = 225, KN = 15.$$

Ответ: 15.

В10. Вероятность того, что в пятницу последним будет обслуживаться клиент, посещавший эту парикмахерскую раньше, равна отношению

$$\frac{14}{26 + 14} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20} = 0,35.$$

Ответ: 0,35.

В11. Так как диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, то сторона ромба равна $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ (см. рис. 56). Тогда $S_{\text{бок. п.}} = 13 \cdot 4 \cdot 20 = 1040$.

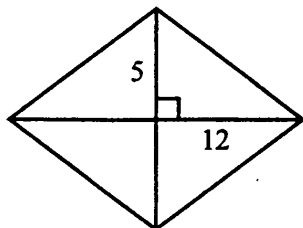


Рис. 56.

Ответ: 1040.

$$\mathbf{B12.} \sigma \cdot S \cdot T^4 \geq 2,7702 \cdot 10^{31}; 5,7 \cdot 10^{-8} \cdot T^4 \cdot 6 \cdot 10^{24} \geq 2,7702 \cdot 10^{31};$$

$$T^4 \geq \frac{2,7702 \cdot 10^{31}}{5,7 \cdot 10^{16} \cdot 6}; T^4 \geq \frac{2,7702 \cdot 10^{15}}{34,2}; T^4 \geq 0,081 \cdot 10^{15}; T^4 \geq 81 \cdot 10^{12}.$$

Так как $T > 0$, то $T \geq 3 \cdot 10^3$.

Ответ: 3000.

В13. Пусть x км/ч — скорость первого велосипедиста, тогда $(x - 5)$ км/ч — скорость второго. На весь путь первый велосипедист затратил $\frac{84}{x}$ часов, а второй — $\frac{84}{x - 5}$ часов, и по условию $\frac{84}{x} = \frac{84}{x - 5} - 5$.

Считая, что $x \neq 0$ и $x \neq 5$, имеем

$$84(x - 5) = 84x - 5x(x - 5); x(x - 5) = 84; x^2 - 5x - 84 = 0; (x - 12)(x + 7) = 0.$$

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то $x = 12$.

Скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, равна 7.

Ответ: 7.

$$\text{В14. } y = 2(x-7)e^{x-6}; y' = 2e^{x-6} + 2(x-7)e^{x-6} = 2(x-6)e^{x-6}.$$

$y' = 0$ при $x = 6$; $x = 6$ — точка экстремума исходной функции. Находим значения функции в точке экстремума и на концах отрезка и выбираем наименьшее.

$$y(5) = -4e^{-1}, y(6) = -2, y(7) = 0.$$

Ответ: -2.

$$\text{С1. а) } 8 - 4(1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 9 \cos x, \sin x \neq 0,$$

$$x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$8 - 4 + 4 \cos^2 x - 2 \cos^2 x = -9 \cos x,$$

$$2 \cos^2 x + 9 \cos x + 4 = 0.$$

$$\cos x = \frac{-9 \pm 7}{4}; \cos x = -\frac{1}{2}, \cos x = -4.$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}, x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -4 \text{ — нет решения.}$$

$$\text{б) Найдём подходящие корни в первой серии решений } x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n:$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n < \pi, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} + 2n < 1, \quad -\frac{1}{6} \leq 2n < \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{12} \leq n < \frac{1}{6},$$

$$n = 0, x = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Найдём подходящие корни во второй серии решений } x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n:$$

$$\frac{\pi}{2} \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < \pi, \quad \frac{1}{2} \leq -\frac{2}{3} + 2n < 1, \quad \frac{7}{6} \leq 2n < \frac{5}{3}, \quad \frac{7}{12} \leq n < \frac{5}{6} \text{ — нет целочисленных решений.}$$

$$\text{Ответ: а) } \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \frac{2\pi}{3}.$$

С2. Так как призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямая, то

$\angle CAA_1 = \angle BDD_1 = 90^\circ$. Из прямоугольных $\triangle CAA_1$ и $\triangle BDD_1$:

$$AC = AA_1 \operatorname{ctg} \angle ACA_1 = CC_1 \operatorname{ctg} \angle ACA_1 = 2 \cdot 3 = 6.$$

$$BD = DD_1 \operatorname{ctg} \angle BDD_1 = CC_1 \operatorname{ctg} \angle DBB_1 = 2 \cdot 4 = 8.$$

$$\text{По теореме Пифагора: } AB^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = 3^2 + 4^2 = 25; AB = 5.$$

Периметр $P_{ABCD} = 4AB = 20$. Площадь боковой поверхности параллелепипеда: $S_{\text{бок.}} = CC_1 \cdot P_{ABCD} = 2 \cdot 20 = 40$.

Ответ: 40.

С3. 1) Решим первое неравенство системы.

$3 \cdot 7^x + 4 \cdot 7^{1-x} - 19 \geq 0$; $3 \cdot (7^x)^2 - 19 \cdot 7^x + 28 \geq 0$, откуда

$$\begin{cases} 7^x \leq \frac{7}{3}, \\ 7^x \geq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 - \log_7 3 \\ x \geq \log_7 4. \end{cases}$$

2) Решим второе неравенство системы. ОДЗ: $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$3 - \log_{\frac{4}{5}}(0,64x) \cdot \log_x \frac{4}{5} \geq 0; \quad 3 - \log_x 0,64x \geq 0; \quad \log_x x - \log_x 0,8 \geq 0.$$

На ОДЗ это неравенство равносильно неравенству $(x-1)(x-0,8) \geq 0$, откуда, с учётом ОДЗ, получаем $x \in (0; 0,8] \cup (1; +\infty)$.

3) Найдём пересечение найденных по отдельности решений неравенств системы. Так как $\log_7 4 < 0,8$ (докажем это: $\log_7 4^5 < 5 \cdot 0,8 \Leftrightarrow 1024 < 7^4 \Leftrightarrow 1024 < 2401$), то ответом будет $x \in (0; 1 - \log_7 3] \cup [\log_7 4; 0,8] \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(0; 1 - \log_7 3] \cup [\log_7 4; 0,8] \cup (1; +\infty)$.

С4. Пусть x — радиус окружности, в которую вписан равносторонний треугольник. Могут представиться два случая расположения окружности.

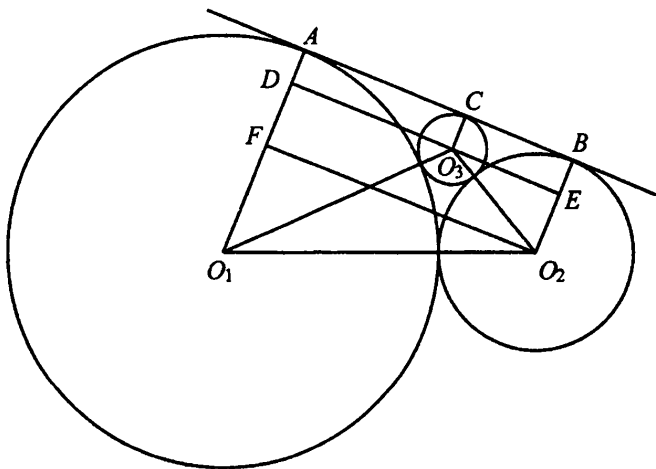


Рис. 57.

1. Проведём $O_2F \parallel AB$ и $DE \parallel AB$ (см. рис. 57), тогда ABO_2F и $ABED$ — прямоугольники. Из прямоугольных треугольников O_2FO_1 , O_1DO_3 и O_2EO_3 имеем:

$$FO_2 = \sqrt{160^2 - 128^2} = 96, DO_3 = \sqrt{(144 + x)^2 - (144 - x)^2} = 24\sqrt{x}.$$

$$EO_3 = \sqrt{(16 + x)^2 + (16 - x)^2} = 8\sqrt{x},$$

$$DE = DO_3 + EO_3 = 32\sqrt{x}, DE = FO_2 = 96.$$

$$32\sqrt{x} = 96, x = 9.$$

Сторона правильного треугольника равна $9\sqrt{3}$, а площадь

$$S = \frac{(9\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 60,75\sqrt{3}.$$

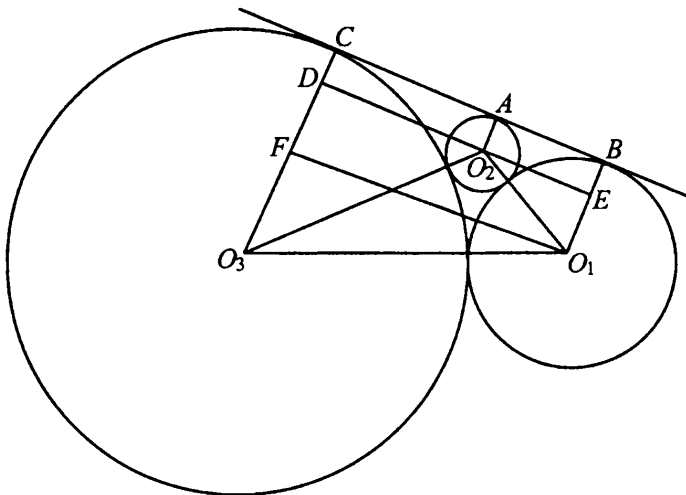


Рис. 58.

2. Проведём $O_1F \parallel BC$ и $DE \parallel BC$ (см. рис. 58), тогда CBO_1F и $CBED$ — прямоугольники. Из прямоугольных треугольников O_1FO_3 , O_2DO_3 и O_1O_2E имеем:

$$O_1F = \sqrt{(x + 144)^2 - (x - 144)^2} = 24\sqrt{x},$$

$$O_2D = \sqrt{(x + 16)^2 - (x - 16)^2} = 8\sqrt{x}, EO_2 = \sqrt{160^2 - 128^2} = 96;$$

$$DE = DO_2 + EO_2 = 8\sqrt{x} + 96; 8\sqrt{x} + 96 = 24\sqrt{x}; 16\sqrt{x} = 96, x = 36.$$

Сторона правильного треугольника равна $36\sqrt{3}$, а площадь

$$S = \frac{(36\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 972\sqrt{3}.$$

Ответ: $60,75\sqrt{3}$ или $972\sqrt{3}$.

С5. Обозначим $b = a^2 - 5a - 4$. Заметим, что при $b = 0$ уравнение $e^0 + 3x = 0$ имеет единственное решение $x = -\frac{1}{3}$. Определим, при ка-

ких значениях параметра b графики функций $f(x) = e^{bx}$ и $g(x) = -3x$ имеют более 1 точки пересечения (см. рис. 59).

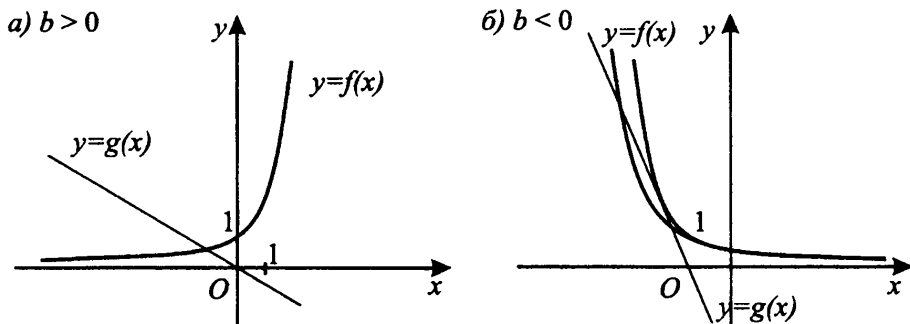


Рис. 59.

Из этих графиков видно, что при $b > 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ имеет 1 решение, а при $b < 0$ уравнение имеет 2 решения, если $b < b_1$, где при b_1 графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ касаются в некоторой точке x_0 . Найдём b_1 из условия касания:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{b_1 x_0} = -3x_0, \\ b_1 e^{b_1 x_0} = -3. \end{cases} \quad \text{Отсюда следует, что } b_1 = \frac{1}{x_0}$$

и $b_1 x_0 = 1$, тогда $e^1 = -3x_0$ и $x_0 = -\frac{e}{3}$, $b_1 = -\frac{3}{e}$.

Найдём искомое значение a из неравенства:

$$a^2 - 5a - 4 < -\frac{3}{e}, \quad a^2 - 5a - 4 + \frac{3}{e} < 0, \quad \text{откуда}$$

$$a \in \left(\frac{5e - \sqrt{41e^2 - 12e}}{2e}, \frac{5e + \sqrt{41e^2 - 12e}}{2e} \right).$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{5e - \sqrt{41e^2 - 12e}}{2e}, \frac{5e + \sqrt{41e^2 - 12e}}{2e} \right).$$

С6. а) Так как каждый блок состоит из 3-х чисел, то n^2 делится на 3, значит, n делится на 3. Если $n = 3$, то $n^2 = 9$ — квадрат должен разбиваться на 3 блока. Тогда из 4-х угловых точек квадрата (см. рис. 60 на с. 64) хотя бы две принадлежат одному блоку, что невозможно. Для $n = 6$ разбиение существует (см. рис. 61 на с. 64).

б) Предположим, что в таблице есть хотя бы 1 чётное число n_1 , это число принадлежит как минимум 3 блокам (см. рис. 62 на с. 64).

Тогда среди чисел, отмеченных «*», одно чётное (n_2) и одно нечётное (n_3), так как $n_1 + n_2 + n_3$ — нечётное. Но $n_1 + n_2 + n_4$ — нечётное, значит,

$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$

Рис. 60.

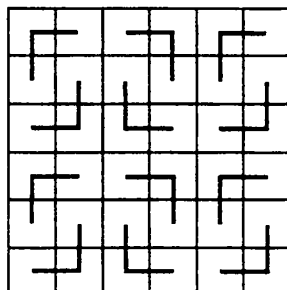


Рис. 61.

а)

n_1	*
*	n_4

б)

*	n_1
n_4	*

в)

n_4	*
*	n_1

г)

*	n_4
n_1	*

Рис. 62.

n_4 — нечётное. С другой стороны, $n_1 + n_3 + n_4$ — нечётное, значит, n_4 — чётное. Получили противоречие, значит, такая ситуация невозможна, и в таблице 0 чётных чисел.

в) Предположим, в таблице есть 2 различных числа. Тогда в таблице найдётся и 2 различных соседних числа a и b (см. рис. 63).

Но $x + y + b = x + y + a \Rightarrow a = b$. Получили противоречие. Значит, все числа в таблице одинаковы.

а)

a	b
x	y

б)

a	x
b	y

в)

x	y
a	b

г)

x	a
y	b

Рис. 63.

Ответ: а) 6; б) 0; в) 1.

Решение варианта 9

В1. После понижения цены одна тетрадь будет стоить $0,9 \cdot 50 = 45$ рублей.

Так как $570 : 45 = 12\frac{2}{3}$, то наибольшее число тетрадей, которое можно купить, равно 12.

Ответ: 12.

В2. По диаграмме определяем, что средняя температура была не отрицательной в течение 8-ми месяцев.

Ответ: 8.

В3. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту: $S = AB \cdot DH = 3 \cdot 8 = 24$ (см. рис. 64).

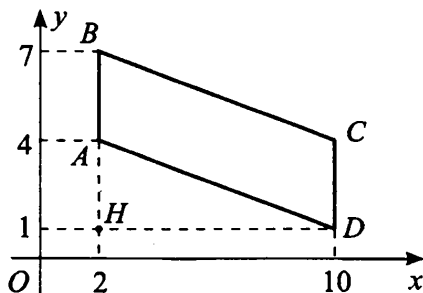


Рис. 64.

Ответ: 24.

В4. В зимние месяцы сумма оплаты за электроснабжение составляет $3,23 \text{ р.} \cdot 250 = 807,5 \text{ р.}$

В летние месяцы сумма оплаты равна:

$807,5 \text{ р.} - 807,5 \text{ р.} \cdot 0,2 = 807,5 \text{ р.} - 161,5 \text{ р.} = 646 \text{ р.}$

Ответ: 646.

В5. $\sqrt{10 - 2x} = 4$, $10 - 2x = 16$, $2x = -6$, $x = -3$.

Ответ: -3.

В6. Из теоремы синусов $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R$, $R = \frac{7}{2 \sin 30^\circ} = 7$.

Ответ: 7.

В7. $3^{4+\log_3 6} = 3^4 \cdot 3^{\log_3 6} = 81 \cdot 6 = 486$.

Ответ: 486.

В8. Пользуясь графиком из условия, получаем:

$$\int_{-2}^5 f(x) dx = F(5) - F(-2) = 3 - 5 = -2.$$

Ответ: -2.

В9. Из $\triangle A_1D_1C_1$: $A_1C_1 = \sqrt{A_1D_1^2 + D_1C_1^2}$.

$$A_1C_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см. рис. 65).}$$

$CC_1 \perp A_1D_1C_1 \Rightarrow CC_1 \perp A_1C_1$. Прямоугольный треугольник A_1CC_1 — равнобедренный, значит, острый угол A_1CC_1 равен 45° .

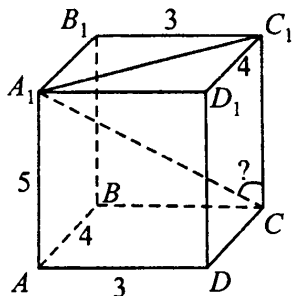


Рис. 65.

Ответ: 45.

В10. В концерте школьной самодеятельности выступают $6 + 7 + 8 + 4 = 25$ учащихся, из них 7 девятиклассников. Вероятность того, что четвертым не будет выступать девятиклассник, равна:

$$\frac{25 - 7}{25} = \frac{18}{25} = 0,72.$$

Ответ: 0,72.

В11. Для исходной призмы $S_{\text{бок.}} = P_{ABC} \cdot h$. Для отсечённой призмы $S_{\text{бок.}} = P_{AMN} \cdot h$ (см. рис. 66). По условию MN — средняя линия $\triangle ABC$, значит, $P_{ABC} = 2P_{AMN}$. Тогда для исходной призмы $S_{\text{бок.}} = 2 \cdot P_{AMN} \cdot h = 2 \cdot 18 = 36$.

Ответ: 36.

В12. По условию $\frac{60}{60 + 240} \cdot 2 \cdot \cos \alpha \geq 0,2$.

$$\frac{1}{5} \cdot 2 \cdot \cos \alpha \geq 0,2,$$

$$\cos \alpha \geq 0,5$$

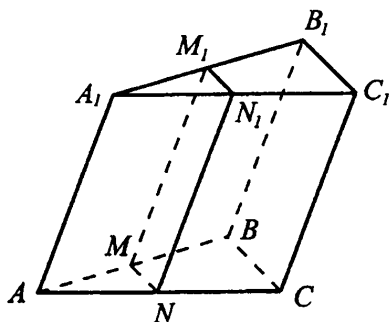


Рис. 66.

$\alpha \leq 60^\circ$.

$\alpha = 60^\circ$ — искомый максимальный угол.

Ответ: 60.

В13. Пусть x км/ч — скорость течения реки, тогда $(12 + x)$ км/ч — скорость катера по течению реки, а $(12 - x)$ км/ч — скорость катера против течения. Время, затраченное катером на путь из пункта A в пункт B , равно $\frac{20}{12 - x}$. Время, затраченное катером на путь от B к A , с учётом времени на остановку в пункте B , равно $\frac{20}{12 + x} + \frac{1}{4}$. Общее время составляет 4 часа.

Составим уравнение: $\frac{20}{12 + x} + \frac{1}{4} + \frac{20}{12 - x} = 4$, $0 < x < 12$;

$$4 \cdot 20 \cdot (12 - x) + (12 + x)(12 - x) + 4 \cdot 20 \cdot (12 + x) = 4 \cdot 4(12^2 - x^2),$$

$$960 - 80x + 12^2 - x^2 + 960 + 80x = 16(12^2 - x^2),$$

$$960 + 960 + 144 - 2304 = -15x^2, \quad 240 = 15x^2, \quad x^2 = 16, \quad x = \pm 4. \text{ При этом } x = -4 \text{ — не удовлетворяет условию } 0 < x < 12.$$

Ответ: 4.

В14. Найдём значения функции на концах заданного отрезка:

$$y = \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{x} + 2013 \text{ на } \left[\frac{1}{2}; 10\right].$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} + 10 + 2013 = 2023\frac{5}{8};$$

$$y(10) = \frac{5}{2} \cdot 100 + \frac{5}{10} + 2013 = 250 + 0,5 + 2013 = 2263,5;$$

$$y'(x) = 5x - \frac{5}{x^2}.$$

$$y'(x) = 0, \text{ если } 5x - \frac{5}{x^2} = 0, \frac{x^3 - 1}{x^2} = 0, x = 1.$$

$$y(1) = 2,5 \cdot 1 + \frac{5}{1} + 2013 = 7,5 + 2013 = 2020,5.$$

Из найденных значений наименьшим является 2020,5.

Ответ: 2020,5.

$$\text{C1. а) } \operatorname{ctg} x \cos 3x = \cos 4x + \sin 3x, \sin x \neq 0,$$

$$\frac{\cos 3x \cos x}{\sin x} = \cos 4x + \sin 3x,$$

$$\cos 3x \cos x = \cos 4x \sin x + \sin 3x \sin x,$$

$$\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x = \cos 4x \sin x, \cos 4x = \cos 4x \sin x,$$

$$\cos 4x(1 - \sin x) = 0, \begin{cases} \cos 4x = 0, \\ 1 - \sin x = 0; \end{cases} \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ \sin x = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

б) Выберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$, из серии решений

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z:$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \leq \frac{\pi}{4}; \quad -\frac{5}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}, \quad k = -2; -1; 0.$$

$$x_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8}; \quad x_2 = -\frac{\pi}{8}, \quad x_3 = \frac{\pi}{8}.$$

Выберем корни, принадлежащие указанному промежутку, из серии решений $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z:$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{1}{2} \leq k \leq -\frac{1}{8}, \text{ таких целочисленных значений } n \text{ нет.}$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \text{ б) } -\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}.$$

С2. В $\triangle ABC$ выполняется равенство $AB^2 = BC^2 + AC^2$ (см. рис. 67). Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle BCA = 90^\circ$.

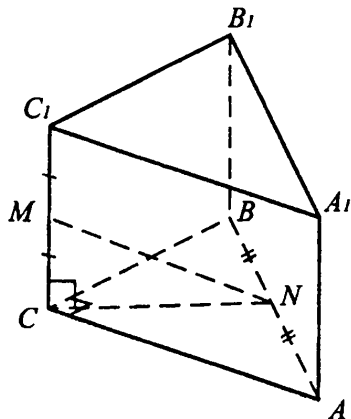


Рис. 67.

$CN = \frac{1}{2}AB$ как медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе. $CN = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5$. $CM = \frac{1}{2}CC_1 = \sqrt{6}$.

Рассмотрим $\triangle MCN$. Так как исходная призма прямая, то $\angle MCN = 90^\circ$. По теореме Пифагора $MN = \sqrt{CN^2 + MC^2} = \sqrt{6,25 + 6} = 3,5$.

Ответ: 3,5.

С3. Решим каждое неравенство системы по отдельности.

$$1) \log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x).$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ x+1 > 0, \\ 2-x > 0, \\ \frac{1}{x} > 0, \frac{1}{x} \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < 2, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\log_x(x+1) < -\log_x(2-x), \quad \log_x(x+1) < \log_x \frac{1}{2-x},$$

$$(x-1)\left((x+1) - \frac{1}{2-x}\right) < 0, \quad \frac{(x-1)(-x^2+x+1)}{2-x} < 0,$$

$$\frac{(x-1)}{(x-2)} \cdot \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов (см. рис. 68).

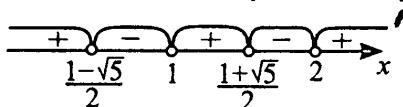


Рис. 68.

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 1\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right).$$

Учитывая ОДЗ, $x \in (0; 1) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$.

2) Решим второе неравенство системы. Сделав замену $t = \log_{\frac{1}{8}} x$, получим $\sqrt{1-9t^2} > 1-4t$. ОДЗ: $1-9t^2 \geq 0$, $-\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{3}$.

Возможно 2 случая:

1) $1-4t < 0$, $t > \frac{1}{4}$. С учётом ОДЗ, $t \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$;

2) При $t \leq \frac{1}{4}$ имеем $1-9t^2 > (1-4t)^2$, $1-9t^2 > 16t^2-8t+1$,

$25t\left(t - \frac{8}{25}\right) < 0$, $0 < t < \frac{8}{25}$. С учётом $t \leq \frac{1}{4}$ имеем $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$. Объ-

единяя оба случая, получим $t \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$. Вернёмся к исходной переменной:

$0 < \log_{\frac{1}{8}} x \leq \frac{1}{3}$, $\log_{\frac{1}{8}} 1 < \log_{\frac{1}{8}} x \leq \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2}$, то есть $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

Находим пересечение решений первого и второго неравенств системы, получим $x \in [0,5; 1)$.

Ответ: $[0,5; 1)$.

С4. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $BC < AD$ (см. рис. 69). Согласно условию, одна из диагоналей делится точкой их пересечения в отношении 1 : 2. Не нарушая общности, будем считать, что $OC : AO = 1 : 2$.

$\triangle BOC \sim \triangle AOD$ ($\angle BOC = \angle AOD$ — вертикальные, $\angle BCO = \angle OAD$ — накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC).

Следовательно, $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$, $AD = 2BC$.

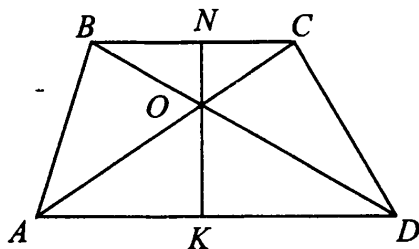


Рис. 69.

Пусть ON — высота $\triangle BOC$, OK — высота $\triangle AOD$. Тогда $\frac{ON}{OK} = \frac{1}{2}$,
 $OK = 2ON$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot NK = \frac{1}{2}(BC + 2BC) \cdot (NO + OK) =$$

$$= \frac{3}{2}BC \cdot (NO + 2NO) = \frac{9BC}{2} \cdot NO = 9S_{BOC}.$$

Согласно условию, $S_{BOC} = 8$, следовательно, $S_{ABCD} = 9 \cdot 8 = 72$.

2. Пусть $BC > AD$ (см. рис. 70).

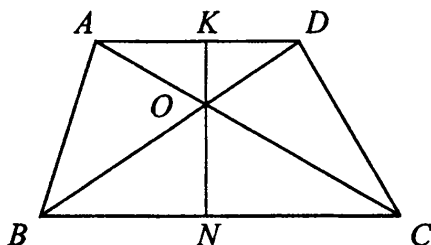


Рис. 70.

Будем считать $OD : OB = 1 : 2$. Проводя рассуждения, аналогичные рассмотренным в пункте 1, получаем $\triangle AOD \sim \triangle COD$; $CB = 2AD$; $ON = 2KO$; следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + CB) \cdot NK = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}CB + CB\right) \cdot (KO + ON) =$$

$$= \frac{3}{4}CB \left(\frac{1}{2}ON + ON\right) = \frac{9}{8}CB \cdot ON = \frac{9}{4} \cdot S_{COB} = \frac{9}{4} \cdot 8 = 18.$$

Ответ: 18; 72.

С5. Пусть $f(x) = |\sqrt{16-x} - 1|$, $g(x) = ax - 32a - 4$. Построим графики этих функций (см. рис. 71), учитывая, что график функции $y = g(x)$ — это прямая, проходящая через точку $(32; -4)$, так как $ax - 32a - 4 = a(x - 32) - 4$.

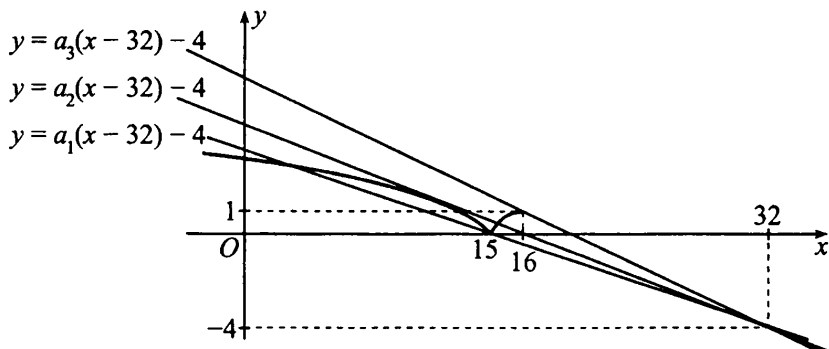


Рис. 71.

Очевидно, что при $a \geq 0$ эти графики не пересекаются. Точка пересечения будет единственной, если $a \in [a_3; a_2) \cup (a_1; 0)$.

Найдём a_3 из того условия, что $y = a_3(x - 32) - 4$ проходит через точку $(16; 1)$: в этом случае $1 = a_3(16 - 32) - 4$, $a_3 = -\frac{5}{16}$.

Найдём a_2 из условия касания прямой $y = a_2(x - 32) - 4$ и $y = |\sqrt{16-x} - 1|$:

$$\begin{cases} \sqrt{16-x} - 1 = a_2(x - 32) - 4, \\ (\sqrt{16-x} - 1)' = (a_2(x - 32) - 4)', \\ x \leq 15; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{16-x} - 1 = a_2(x - 32) - 4, \\ -\frac{1}{2\sqrt{16-x}} = a_2, \\ x \leq 15; \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{2\sqrt{16-x}}, \\ \sqrt{16-x} - 1 = -\frac{(x - 32)}{2\sqrt{16-x}} - 4, \\ x \leq 15. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы $\sqrt{16-x} - 1 = -\frac{x-32}{2\sqrt{16-x}} - 4$,

$$2(16-x) + 6\sqrt{16-x} = 32-x; \quad 6\sqrt{16-x} = x; \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ 36(16-x) = x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + 36x - 36 \cdot 16 = 0; \end{cases} \quad x = 12. \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{16-12}} = -\frac{1}{4}.$$

Найдём a_1 из условия, что график $y = a_1(x - 32) - 4$ проходит через точку $(15; 0)$. В этом случае $0 = -17a_1 - 4$, $a_1 = -\frac{4}{17}$.

Ответ: $\left[-\frac{5}{16}; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{4}{17}; 0\right)$.

С6. а) Найдём, сколькими способами можно выбрать 3 отрезка из 7. По определению это число $C_7^3 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$. Так как $36 > 35$, очевидно, что нельзя построить 36 различных треугольников.

б) Пусть длины отрезков равны 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Треугольника со сторонами 5, 6, 11 не существует. Однако если выбрать любую другую тройку, то из неё можно будет составить треугольник, так как выполняется неравенство треугольника (большая сторона меньше суммы двух других), потому что длина наибольшего отрезка в тройке не превышает 11, а сумма двух других не меньше 11, при этом они не могут быть равны 11 одновременно. Всего тройку отрезков можно выбрать 35 способами, и только одна тройка не образует треугольник. То есть можно построить 34 треугольника.

в) Предположим, что $n = 0$, а длины отрезков равны $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ и d_7 , при этом $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4 \leq d_5 \leq d_6 \leq d_7$. Заметим, что $d_1 \geq 1$, $d_2 \geq 1$. Тогда $d_3 \geq d_1 + d_2 \geq 2$ (т.к. отрезки с длинами d_1, d_2, d_3 не образуют треугольник). Аналогично $d_4 \geq d_3 + d_2 \geq 3$, $d_5 \geq d_4 + d_3 \geq 5$, $d_6 \geq d_5 + d_4 \geq 8$, $d_7 \geq d_6 + d_5 \geq 13$, а это противоречит тому, что длины всех отрезков не превосходят 12. Значит, $n \neq 0$, а потому $n \geq 1$. Покажем, что $n = 1$. Для этого приведём пример длин отрезков (не превосходящих 12), из которых можно составить ровно 1 треугольник — 1, 1, 2, 3, 5, 8, 12. Выберем из этих чисел 3: если большие из них меньше 12, то треугольник составить нельзя. Если большая сторона равна 12, то единственный треугольник можно составить со сторонами 5, 8, 12.

Ответ: а) нет; б) да; в) 1.

Решение варианта 10

В1. Так как 12 бутылок стоят $12 \cdot 15,5 = 186 < 200$ рублей, а 13 бутылок стоят $201,5 > 200$ рублей, то купить можно 12 бутылок, а в них $12 \cdot 1,5 = 18$ литров воды.

Ответ: 18.

В2. По диаграмме определяем самую высокую температуру (июль, 25°) и самую низкую (январь, -15°) и находим их разность: $25^\circ - (-15^\circ) = 40^\circ$.

Ответ: 40.

В3. $S = \frac{(7-1) + (5-3)}{2} \cdot (10-2) = 32$.

Ответ: 32.

В4. После установки двухтарифного счётчика в дневное время расход электроэнергии оплачивается: $150 \cdot 3,23 \text{ р.} = 484,5 \text{ руб.}$ за месяц, а в ночное время $190 \cdot 1,80 \text{ руб.} = 342 \text{ руб.}$ за месяц, итого $484,5 \text{ руб.} + 342 \text{ руб.} = 826,5 \text{ руб.}$

В квартире установлен однотарифный счётчик, по которому оплата идёт по тарифу $3,23 \text{ руб.}$ за кВт \cdot ч, то есть

$$(150 + 190) \cdot 3,23 \text{ руб.} = 340 \cdot 3,23 \text{ руб.} = 1098,2 \text{ руб.}$$

Предполагаемая сумма ежемесячной экономии после установки двухтарифного счётчика составит:

$$1098,2 \text{ руб.} - 826,5 \text{ руб.} = 271,7 \text{ руб.}$$

Ответ: 271,7.

В5. $\sqrt{7x+1} = 6$, $7x+1 = 36$, $7x = 35$, $x = 5$.

Ответ: 5.

В6. $BC = CD$ как стороны ромба (см. рис. 72), поэтому $\angle BDC = \angle DBC = 68^\circ$. $\angle A = \angle C = 180^\circ - (68^\circ + 68^\circ) = 44^\circ$.

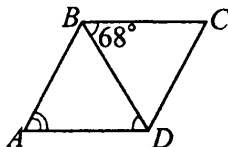


Рис. 72.

Ответ: 44.

В7. $4^{2+\log_4 7} = 4^2 \cdot 4^{\log_4 7} = 16 \cdot 7 = 112$.

Ответ: 112.

В8. Так как прямая $y = 3x - 10$ параллельна касательной к графику функции $y(x)$, то их угловые коэффициенты совпадают. Иными словами, $y'(x) = 3$, где $y(x) = x^2 + 5x - 7$. Тогда $2x + 5 = 3$; $2x = -2$; $x = -1$.

Ответ: -1.

В9. $B_1D^2 = AB^2 + AD^2 + CC_1^2 = 12^2 + 20^2 + 16^2 = 800$ (см. рис. 73).
 $BD = 20\sqrt{2}$. $B_1C_1 \perp CD_1D_1 \Rightarrow B_1C_1 \perp C_1D$. Из прямоугольного $\triangle B_1C_1D$ имеем $\sin \angle B_1DC_1 = \frac{B_1C_1}{B_1D} = \frac{20}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\angle B_1DC_1 = 45^\circ$.

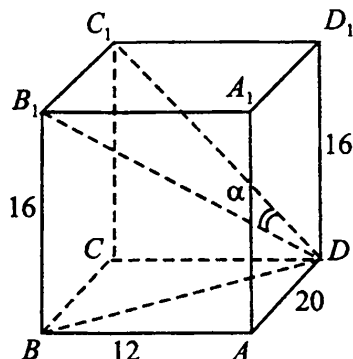


Рис. 73.

Ответ: 45.

В10. Вероятность того, что Артём взял наудачу 1 упаковку йогурта с клубничной или банановой начинкой, равна отношению

$$\frac{21 + 15}{96} = \frac{36}{96} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Ответ: 0,375.

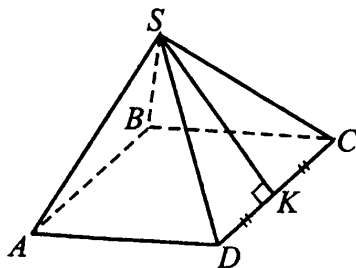


Рис. 74.

В11. $S_{\text{пов.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$ (см. рис. 74).

$$S_{\text{осн.}} = S_{ABCD} = 6^2 = 36, S_{\text{бок.}} = 4S_{SDC} = 2 \cdot DC \cdot SK.$$

$$SK = \sqrt{SD^2 - \left(\frac{DC}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4. S_{\text{бок.}} = 2 \cdot 6 \cdot 4 = 48.$$

$$S_{\text{пов.}} = 48 + 36 = 84.$$

Ответ: 84.

В12. Найдём, под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решётке с периодом, не превосходящим 3000 нм.

$$d \cdot \sin \varphi = k\lambda,$$

$$d = \frac{k\lambda}{\sin \varphi}, \quad k = 3, \lambda = 500, \quad d \leq 3000.$$

$\frac{3 \cdot 500}{\sin \varphi} \leq 3000, \quad \frac{1}{\sin \varphi} \leq 2, \quad \sin \varphi \geq \frac{1}{2}$, следовательно, $\varphi = 30^\circ$ — минимальный угол.

Ответ: 30.

В13. Обозначим скорость первого велосипедиста через v (км/ч). Тогда скорость второго велосипедиста равна $(v + 10)$ км/ч, а на всю дорогу они

потратили $\frac{60}{v}$ и $\frac{60}{v + 10}$ часов соответственно. Получаем уравнение:

$$\frac{60}{v} = \frac{60}{v + 10} + 0,5 + 0,5; \quad 60v + 600 = 60v + v^2 + 10v; \quad v^2 + 10v - 600 = 0;$$

$v_1 = 20$ и $v_2 = -30$. Так как скорость положительна, то $v = 20$.

Ответ: 20.

В14. $y' = 2 \cos x - 8$. Так как $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Значит, наименьшее значение $y(0) = 2 \cdot \sin 0 - 8 \cdot 0 + 3 = 3$.

Ответ: 3.

С1. а) ОДЗ: $\sin 2x \neq 0, \quad 2x \neq \pi k, \quad x \neq \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$,

$$\sin 4x + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \cos 4x = \cos 2x,$$

$$\sin 4x \sin 2x + \cos 2x \cos 4x = \cos 2x \sin 2x,$$

$$\cos 4x \cos 2x + \sin 4x \sin 2x = \cos 2x \sin 2x,$$

$$\cos(4x - 2x) = \cos 2x \sin 2x, \quad \cos 2x(1 - \sin 2x) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ 1 - \sin 2x = 0; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

б) Выберем из полученной серии корни, принадлежащие промежутку $(-\pi; \frac{\pi}{2})$:

$$-\pi < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < \frac{\pi}{2};$$

$$-\frac{5}{2} < n < \frac{1}{2}, -2,5 < n < 0,5, n = -2; -1; 0.$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}; \quad x_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$.

С2. Пусть a — прямая, о которой говорится в условии, точка M — середина стороны AB . По условию прямая a параллельна прямой CM_1 (см. рис. 75).

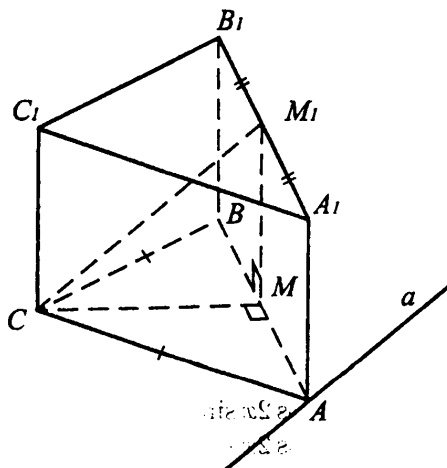


Рис. 75.

Так как призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, то $CC_1 \perp ABC$. Так как прямая AM лежит в плоскости ABC , то $AM \perp CC_1$.

$CM \perp AM$ как медиана равнобедренного треугольника ABC . Кроме того, $AM \perp CC_1$. Значит, $AM \perp MM_1C$, и, следовательно, $AM \perp CM_1$. Но $CM_1 \parallel a$, поэтому $AM \perp a$.

Так как $AM \perp MM_1C$, $AM \perp a$ и $a \parallel MM_1C$, то AM — искомое расстояние между прямыми a и CC_1 . Значит, $AM = \frac{1}{2}AB = 5$.

Ответ: 5.

С3. Решим каждое неравенство по отдельности.

$$1) \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 2 + \sqrt{4 - x^2} \neq 0, \\ 2 - \sqrt{4 - x^2} \neq 0, \\ 4 - x^2 \geq 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$$\frac{2}{2 + \sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{2 - \sqrt{4 - x^2}} > \frac{1}{x};$$

$$\frac{2(2 - \sqrt{4 - x^2}) + 2 + \sqrt{4 - x^2}}{(2 - \sqrt{4 - x^2})(2 + \sqrt{4 - x^2})} > \frac{1}{x}; \quad \frac{6 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2} > \frac{x}{x^2};$$

$$6 - \sqrt{4 - x^2} > x; \quad 6 - x > \sqrt{4 - x^2};$$

$$\begin{cases} 6 - x \geq 0, \\ (6 - x)^2 \geq 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6, \\ 2x^2 - 12x + 32 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6, \\ x^2 - 6x + 16 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 6.$$

Учитывая ОДЗ, получим $x \in [-2; 0) \cup (0; 2]$.

$$2) 4x \log_5 x \geq (x^2 + 3) \log_5 x; \quad (x^2 - 4x + 3) \log_5 x \leq 0, \\ (x - 3)(x - 1) \log_5 x \leq 0, \quad x \in (0; 3].$$

Учитывая решение первого неравенства, запишем ответ $x \in (0; 2]$.

Ответ: $(0; 2]$.

С4. Пусть A — центр окружности радиуса 4, B — центр окружности радиуса 8, K и M — соответственно точки касания общей касательной KM с этими окружностями. Возможны 2 случая.

1) Отрезки KM и AB не пересекаются (см. рис. 76).

Опустим из точки A перпендикуляр AH на BM . Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $AK \perp KM$ и $BM \perp KM \Rightarrow AKMH$ — прямоугольник, то есть $AH = KM = 5$, $MH = AK = 4$.

Из $\triangle ABH$ по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{AH^2 + (BM - MH)^2} = \sqrt{5^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{41}.$$

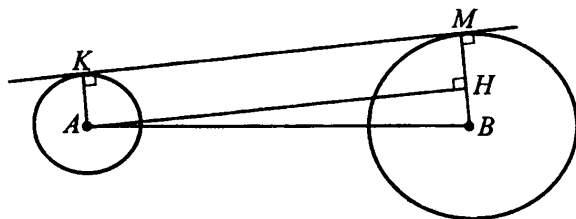


Рис. 76.

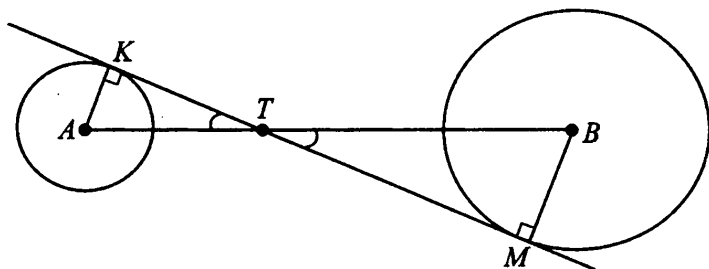


Рис. 77.

2) Отрезок KM и AB пересекаются, $KM \cap AB = T$ (см. рис. 77).

$\triangle AKT \sim \triangle BMT$ по первому признаку ($\angle AKT = \angle BMT = 90^\circ$, $\angle ATK = \angle BTM$ как вертикальные).

$$\frac{AT}{BT} = \frac{KT}{TM} = \frac{AK}{BM} = \frac{4}{8};$$

$$AB = 3AT, \quad KT = \frac{KM}{3} = \frac{5}{3}.$$

Из $\triangle AKT$ по теореме Пифагора:

$$AT^2 = AK^2 + KT^2, \quad AB = 3\sqrt{AK^2 + KT^2} = 3\sqrt{4^2 + \frac{25}{9}} = \sqrt{169} = 13.$$

Ответ: $\sqrt{41}$, 13.

С5. $|\sqrt{x+12} - 2| = ax - 1,5 + 24a$. Пусть $f(x) = |\sqrt{x+12} - 2|$, $g(x) = ax - 1,5 + 24a$. Построим графики этих функций (см. рис. 78 на с. 80), учитывая, что график функции $y = g(x)$ — это прямая, проходящая через точку $\left(-24; -\frac{3}{2}\right)$, так как $ax - 1,5 + 24a = a(x + 24) - 1,5$.

Из рисунка видно, что графики имеют ровно 3 точки пересечения, когда $a \in (a_1, a_2)$.

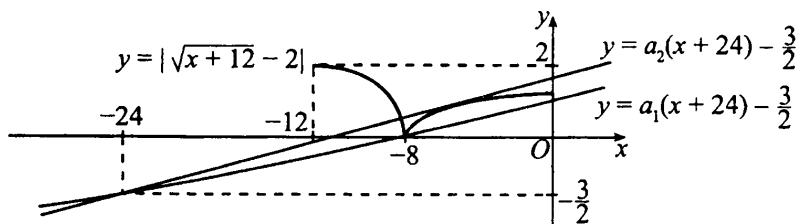


Рис. 78.

Найдём a_1 из условия, что график $y = a_1(x + 24) - \frac{3}{2}$ проходит через точку $(-8; 0)$. В этом случае $16a_1 - \frac{3}{2} = 0$, $a_1 = \frac{3}{32}$.

Найдём a_2 из условия, что $y = a_2(x + 24) - \frac{3}{2}$ касается графика $y = \sqrt{x + 12} - 2$.

$$\text{Получим } \begin{cases} \sqrt{x + 12} - 2 = a_2(x + 24) - \frac{3}{2}, \\ (\sqrt{x + 12} - 2)' = (a_2(x + 24) - \frac{3}{2})'; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x + 12} - 2 = a_2(x + 24) - \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{2\sqrt{x + 12}} = a_2. \end{cases}$$

Тогда $\sqrt{x + 12} = \frac{1}{2a_2}$; $(x + 24) = \frac{1}{4a_1^2} + 12$, откуда

$$\frac{1}{2a_2} - \frac{1}{2} = a_2 \left(\frac{1}{4a_2^2} + 12 \right), \quad 12a_2 - \frac{1}{4a_2} + \frac{1}{2} = 0, \quad 48a_2^2 + 2a_2 - 1 = 0,$$

$$a_2 = \frac{-1 \pm 7}{48}. \text{ Учитывая, что } a_2 > 0 \text{ (исходя из графика), } a_2 = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{32}; \frac{1}{8} \right)$.

С6. а) Найдём, сколькими способами можно выбрать 3 отрезка из 8. По определению это число $C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$. Так как $60 > 56$, очевидно, нельзя построить 60 различных треугольников.

б) Пусть длины отрезков равны 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Треугольник со сторонами 6, 7, 13 не существует. Однако если выбрать любую другую

тройку, то из неё можно будет составить треугольник, так как выполняется неравенство треугольника (большая сторона меньше суммы двух других), потому что длина наибольшего отрезка не превышает 13, а сумма двух других не меньше 13, при этом эти сумма и длина наибольшего отрезка не могут равняться 13 одновременно. Всего тройку отрезков можно выбрать 56 способами, и только одна тройка не образует треугольник. То есть всего $56 - 1 = 55$ треугольников.

в) Предположим, что $n = 0$, а длины отрезков равны $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ и d_7, d_8 , при этом $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4 \leq d_5 \leq d_6 \leq d_7 \leq d_8$. Заметим, что $d_1 \geq 1, d_2 \geq 1$. Тогда $d_3 \geq d_1 + d_2 \geq 2$ (т.к. отрезки с длинами d_1, d_2, d_3 не образуют треугольник). Аналогично $d_4 \geq d_3 + d_2 \geq 3, d_5 \geq d_4 + d_3 \geq 5, d_6 \geq d_5 + d_4 \geq 8, d_7 \geq d_6 + d_5 \geq 13, d_8 \geq d_7 + d_6 \geq 21$, а это противоречит тому, что длины всех отрезков не превосходят 20. Значит, $n \neq 0$, а потому $n \geq 1$. Покажем, что $n = 1$. Для этого приведём пример длин отрезков, из которых можно составить ровно 1 треугольник. При этом каждая из длин не превышает 12. Пусть $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = 2, d_4 = 3, d_5 = 5, d_6 = 8, d_7 = 13, d_8 = 20$. Выберем 3 числа из этого набора. Если большее из выбранных чисел не превышает 13, то треугольник составить нельзя, так как сумма двух меньших длин не больше длины большего отрезка. Если большая сторона равна 20, то единственный треугольник можно составить со сторонами 8, 13, 20.

Ответ: а) нет; б) да; в) 1.

Решение варианта 11

В1. Стаканчик жареных семечек стоит $5 \cdot 1,6 = 8$ рублей. Тогда на 100 рублей можно купить $100 : 8 = \frac{100}{8} = 12\frac{4}{8}$, то есть 12 стаканов.

Ответ: 12.

В2. По графику определяем, что на выходных наибольшая температура была 8° , а наименьшая — 3° . Значит, разность наибольшей и наименьшей температур равна 5° .

Ответ: 5.

В3. У точек, которые симметричны относительно начала координат, соответствующие координаты противоположны. Ордината точки А равна 7, ордината симметричной точки -7 .

Ответ: -7 .

В4. Поставка А: $50 \cdot 2300 + 4500 = 119\,500$ (руб.).

Поставка Б: $50 \cdot 2250 = 112\,500$ (руб.).

Поставка В: $50 \cdot 2350 + 3700 = 121\,200$ (руб.).

Самая дешёвая поставка обойдётся в 112 500 рублей.

Ответ: 112 500.

В5. $\sqrt{57 - 3x} = 3$, $57 - 3x = 9$, $3x = 48$, $x = 16$.

Ответ: 16.

В6. Угол ABD вписанный, значит, $\angle ABD = \frac{1}{2} \textcircled{AD}$.

$\textcircled{AD} = \textcircled{ADC} - \textcircled{DC}$. На дуги ADC и DC опираются вписанные углы ABC и CAD соответственно.

$\textcircled{ADC} = 2\angle ABC = 220^\circ$, $\textcircled{DC} = 2\angle CAD = 130^\circ$, $\textcircled{AD} = 220^\circ - 130^\circ = 90^\circ$, $\angle ABD = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$.

Ответ: 45.

В7. $\frac{73}{\sin^2 64^\circ + \sin^2 26^\circ} = \frac{73}{\sin^2 64^\circ + \cos^2 64^\circ} = \frac{73}{1} = 73$.

Ответ: 73.

В8. $V(t) = S'(t) = 2t^2 - 8t + 6$. $V = 198$ м/с, $2t^2 - 8t + 6 = 198$, $t^2 - 4t - 96 = 0$, $t_1 = 12$, $t_2 = -8$, $t > 0$, поэтому $t = 12$ с.

Ответ: 12.

В9. Диагональ куба $d = a\sqrt{3}$, где a — сторона куба. $2\sqrt{3} = a\sqrt{3}$, $a = 2$.

Ответ: 2.

В10. В пятой группе $(25 - 7 - 6) : 3 = 4$ (человека). Вероятность того, что Пончиков попадёт в пятую группу, равна $4 : 25 = 0,16$.

Ответ: 0,16.

В11. По теореме Пифагора найдём гипотенузу основания призмы, которая также является диаметром цилиндра: $d = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Тогда

$V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 13^2 \cdot \frac{4}{\pi} = 169$, где r — радиус основания цилиндра, h — его высота, также являющаяся боковым ребром призмы.

Ответ: 169.

В12. По условию $F_{\text{л}} \geq 25 \cdot 10^{-9} \text{ Н}$, то есть $qvB \sin \alpha \geq 25 \cdot 10^{-9}$, $\sin \alpha \geq \frac{25 \cdot 10^{-9}}{qvB}$, $\sin \alpha \geq \frac{25 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}$; $\sin \alpha \geq 0,5$.

Наименьшее значение $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ равно 30° .

Ответ: 30.

В13. Пусть x км — расстояние от пункта A до пункта B .

Скорость автомобилиста равна $60 \cdot 2 = 120$ (км/ч). Время, затраченное

мотоциклистом на прохождение полпути, равно $\frac{x}{60 \cdot 2} = \frac{x}{120}$ (ч), а автомобилем — $\frac{x}{2 \cdot 120} = \frac{x}{240}$ (ч). По условию, автомобилист выехал из пункта B на 1 час позже, чем мотоциклист из пункта A . Составим уравнение:

$$\frac{x}{240} + 1 = \frac{x}{120}; \quad \frac{x}{120} - \frac{x}{240} = 1; \quad 2x - x = 240; \quad x = 240.$$

Ответ: 240.

В14. $y' = \left(5 \cos x - \frac{24}{\pi}x + 3\right)' = -5 \sin x - \frac{24}{\pi}$. Так как $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$. Наибольшим является значение

$$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 5 \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{24}{\pi} \cdot \left(-\frac{2\pi}{3}\right) + 3 = 16,5.$$

Ответ: 16,5.

$$\text{С1. а) } \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x + 125 = 125,$$

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 4 \cos^2 x,$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 4 \cos^2 x,$$

$$(\sin x - \cos x - 2 \cos x)(\sin x - \cos x + 2 \cos x) = 0,$$

$$(\sin x - 3 \cos x)(\sin x + \cos x) = 0,$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 0, \\ \sin x - 3 \cos x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) Из двух серий выберем те корни, которые принадлежат промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$:

$$x = \operatorname{arctg} 3.$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} 3 + \pi k; n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\operatorname{arctg} 3$.

С2. $ABC \parallel A_1B_1C_1$, поэтому угол между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ADC_1 равен углу между плоскостями ABC и ADC_1 . Так как $CC_1 \perp ABCD$ и $CD \perp AD$, то $C_1D \perp AD$ (по теореме о трёх перпендикулярах). Поэтому искомый угол равен углу C_1DC (см. рис. 79 на с. 84).

По условию $AC_1 = 2\sqrt{5}$; $AB = BC = 2$. Так как $AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2$, то $20 = 4 + 4 + CC_1^2$; $CC_1^2 = 12$; $CC_1 = 2\sqrt{3}$.

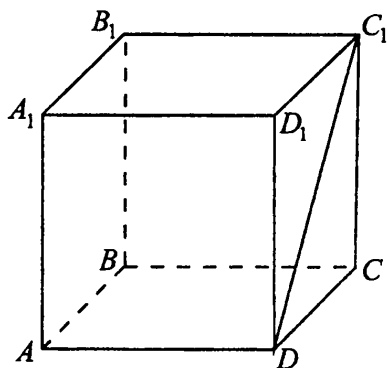


Рис. 79.

Из $\triangle DC_1C$ имеем: $\operatorname{tg} \angle C_1DC = \frac{CC_1}{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Отсюда $\angle C_1DC = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

С3. Решим отдельно первое неравенство системы $\log_{3x} x \geq \log_x \frac{3}{x} + 2$.

1) ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 3x \neq 1, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq \frac{1}{3}. \end{cases}$

$$\log_{3x} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 3x} = \frac{\log_3 x}{1 + \log_3 x};$$

$$\log_x \frac{3}{x} = \log_x 3 - \log_x x = \log_x 3 - 1 = \frac{1}{\log_3 x} - 1 = \frac{1 - \log_3 x}{\log_3 x}.$$

Сделаем замену $t = \log_3 x$, тогда $\frac{t}{1+t} \geq \frac{1-t}{t} + 2$, $\frac{t}{1+t} \geq \frac{1+t}{t}$;

$$\frac{t^2}{(1+t)t} \geq \frac{(1+t)(1+t)}{t(1+t)}; \frac{2t+1}{t(t+1)} \leq 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов (см. рис. 80), получим

$$t \in (-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right).$$

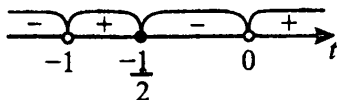


Рис. 80.

Вернёмся к исходной переменной. Если $t < -1$, то $\log_3 x < -1$;
 $0 < x < \frac{1}{3}$.

Если $-\frac{1}{2} \leq \log_3 x < 0$, то $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x < 1$. Значит, $x \in (0; \frac{1}{3}) \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}; 1)$.

2) Решим второе неравенство системы, сделав замену $u = 5^x$,
 $u^2 - \frac{26}{5}u + 1 \leq 0$, $(u - \frac{1}{5})(u - 5) \leq 0$, $\frac{1}{5} \leq u \leq 5$, $\frac{1}{5} \leq 5^x \leq 5$,
 $x \in [-1; 1]$.

Учитывая решение первого неравенства, запишем ответ

$$x \in (0; \frac{1}{3}) \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}; 1).$$

Ответ: $(0; \frac{1}{3}) \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}; 1)$.

С4. Возможно два существенно различных случая:

1) Центр искомой окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку KM (см. рис. 81), так как $OK = 10 + x$, $OM = 10 + x$, $OL = 10 - x$.

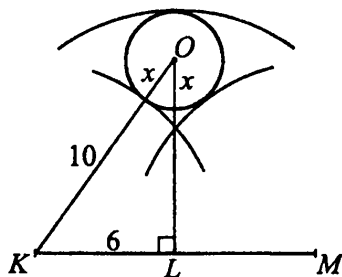


Рис. 81.

Пусть x — искомый радиус. Тогда по теореме Пифагора $OK^2 = OL^2 + KL^2$; $(10 + x)^2 = (10 - x)^2 + 6^2$; $x = 0,9$.

2) Центр искомой окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку LM (см. рис. 82 на с. 86), так как $OL = 10 - x$, $OM = 10 - x$. Тогда $OL = OM = 10 - x$, где x — искомый радиус.

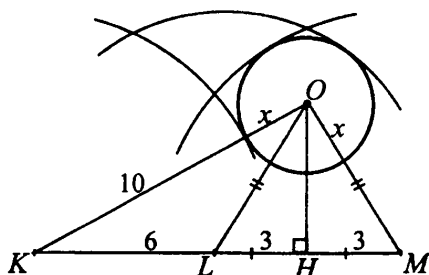


Рис. 82.

По теореме Пифагора $OH^2 = OK^2 - KH^2 = OM^2 - HM^2$;
 $(10+x)^2 - 9^2 = (10-x)^2 - 3^2$; $x = 1,8$.

Ответ: 0,9 или 1,8.

С5. $4y^2 + 12x - x^2 - 36 = 0$; $4y^2 - (x^2 - 12x + 36) = 0$; $4y^2 - (x-6)^2 = 0$;

$$\begin{cases} 2y = x - 6, \\ 2y = -x + 6; \end{cases} \begin{cases} y = 0,5x - 3, \\ y = -0,5x + 3. \end{cases}$$

График этих уравнений — две прямые, проходящие через точку $(6; 0)$.

$$y = \sqrt{10x - x^2 - 16} + a; y - a = \sqrt{10x - x^2 - 16},$$

$$\begin{cases} (y-a)^2 = -(x^2 - 10x + 25) + 9, \\ y - a \geq 0, \end{cases} \begin{cases} (y-a)^2 + (x-5)^2 = 9, \\ y \geq a. \end{cases}$$

Графиком второго уравнения системы является верхняя половина окружности с центром $(5; a)$ и радиусом 3.

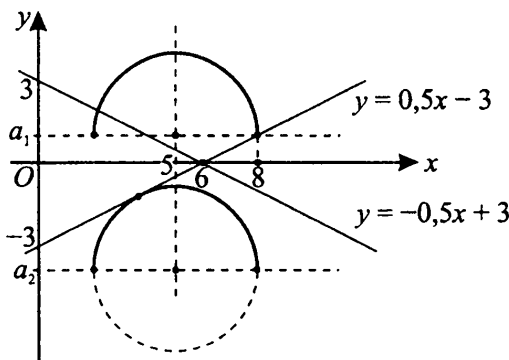


Рис. 83.

По рисунку 83 видно, что более двух решений система будет иметь при $a \in (a_2; a_1]$.

Найдём a_1 . $y = 0,5x - 3$ проходит через точку $(8; a_1)$. $a_1 = 0,5 \cdot 8 - 3 = 1$.

Найдём a_2 . Прямая $y = 0,5x - 3$ касается окружности, то есть они имеют 1 общую точку.

$$\begin{cases} (y - a)^2 + (x - 5)^2 = 9, \\ y = 0,5x - 3, \\ y \geq a; \end{cases}$$

$$(0,5x - 3 - a)^2 + x^2 - 10x + 25 = 9,$$

$$\frac{1}{4}x^2 - x(3 + a) + (3 + a)^2 + x^2 - 10x + 16 = 0,$$

$$\frac{5}{4}x^2 - x(13 + a) + 16 + a^2 + 6a + 9 = 0,$$

$$\frac{5}{4}x^2 - x(13 + a) + a^2 + 6a + 25 = 0.$$

Единственное решение это уравнение имеет, если $D = 0$;

$$(13 + a)^2 - 5(a^2 + 6a + 25) = 0,$$

$$-4a^2 - 4a + 44 = 0,$$

$$a^2 + a - 11 = 0,$$

$$a = \frac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{2}. \text{ Из рисунка 83 видно, что } a_2 < 0, \text{ поэтому}$$

$$a_2 = \frac{-1 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Получили ответ: } a \in \left(\frac{-1 - 3\sqrt{5}}{2}; 1 \right].$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-1 - 3\sqrt{5}}{2}; 1 \right].$$

С6. а) Так как n делится на 60, n делится на 3, следовательно, сумма цифр числа n делится на 3, а потому не меньше 3. Приведём пример числа, сумма цифр которого равна 3 : 1 00 ... 0 200. Это число делится на 100 и на 3,

1999 нулей

значит, делится на 300, а следовательно, делится и на 60.

б) Число n^2 делится на 45^2 , а значит, делится и на 9, поэтому сумма цифр числа n^2 делится на 9, а потому и не меньше 9. Приведём пример числа n такого, что сумма цифр n^2 равна 9. Пусть $n = 18$ 00 ... 0, тогда

2011 нулей

$$n^2 = 324$$

4022 нуля

в) Определим, какие остатки при делении на 7 даёт число 10^k , $k \in \mathbb{N}$: 10^1 даёт остаток 3, $10^2 = 2$, $10^3 = 6$, $10^4 = 4$, $10^5 = 5$, $10^6 = 1$.

Отсюда $10^{6k+\beta} = 10^{6k} \cdot 10^\beta$ даёт при делении на 7 такой же остаток, как 10^β . Наименьшее 2013-значное число 10^{2012} является единственным 2013-значным числом, сумма цифр которого равна 1. Это число на 7 не делится и при делении на 7 даёт остаток 2 ($2012 = 6 \cdot 335 + 2$). При этом $10^{2012} + 10^5$ делится очевидно на 7. Сумма цифр этого числа равна 2.

Ответ: а) 3; б) 9; в) 2.

Решение варианта 12

В1. На две недели потребуется $17 \cdot 14 = 238$ пакетиков, то есть $238 : 25 = 9,52$ упаковок. Необходимо купить 10 упаковок чая.

Ответ: 10.

В2. Проводим прямую, перпендикулярную оси температур, через точку $T = 5^\circ\text{C}$. Из рисунка видно, что только 4 столбика диаграммы её не пересекают.

Ответ: 4.

В3. Чтобы найти абсциссу вектора, нужно из абсциссы конца вектора вычесть абсциссу начала. Найдём абсциссу точки B из уравнения $5 = x - (-3)$; $x = 2$.

Ответ: 2.

В4. Поставка А: $80 \cdot 2\,450 + 8\,000 = 204\,000$ (руб).

Поставка Б: $80 \cdot 2\,600 = 208\,000$ (руб).

Поставка В: $80 \cdot 2\,400 + 8\,500 = 200\,500$ (руб). Самая дешёвая покупка обойдётся в 200 500 рублей.

Ответ: 200 500.

В5. ОДЗ: $x \neq -\frac{4}{3}$.

$$-x = \frac{x+6}{-3x-4}; \quad 3x^2 + 4x = x + 6; \quad 3x^2 + 3x - 6 = 0; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -2.$$

Наименьший корень уравнения равен -2 .

Ответ: -2 .

В6. Трапеция описана около окружности, поэтому суммы противоположных сторон равны, $BC + AD = AB + CD = P : 2 = 86 : 2 = 43$ (см. рис. 84). Большая боковая сторона $CD = 27$, тогда $AB = 43 - 27 = 16$. $AB = MH = 2r$, $r = 16 : 2 = 8$.

Ответ: 8.

В11. Пусть a — сторона куба. Тогда по теореме Пифагора $a^2 + a^2 = (3\sqrt{2})^2$. Следовательно, $a = 3$. Тогда $V = a^3 = 27$.

Ответ: 27.

В12. По условию $\varepsilon_i \leq 375 \cdot 10^{-6} B$, $\varepsilon_i = aS \cos \alpha$, α — острый.
 $aS \cos \alpha \leq 375 \cdot 10^{-6}$, $25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,3 \cdot \cos \alpha \leq 375 \cdot 10^{-6}$, $\cos \alpha \leq 0,5$.
Наименьший угол равен 60° .

Ответ: 60.

В13. Половину пути (20 км) велосипедист проехал до выезда мотоциклиста, а ещё 10 км за $\frac{1}{4}$ часа, тогда мотоциклист до встречи с велосипедистом находился в пути $\frac{1}{4}$ часа и проехал 30 км. Значит, его скорость равна $30 : \frac{1}{4} = 120$ км/ч, тогда скорость сближения — $120 - 40 = 80$ км/ч.

Ответ: 80.

В14. $y' = -6 \sin x + 3\sqrt{3}$; $y' = 0$; $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит только $x = \frac{\pi}{3}$. Из чисел $y(0) = 14 - \pi\sqrt{3}$,

$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 11$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 + \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ наибольшим является 11.

Ответ: 11.

С1. а) $5 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$. Если $\cos x = 0$, то равенство неверно. Делим на $\cos x$.

$5 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$. Пусть $\operatorname{tg} x = t$.

$5t^2 - 2t - 3 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = -\frac{3}{5}$.

$\operatorname{tg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{5}$; $x = -\arctg 0,6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

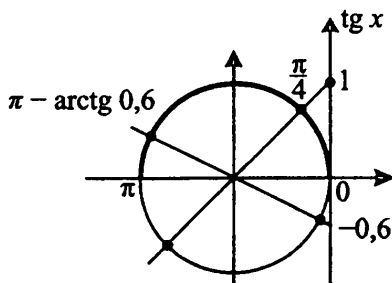


Рис. 86.

б) Выберем корни, принадлежащие указанному промежутку (см. рис. 86). Из первой серии $x = \frac{\pi}{4}$; из второй $x = -\arctg 0,6 + \pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\arctg 0,6 + \pi n, n \in \mathbb{Z};$

б) $\frac{\pi}{4}; -\arctg 0,6 + \pi.$

С2. Так как $DD_1 \perp A_1B_1C_1D_1$ и $D_1C_1 \perp B_1C_1$, то $DC_1 \perp B_1C_1$ (по теореме о трёх перпендикулярах). Поэтому искомый угол равен углу DC_1D_1 (см. рис. 87).

По условию $B_1D = \sqrt{21}$. Из $\triangle B_1DC_1$ по теореме Пифагора:
 $DC_1^2 = B_1D^2 - B_1C_1^2 = 21 - 3^2 = 12$.
 $DC_1 = 2\sqrt{3}$.

Из $\triangle DC_1D_1$: $\cos \angle DC_1D_1 = \frac{C_1D_1}{C_1D}$;
 $\cos \angle DC_1D_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\angle DC_1D_1 = \frac{\pi}{6}$.

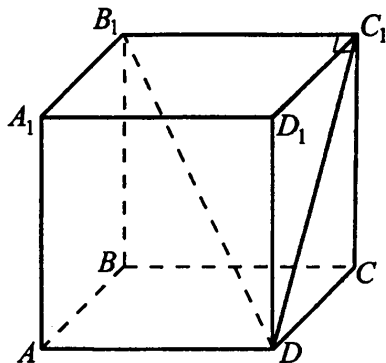


Рис. 87.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

С3. Решим каждое неравенство системы по отдельности.

$$1) \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x+2 > 0, \\ 7-3x > 0; \end{cases} \begin{cases} x > -2, \\ x < \frac{7}{3}; \end{cases} \quad -2 < x < \frac{7}{3}.$$

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{7-3x}{x+2} + 2\log_2(x+2) > 2,$$

$$2\log_2\left(\frac{7-3x}{x+2}\right) + 2\log_2(x+2) > 2, \quad \log_2(7-3x) > 1, \quad 7-3x > 2,$$

$$3x < 5, \quad x < \frac{5}{3}.$$

$$\text{С учётом ОДЗ: } \left(-2; \frac{5}{3}\right).$$

$$2) \frac{1}{\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} > 1,$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 10. \end{cases}$$

$$\frac{1-\lg x + \lg x}{\lg x(1-\lg x)} > 1, \quad \frac{1}{\lg x(1-\lg x)} > 1, \quad \frac{1}{\lg x(1-\lg x)} - 1 > 0,$$

$$\frac{1-\lg x(1-\lg x)}{\lg x(1-\lg x)} > 0.$$

Пусть $\lg x = t$, $\frac{1-t+t^2}{t(1-t)} > 0$. Так как выражение в числителе положительно при любых значениях t , то решением неравенства является $0 < t < 1$; $0 < \lg x < 1$; $1 < x < 10$.

3) Пересекая найденные по отдельности решения неравенств исходной системы (см. рис. 88), получаем ответ $x \in \left(1; \frac{5}{3}\right)$.

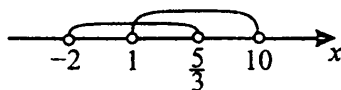


Рис. 88.

$$\text{Ответ: } \left(1; \frac{5}{3}\right).$$

С4. Возможно два существенно различных случая:

1) Центр искомой окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку KM (см. рис. 89).

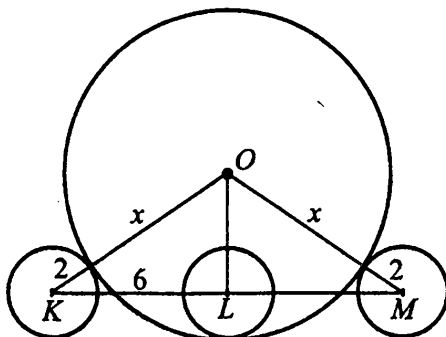


Рис. 89.

Пусть x — искомый радиус. Тогда по теореме Пифагора $OK^2 = KL^2 + OL^2$; $(x+2)^2 = 6^2 + (x-2)^2$; $x = 4,5$.

2) Центр искомой окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку LM (см. рис. 90).

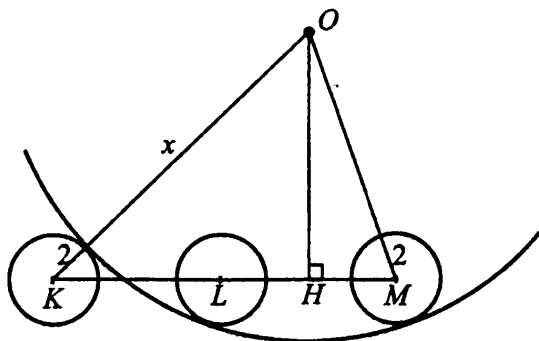


Рис. 90.

По теореме Пифагора $OH^2 = OK^2 - KH^2 = OM^2 - HM^2$; $(x+2)^2 - 9^2 = (x-2)^2 - 3^2$; $x = 9$.

Ответ: 4,5 или 9.

С5. $y^2 = x^2 - 6x + 9$; $y^2 = (x-3)^2$;

$$\begin{cases} y = x - 3, \\ y = -x + 3. \end{cases}$$

График этих уравнений — две прямые, проходящие через точку $(3; 0)$.

$$y - a = \sqrt{2x - x^2 + 15},$$

$$\begin{cases} (y-a)^2 + x^2 - 2x + 1 - 16 = 0, \\ y-a \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (y-a)^2 + (x-1)^2 = 16, \\ y \geq a. \end{cases}$$

Графиком второго уравнения системы является верхняя половина окружности с центром $(1; a)$ и радиусом 4.

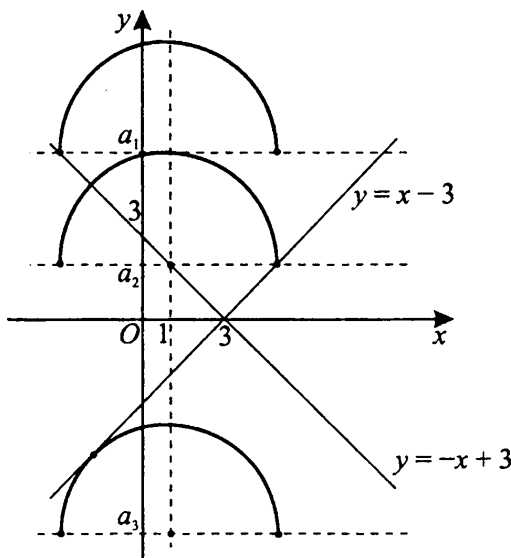


Рис. 91.

Ровно одно решение будет, если $a \in (a_2; a_1] \cup \{a_3\}$ (см. рис. 91).

1) Найдём a_1 . Прямая $y = -x + 3$ проходит через точку $(-3; a_1)$. $a_1 = 3 + 3, a_1 = 6$.

2) Найдём a_2 . Прямая $y = x - 3$ проходит через точку $(5; a_2)$. $a_2 = 5 - 3, a_2 = 2$.

3) Прямая $y = x - 3$ касается окружности, то есть они имеют 1 общую точку.

$$\begin{cases} y = x - 3, \\ (y-a)^2 + (x-1)^2 = 16, \end{cases}$$

$$y^2 - 2ay + a^2 + x^2 - 2x - 15 = 0,$$

$$(x-3)^2 - 2a(x-3) + a^2 + x^2 - 2x - 15 = 0,$$

$$2x^2 - 8x - 2ax + 9 + 6a + a^2 - 15 = 0,$$

$$2x^2 - 2x(a+4) + a^2 + 6a - 6 = 0,$$

$$x^2 - x(a+4) + \frac{a^2 + 6a - 6}{2} = 0.$$

Единственное решение это уравнение имеет, если $D = 0$;

$$(a+4)^2 - 2(a^2 + 6a - 6) = 0,$$

$$a^2 + 8a + 16 - 2a^2 - 12a + 12 = 0,$$

$$-a^2 - 4a + 28 = 0,$$

$$a^2 + 4a - 28 = 0,$$

$a_3 = -2 \pm \sqrt{4+28} = -2 \pm 4\sqrt{2}$. Из рисунка 91 видно, что $a_3 < 0$, поэтому $a_3 = -2 - 4\sqrt{2}$.

Получили ответ: $a \in (2; 6] \cup \{-2 - 4\sqrt{2}\}$.

Ответ: $(2; 6] \cup \{-2 - 4\sqrt{2}\}$.

С6. а) Заметим, что n^2 делится на 50 тогда и только тогда, когда n делится на 10. В свою очередь n делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра равна 0. При этом первые 1000 цифр могут быть любыми. Их сумма максимальна, когда все они равны 9. Сумма цифр числа n в этом случае равна $9 \cdot 1000 = 9000$.

б) Если n делится на 120, то n делится на 10, значит, последняя цифра числа n равна 0, при этом $\frac{n}{10}$ делится на 12, а потому делится на 4. Значит,

число, составленное из последних двух цифр числа $\frac{n}{10}$, делится на 4, то есть последние две цифры могут образовывать числа 96, 92, 88, 84, 80, 76, 72 и т.д. Сумма этих цифр не больше 16 и равна 16 только в том случае, когда эти две цифры образуют число 88. Сумма цифр числа n не больше чем $998 \cdot 9 + 16$, при этом она равна $9989 + 16$ только, если число n имеет вид $\underbrace{99 \dots 9}_{998} 880$, однако это число не делится на 3, а значит, не делится на 120.

Приведём пример числа n , сумма цифр которого равна $998 \cdot 9 + 15 = 8997$, при этом n делится на 120: $n = \underbrace{99 \dots 9}_{998} 960$.

в) Сумма цифр 1001-значного числа не превышает $9 \cdot 1001 = 9009$. Если сумма цифр равна 9009, то

$$n = \underbrace{99 \dots 999}_{1001 \text{ цифра}} = \underbrace{99999 \dots 90}_{1001 \text{ цифра}} + 9 = 11 \cdot (\underbrace{909090 \dots 90}_{1000 \text{ цифр}}) \cdot 10 + 9, \text{ таким образом}$$

n не делится нацело на 11, давая при делении на 11 остаток 9.

Если сумма цифр числа n равна 9008, то n состоит из «девяток» и одной «восьмёрки»: $n = 99 \dots 989 \dots 9$, то есть $n = \underbrace{99 \dots 9}_{1001 \text{ цифра}} - 10^k$, где

$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 1000$. Найдём, какие остатки даёт число 10^k при делении на 11: 10^1 даёт 10, $10^2 - 1$ и т.д. Откуда $10^{2k+1} = (10^2)^k \cdot 10$ даёт при делении на 11 остаток 10, а $10^{2k} = (10^2)^k$ даёт остаток 1. То-

гда $n = 99 \dots 9 - 10^k$ при делении на 11 даёт такой же остаток, как $9 - 10$ или $9 - 1$, а значит, n не делится на 11 нацело, откуда сумма цифр числа n не превышает 9007. При том эта сумма равна 9007, если n «составлено» из 1000 «девяток» и одной «семёрки» или из 999 «девяток» и двух «восьмёрок». Приведём пример такого n , которое делится на 11:

$$n = \underbrace{99 \dots 9}_{999 \text{ цифр}} 79 = \underbrace{99 \dots 9}_{998 \text{ цифр}} \cdot 1000 + 979 = 11 \cdot \underbrace{(9090 \dots 90)}_{998 \text{ цифр}} \cdot 1000 + 11 \cdot 89.$$

Ответ: а) 9000; б) 8997; в) 9007.

Решение варианта 13

В1. За сентябрь потрачено электроэнергии $11\,525 - 11\,345 = 180$ (кВт/ч). За сентябрь нужно заплатить $180 \cdot 2,20 = 396$ (руб.).

Ответ: 396.

В2. Так как покупать выгоднее по наименьшей цене, то нужно найти по графику точку наименьшего значения в период с 1 по 30 ноября. Это 2-е ноября.

Ответ: 2.

В3. Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат — $x^2 + y^2 = R^2$. Окружность проходит через точку $A(-20; 15)$, значит, $(-20)^2 + (15)^2 = R^2$, $R^2 = 625$, $R = 25$.

Ответ: 25.

В4. Составим таблицу выбора тарифного плана.

	Повременный	Комбинированный	Безли- митный
Абонентская плата	100 руб.	250 руб.	330 руб.
600 минут	$600 \cdot 0,4 = 240$ (руб.)	$(600 - 480) \cdot 0,3 = 36$ (руб.)	0 руб.
Итого:	$100 + 240 = 340$ (руб.)	$250 + 36 = 286$ (руб.)	330 руб.

Из таблицы следует, что наиболее выгодным для запланированных 600 минут разговоров в месяц является тарифный план «Комбинированный». По этому тарифному плану за 600 минут разговоров будет выплачено 286 рублей.

Ответ: 286.

В5. $\log_2(x+1) = 2$. ОДЗ: $x+1 > 0$; $x > -1$.

Тогда $x+1 = 2^2$, $x+1 = 4$; $x = 3$.

Ответ: 3.

В6. CH является медианой равнобедренного $\triangle ABC$, следовательно, и высотой (см. рис. 92).

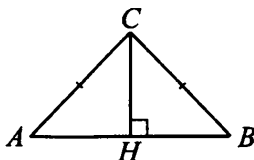


Рис. 92.

Поэтому $AB = 2AH = 2AC \cos A = 2 \cdot 10 \cdot 0,6 = 12$.
 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8$. Из $\triangle ACH$:

$$CH = AC \sin A = 10 \cdot 0,8 = 8. S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

Ответ: 48.

В7. $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$.

Ответ: 125.

В8. На отрезке $[-7; -3]$ производная функции $f(x)$ отрицательна, значит, на этом отрезке функция $f(x)$ убывает и, следовательно, принимает наименьшее значение в точке $x = -3$.

Ответ: -3 .

В9. Рассмотрим осевое сечение конуса ABC (см. рис. 93). Радиус основания $R = \frac{1}{2}AB = OB$. $CB = 15$, $\angle CBA = 60^\circ$. Из $\triangle CBO$ $\cos 60^\circ = \frac{OB}{CB}$,

тогда $OB = CB \cos 60^\circ = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7,5$, $R = 7,5$.

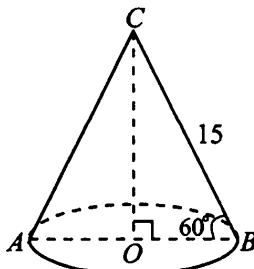


Рис. 93.

Ответ: 7,5.

В10. Вероятность того, что дождя не будет в понедельник, равна $1 - 0,7 = 0,3$, во вторник $1 - 0,6 = 0,4$, в среду $1 - 0,5 = 0,5$. За 3 дня дождя не будет ни разу с вероятностью $0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,06$.

Ответ: 0,06.

В11. Так как сторона основания больше в 2 раза, то площадь основания больше в 4 раза. Так как объём воды не изменяется, то её уровень уменьшится в 4 раза: $20 : 4 = 5$ (см).

Ответ: 5.

В12. Время полёта $t \geq 5$ с, значит, $\frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \geq 5$. $\sin \alpha \geq \frac{5g}{2v_0}$,

$\sin \alpha \geq \frac{5 \cdot 1,6}{2 \cdot 8}$, $\sin \alpha \geq \frac{1}{2}$. Наименьший острый угол $\alpha = 30^\circ$.

Ответ: 30.

В13. Пусть x км/ч — скорость первого теплохода, тогда $(x + 2)$ км/ч — скорость второго. Так как в пункт В они прибыли одновременно, то $\frac{255}{x} = \frac{255}{x+2} + 2$. Тогда $\frac{255x + 2x^2 + 4x - 255x - 510}{x(x+2)} = 0$;
 $x^2 + 2x - 255 = 0$; $x_1 = 15$, $x_2 = -17$. Так как $x_2 < 0$, то $x = 15$.

Ответ: 15.

В14. $y' = 5 - \frac{5}{x+4}$. Уравнение $y' = 0$ имеет корень $x = -3$.

$y(-3) = 5 \cdot (-3) - 5 \ln 1 + 2 = -13$; $y(0) = 5 \cdot 0 - 5 \ln 4 + 2 = 2 - 10 \ln 2$. Так как $\ln 2 < 1$; $-10 \ln 2 > -10$; $2 - 10 \ln 2 > -8$, то наименьшее значение функции $y(x)$ на отрезке $[-3; 0]$ равно -13 .

Ответ: -13 .

С1. а) $2 \cos^2 x - 2 \cos 2x + 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2$;

$$2 \cos^2 x - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - 3 \sin x - 2 = 0;$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0.$$

Пусть $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$. Тогда $2t^2 - 3t - 2 = 0$, $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 2$, причём $t_2 = 2$ не удовлетворяет условию $t \in [-1; 1]$.

$$\sin x = -\frac{1}{2},$$

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$6) x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi n, \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$1) 3\pi \leq \frac{7}{6}\pi + 2\pi n \leq \frac{9}{2}\pi; \quad \frac{1}{2}\left(3 - \frac{7}{6}\right) \leq n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{7}{6}\right); \quad \frac{11}{12} \leq n \leq \frac{5}{3}.$$

Значит, $n = 1$, так как $n \in \mathbb{Z}$. При $n = 1$ $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi = \frac{19}{6}\pi$.

$$2) 3\pi \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq \frac{9}{2}\pi; \quad \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{6}\right) \leq n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} + \frac{1}{6}\right); \quad \frac{19}{12} \leq n \leq \frac{7}{3}.$$

Значит, $n = 2$, так как $n \in \mathbb{Z}$. При $n = 2$ $x = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23}{6}\pi$.

Ответ: а) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{19}{6}\pi; \frac{23}{6}\pi$.

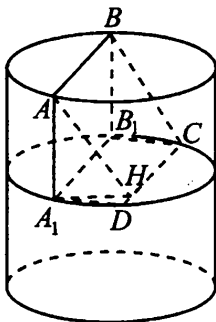


Рис. 94.

С2. Очевидно, что часть плоскости, заключённая между его верхним основанием и проведённым сечением, является цилиндром, радиус основания которого также равен 5, а высота равна половине высоты исходного цилиндра, то есть она равна $\frac{7}{2}$ (см. рис. 94). При этом плоскость сечения исходного цилиндра параллельна плоскости его нижнего основания, а значит, искомый угол равен углу между плоскостью сечения и плоскостью $ABCD$. Проведём AA_1 и BB_1 перпендикулярно плоскости сечения, где A_1 и B_1 лежат в плоскости сечения. Заметим, что $AA_1 = BB_1 = \frac{7}{2}$, $AA_1 \perp A_1B_1$, $BB_1 \perp A_1B_1$ (так как A_1B_1 лежит в плоскости сечения), следовательно, AA_1B_1B — прямоугольник, $A_1B_1 = AB = 6$ и

$A_1B_1 \parallel AB$, а значит, $A_1B_1 \parallel CD$. A_1B_1CD — равнобедренная трапеция. Найдём высоту A_1H этой трапеции (см. рис. 95). Обозначим O — центр окружности, образованной сечением.

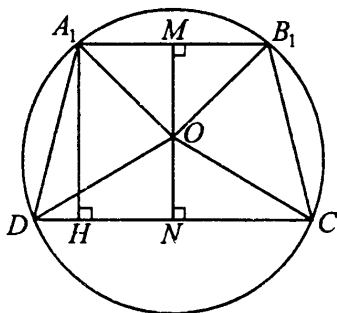


Рис. 95.

Тогда $\triangle A_1OB_1$ — равнобедренный, его высота

$$OM = \sqrt{A_1O^2 - A_1M^2} = \sqrt{A_1O^2 - \left(\frac{A_1B_1}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4. \text{ Аналогично в } \triangle ODC \text{ высота } ON = \sqrt{OD^2 - ND^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

$MN = 4 + 3 = 7$. $A_1H \parallel MN \Rightarrow A_1H = 7$. A_1H — проекция AH на плоскость сечения, при этом $A_1H \perp CD$, следовательно, $AH \perp CD$ (по теореме о трёх перпендикулярах), т.к. $A_1H \perp CD$. Значит, $\angle A_1HA$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью сечения и $ABCD$.

$$\operatorname{tg} \angle AHA_1 = \frac{AA_1}{A_1H} = \frac{\frac{7}{2}}{7} = \frac{1}{2}.$$

$$\angle AHA_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

С3. Решим каждое неравенство системы по отдельности.

$$1) \log_{x^2}(3-2x) > 1, \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq -1, \\ x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\log_{x^2}(3-2x) > \log_{x^2} x^2, \quad (x^2-1)(3-2x-x^2) > 0, \\ (x^2+2x-3)(x^2-1) < 0, \quad (x+3)(x-1)^2(x+1) < 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов (см. рис. 96), получим $x \in (-3; -1)$.

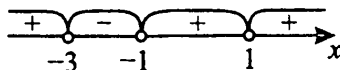


Рис. 96.

$$2) |x^3 - 1| > 1 - x.$$

Заметим, что для $x \in (-3; -1)$ выполнено $x^3 - 1 < 0$, тогда это неравенство примет вид $1 - x^3 > 1 - x$; $x^3 - x < 0$; $x(x-1)(x+1) < 0$, получим $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

Учитывая, что $x \in (-3; -1)$, получим решение исходной системы $x \in (-3; -1)$.

Ответ: $(-3; -1)$.

С4. Учитывая длину радиусов и расстояние между центрами окружностей, делаем вывод: окружности имеют две общие точки. Возможны два случая расположения прямой AC и отрезка O_1O_2 .

1. Прямая AC и отрезок O_1O_2 не имеют общих точек (см. рис. 97).

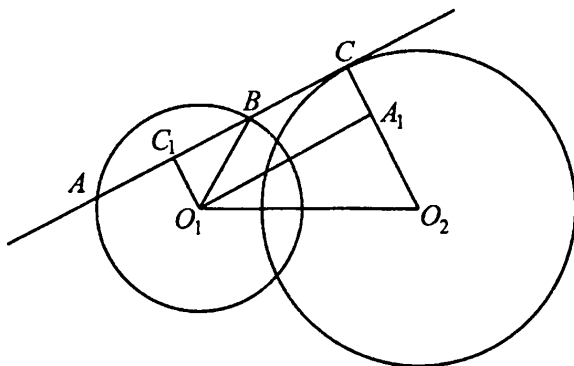


Рис. 97.

По свойству касательной $AC \perp O_2C$.

Проведём $O_1C_1 \parallel O_2C$, $O_1A_1 \parallel C_1C$, тогда $O_1C_1CA_1$ — прямоугольник. O_1C_1 — высота в $\triangle AO_1B$, значит, $AC_1 = C_1B$.

Обозначим $AC_1 = C_1B = x$, $O_1C_1 = y$. По условию $AB = 2BC$, значит, $BC_1 = BC = x$. Из $\triangle O_1C_1B$ имеем $x^2 + y^2 = 25^2$, из $\triangle O_1A_1O_2$ имеем $(2x)^2 + (30 - y)^2 = 50^2$,
 $4(25^2 - y^2) + (30 - y)^2 = 2500$, $y^2 + 20y - 300 = 0$, $y > 0$, $y = 10$,
 $x = \sqrt{25^2 - 10^2} = 5\sqrt{21}$, $AB = 2x = 10\sqrt{21}$.

2. Прямая AC пересекает отрезок O_1O_2 (см. рис. 98).

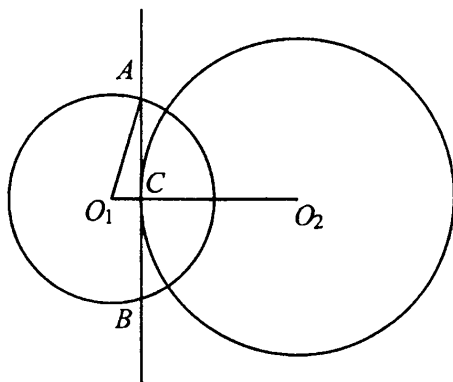


Рис. 98.

В этом случае $C \in O_1O_2$ и $AC \perp O_1O_2$. Из $\triangle ACO_1$
 $AC = \sqrt{O_1A^2 - O_1C^2} = \sqrt{25^2 - (50 - 30)^2} = 15$. $AB = 2AC = 30$.

Ответ: $10\sqrt{21}$ или 30.

С5. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + (a - 2)x^2 - 8x + 1$.

1) При $\frac{a}{3} = 0$ уравнение $f(x) = 0$ является квадратным уравнением $-2x^2 - 8x + 1 = 0$, которое имеет ровно два корня. Значит, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

2) При $a \neq 0$ $f'(x) = ax^2 + 2(a - 2)x - 8$. Решим уравнение $f'(x) = 0$:
 $x_{1,2} = \frac{-(a - 2) \pm (a + 2)}{a}$; $x_1 = \frac{4}{a}$, $x_2 = -2$. Если $x_1 \neq x_2$ (то есть $a \neq -2$), то при переходе через точки x_1 и x_2 $f'(x)$ меняет знак, поэтому график $y = f(x)$ имеет один из видов, представленных на рисунке 99.

В этом случае очевидно, что уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно два корня, когда выполнено $f(x_1) = 0$ или $f(x_2) = 0$. Далее имеем $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{3} \left(\frac{64}{a^3} \right) + (a - 2) \left(\frac{16}{a^2} \right) - \frac{32}{a} + 1 = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 48a - 32 = 0$, $a_{1,2} = 8 \pm \frac{4\sqrt{42}}{3}$.

Аналогично, $f(x_2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{3}a + 4a - 8 + 16 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{27}{4}$.

Если же $a = -2$, то $x_1 = x_2 = -2$, $f'(x) = -2(x + 2)^2 \leq 0$, $f(x)$ убывает ($f'(x) = 0$ только при $x = -2$), а значит, график $f(x)$ имеет вид,

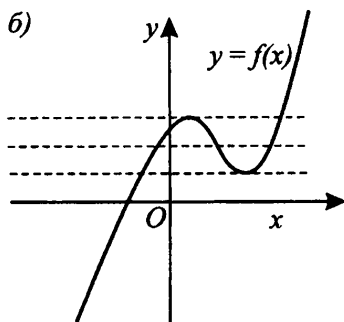
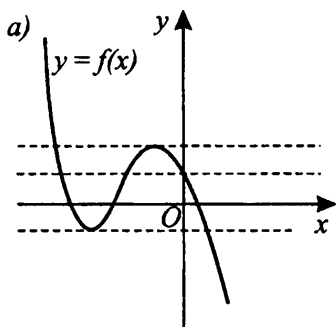


Рис. 99.

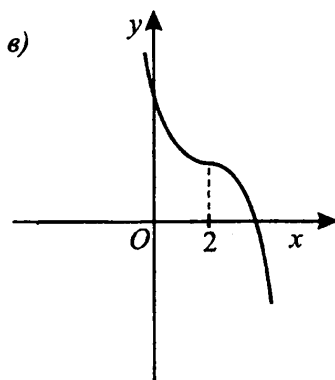


Рис. 100.

указанный на рисунке 100. В этом случае уравнение $f(x) = 0$ имеет только 1 корень.

Ответ: $0; -\frac{27}{4}; 8 \pm \frac{4\sqrt{42}}{3}$.

С6. Заметим, что если пара (x, y) является решением исходного уравнения, то пара $(x, -y)$ также является его решением, поэтому будем рассматривать только значения $y \geq 0$.

Рассмотрим два случая.

1) x — чётное, то есть $x = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае имеем $4 \cdot 3^{2n} - y^2 = 35$, $(2 \cdot 3^n - y)(2 \cdot 3^n + y) = 35$.

Так как каждый множитель является целым числом и выражение $2 \cdot 3^n + y$ принимает только положительные значения, то последнее уравнение равносильно

$$\left[\begin{cases} 2 \cdot 3^n - y = 5, \\ 2 \cdot 3^n + y = 7, \\ 2 \cdot 3^n - y = 1, \\ 2 \cdot 3^n + y = 35; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} 4 \cdot 3^n = 12, \\ 2y = 2, \\ 4 \cdot 3^n = 36, \\ 2y = 34; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} n = 1, \\ y = 1, \\ n = 2, \\ y = 17. \end{cases} \right.$$

Таким образом, в данном случае получаем решения исходного уравнения $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(4; 17)$, $(4; -17)$.

2) x — нечётное, то есть $x = 2n + 1$, $n \in N$. В этом случае $4 \cdot 3^x$ делится на 3 нацело, y^2 при делении на 3 даёт остатки 1 или 0 (как квадрат целого числа), а число 35 делится на 3 с остатком 2. Таким образом, в данном случае уравнение $4 \cdot 3^x - y^2 = 35$ не имеет решений в целых числах.

Ответ: $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(4; 17)$, $(4; -17)$.

Решение варианта 14

В1. Вместе с процентами клиент должен отдать банку

$100\,000 \cdot 1,14 = 114\,000$ (рублей). Значит, ежемесячно он должен выплачивать $114\,000 : 12 = 9\,500$ (рублей).

Ответ: 9500.

В2. Так как продавать выгоднее по наибольшей цене, то нужно найти на графике точку наибольшего значения цены в период с 1 по 30 ноября. Это 30 ноября.

Ответ: 30.

В3. $S_{BTC} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$; $S_{AKB} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$; $S_{AED} = \frac{2 \cdot 10}{2} = 10$;

$S_{EKT D} = 10 \cdot 5 = 50$ (см. рис. 101).

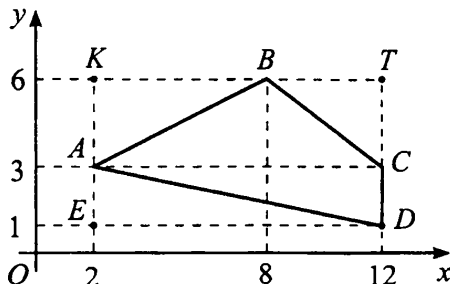


Рис. 101.

$S_{ABCD} = S_{EKT D} - S_{BTC} - S_{AKB} - S_{AED} = 50 - 6 - 9 - 10 = 25$.

Ответ: 25.

В4. Экономия от одной поездки на автобусе составляет $14 - 9 = 5$ (рублей). Всего 30 поездок, поэтому общая экономия составит $30 \cdot 5 = 150$ (рублей).

Ответ: 150.

В5. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} = 27$; $(3^{-1})^{x-4} = 3^3$; $3^{4-x} = 3^3$; $4 - x = 3$; $x = 1$.

Ответ: 1.

В6. $\operatorname{tg} \angle BAD = \frac{BE}{AE}$ (см. рис. 102). $AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{17 - 7}{2} = 5$.

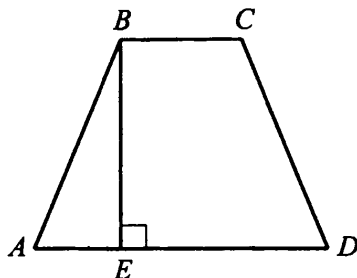


Рис. 102.

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{169 - 25} = 12. \operatorname{tg} \angle BAD = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Ответ: 2,4.

В7. Так как $2 + \log_4 121 = \log_2 4 + \log_2 11 = \log_2 44$, то $2^{\log_2 44} = 44$.

Ответ: 44.

В8. На отрезке $[2; 6]$ производная функции $f(x)$ положительна. Значит, на этом отрезке функция $f(x)$ возрастает и, следовательно, принимает наибольшее значение в точке $x = 6$.

Ответ: 6.

В9. Так как образующая BC (см. рис. 103 на с. 106) перпендикулярна плоскости основания, то диаметр AC — это проекция AB на плоскость нижнего основания. По условию $AC = 13\sqrt{3}$, $\angle BAC = 60^\circ$. Тогда

$$\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, BC = 13\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 39.$$

Ответ: 39.

В10. На каждом отдельно взятом «независимом» уроке вероятность того, что Серёжа не выйдет к доске, равна $1 - 0,4 = 0,6$. Тогда вероятность того, что Серёжа не выйдет к доске ни разу за 3 урока, равна $(0,6)^3 = 0,216$.

Ответ: 0,216.

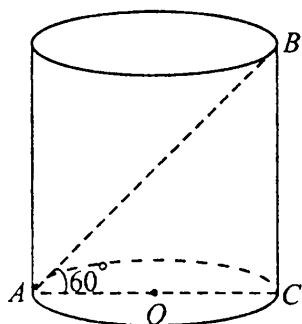


Рис. 103.

В11. Пусть R — радиус основания первого конуса, а h — его высота, тогда $\frac{1}{3}\pi R^2 h = V_1$, значит, $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h}{4} \cdot (2R)^2 = \frac{1}{3}\pi R^2 h = V_1 = 18 \text{ (м}^3\text{)}$.

Ответ: 18.

В12. $M = NIBl^2 \sin \alpha = 500 \cdot 8 \cdot 0,05 \cdot (0,03)^2 \sin \alpha =$
 $= 4000 \cdot 0,05 \cdot 0,0009 \sin \alpha = 200 \cdot 0,0009 \sin \alpha = 0,18 \sin \alpha$.

По условию должно выполняться $M \geq 0,09$, значит, $0,18 \sin \alpha \geq 0,09$; $\sin \alpha \geq \frac{1}{2}$. Наименьший угол α , при котором выполняется это неравенство, равен 30° .

Ответ: 30.

В13. Пусть первый рабочий выполняет заказ за x дней, второй — за y дней, третий — за z дней. Тогда за 1 день первый рабочий выполняет $\frac{1}{x}$ часть заказа, второй — $\frac{1}{y}$, третий — $\frac{1}{z}$ часть заказа. Первый и второй, работая вместе, за 1 день выполняют $\frac{1}{16}$ часть заказа, значит,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$. Аналогично $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{16}$. Отсюда следует, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{16} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16}$; $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{3+4+3}{48}$;
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{10}{96} = \frac{5}{48}$. Значит, за 1 день трое рабочих, работая вместе, вы-

полняют $\frac{5}{48}$ заказа, следовательно, весь заказ они выполняют за $\frac{48}{5}$ дней, а

$$\frac{48}{5} = \frac{96}{10} = 9,6 \text{ (дней)}.$$

Ответ: 9,6.

В14. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{10x-x^2-29}$; $y = (2^{-1})^{10x-x^2-29}$; $y = 2^{x^2-10x+29}$. Функ-

ция $y = 2^z$ возрастает, значит, $y = 2^{x^2-10x+29}$ принимает наименьшее значение при том значении x , при котором $f(x) = x^2 - 10x + 29$ принимает наименьшее значение. Но $f(x) = x^2 - 10x + 29$ задаёт параболу, ветви которой направлены вверх, следовательно, наименьшее значение эта функция принимает при x , равном абсциссе вершины параболы, то есть при $x = -\frac{-10}{2 \cdot 1} = 5$. Получим наименьшее значение функции:

$$y(5) = 2^{5^2-10 \cdot 5+29} = 2^4 = 16.$$

Ответ: 16.

С1. а) $\cos 2x + 5 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 0$,
 $\cos^2 x - \sin^2 x + 5 \cos x(\sin x + \cos x) = 0$;
 $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + 5 \cos x(\sin x + \cos x) = 0$;
 $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x + 5 \cos x) = 0$;
 $(\cos x + \sin x)(6 \cos x - \sin x) = 0$;

$$\begin{cases} \cos x + \sin x = 0, \\ 6 \cos x - \sin x = 0; \end{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \cos x \neq 0, \\ \operatorname{tg} x = 6, \cos x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z, \\ x = \operatorname{arctg} 6 + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

б) Выберем из первой серии решений те, которые принадлежат указанному промежутку: $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} + \pi n < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{1}{4} < n < \frac{3}{4}$, $n = 0$,

$$x = -\frac{\pi}{4}. \text{ Для второй серии } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 6 + \pi n < \frac{\pi}{2}. \text{ Так как}$$

$0 < \operatorname{arctg} 6 < \frac{\pi}{2}$, получаем, что из этой серии решений подходит 1 корень $x = \operatorname{arctg} 6$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z, \operatorname{arctg} 6 + \pi n, n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} 6$.

С2. Часть цилиндра, заключённая между его нижним основанием и плоскостью, параллельной основаниям, является цилиндром. Расстояние между основаниями цилиндра равно высоте цилиндра. Значит, плоскость, равноудалённая от его оснований, делит высоту пополам, а потому часть цилиндра, указанная выше, является цилиндром, высота которого в 2 раза меньше высоты исходного цилиндра и равна $\frac{3}{2}$. Основания этого цилиндра равны основаниям исходного цилиндра (см. рис. 104) O_1 и O — центры оснований. В силу того, что основания цилиндров лежат в параллельных плоскостях, угол между плоскостью $ABCD$ и плоскостью верхнего основания цилиндра равен углу между этой плоскостью и плоскостью нижнего основания цилиндра, то есть плоскостью ABO .

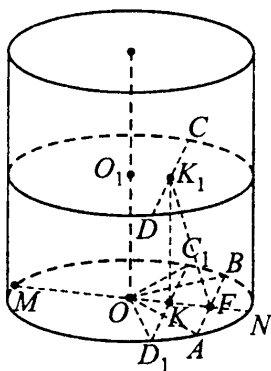


Рис. 104.

Пусть C_1D_1 — проекция CD на плоскость нижнего основания, тогда $C_1D_1 \parallel CD$. Так как $CD \parallel AB$, то $C_1D_1 \parallel AB$. Проведём диаметр $MN \perp C_1D_1$, тогда $MN \perp AB$. Через точку K проведём $KK_1 \parallel OO_1$. $OO_1 \perp ABO$, значит, $KK_1 \perp ABO$, тогда K_1F наклонная. $KF \perp AB$, следовательно, $K_1F \perp AB$ по теореме о трёх перпендикулярах; $\angle KFK_1$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью $ABCD$ и плоскостью нижнего основания цилиндра. $\operatorname{tg} \angle KFK_1 = \frac{KK_1}{KF}$.

По условию $\sphericalangle CD = 90^\circ$, $\sphericalangle AB = 60^\circ$, тогда $\angle C_1OD_1 = 90^\circ$, $\angle AOB = 60^\circ$ как центральные, опирающиеся на соответствующие дуги.

В равнобедренном $\triangle C_1OD_1$ высота

$$OK = OC_1 \cdot \sin 45^\circ = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}. \text{ В равностороннем}$$

$$\triangle AOB \text{ высота } OF = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ где } a = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

$$OF = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{6}}{2}.$$

$$KF = OF - OK = \frac{3 + \sqrt{6}}{2} - \frac{2 + \sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{tg} \angle KFK_1 = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3, \quad \angle KFK_1 = \operatorname{arctg} 3.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 3$.

С3. Решим каждое неравенство системы по отдельности.

1) Решим второе неравенство системы.

$$\log_{0,5}(x-3) - \log_{0,5}(x+3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-3 > 0, \\ x+3 > 0, \\ \frac{x+3}{x-3} \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; +\infty).$$

Для всех значений x , принадлежащих ОДЗ, получим

$$\log_{0,5} \frac{x-3}{x+3} - \log\left(\frac{x+3}{x-3}\right) 2 > 0,$$

$$-\log_2 \frac{x-3}{x+3} - \log\left(\frac{x+3}{x-3}\right) 2 > 0, \quad \log_2 \frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{\log_2 \frac{x+3}{x-3}} > 0.$$

$$\text{Сделаем замену } t = \log_3 \frac{x+3}{x-3}, \text{ тогда } t - \frac{1}{t} > 0, \quad \frac{t^2 - 1}{t} > 0,$$

$$\frac{(t-1)(t+1)}{t} > 0, \quad t \in (-1; 0) \cup (1; +\infty).$$

Вернёмся к исходной переменной, учитывая, что $x-3 > 0$.

$$\text{а) } -1 < \log_2 \frac{x+3}{x-3} < 0; \quad \frac{1}{2} < \frac{x+3}{x-3} < 1; \quad \begin{cases} x-3 < 2x+6, \\ x+3 < x-3; \end{cases}$$

нет решений.

$$\text{б) } \log_2 \frac{x+3}{x-3} > 1; \quad \frac{x+3}{x-3} > 2, \quad x+3 > 2x-6, \quad x < 9. \text{ Окончательно}$$

получаем $x \in (3; 9)$.

2) Решим первое неравенство исходной системы. Заметим, что $4x^2 + 2x + 1 > 0$ при всех значениях x (дискриминант $D = 4 - 16 < 0$, старший коэффициент $4 > 0$).

Заметим также, что $x^2 - x = x(x - 1) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, а значит, и при $x \in (3; 9)$.

В этом случае $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > 1$ тогда и только тогда, когда $4x^2 + 2x + 1 > 1$; $2x(2x + 1) > 0$; $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; +\infty)$.

3) Учитывая, что согласно пункту 1, $x \in (3; 9)$, получим в ответе $x \in (3; 9)$.

Ответ: (3; 9).

С4. Пусть сторона правильного треугольника ABC равна a . Возможны два случая расположения окружностей.

1. Окружности касаются внешним образом (рис. 105).

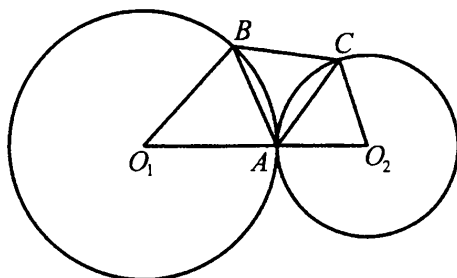


Рис. 105.

Обозначим $\angle O_1AB = \alpha$, $0 < \alpha < 90^\circ$, тогда $\angle O_2AC = 120^\circ - \alpha$ (так как $\angle BAC = 60^\circ$). Из равнобедренного треугольника O_1AB по теореме синусов имеем:

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad a = \frac{R \sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2R \cos \alpha, \quad a = 10 \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{10}.$$

Аналогично из треугольника O_2AC следует $a = 2r \cos(120^\circ - \alpha)$.

$$\text{Имеем: } a = 2r \left(-\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) =$$

$$= 2r \left(-\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \right) = 3(-\cos \alpha + \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}).$$

$$a = -\frac{3a}{10} + 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{100}}, \quad 13a = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{100 - a^2}, \quad 169a^2 = 27(100 - a^2),$$

$$a > 0, \quad a = \frac{15\sqrt{3}}{7}.$$

2. Окружности касаются внутренним образом (рис.106).

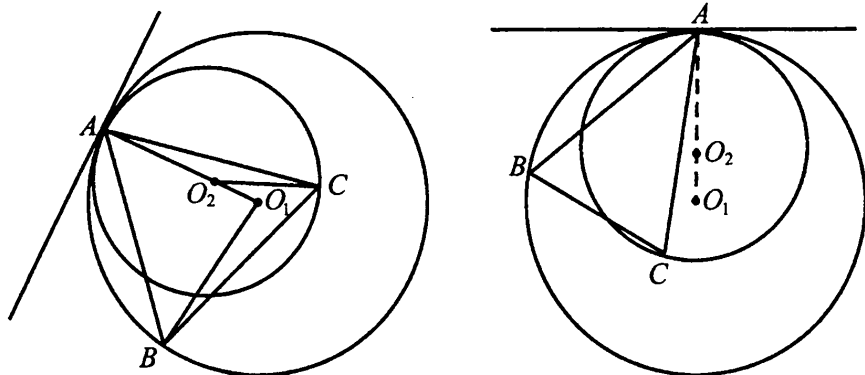


Рис. 106.

Обозначим $\angle O_1AB = \alpha$, тогда $\angle O_2AC = 60^\circ - \alpha$. Аналогично первому случаю, из равнобедренных треугольников O_1AB и O_2AC соответственно получаем $\cos \alpha = \frac{a}{10}$, $a = 3(\cos \alpha + \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha})$,

$$a = \frac{3a}{10} + 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{100}}, \quad 7a = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{100 - a^2}, \quad 49a^2 = 27(100 - a^2),$$

$$a > 0, \quad a = \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

Ответ: $\frac{15\sqrt{3}}{7}, \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

С5. Пусть $f(x) = \frac{(a-1)^2}{3}x^3 + (a-1)(a-3)x^2 - 8(a-1)x + a-1$. Тогда исходное уравнение примет вид $f(x) = 0$. При $a = 1$ для любого значения x получим $f(x) = 0$, значит, $a = 1$ удовлетворяет условию задачи.

При $a \neq 1$ уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению $g(x) = 0$, где $g(x) = \frac{f(x)}{a-1} = \frac{a-1}{3}x^3 + (a-3)x^2 - 8x + 1$. Найдём корни уравнения

$g'(x) = 0$, $(a-1)x^2 + 2(a-3)x - 8 = 0$, откуда $x_1 = \frac{4}{a-1}$, $x_2 = -2$. Если

$x_1 \neq x_2$ (то есть $a \neq -1$), то $g'(x)$ меняет знак при переходе через точки x_1 и x_2 , поэтому график $y = g(x)$ имеет один из видов, представленных на рисунке 107.

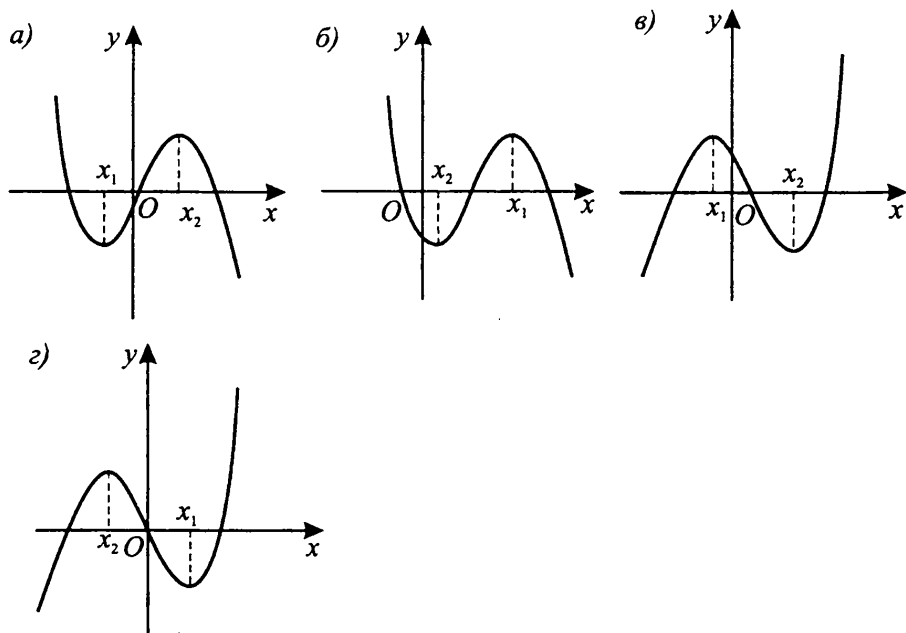


Рис. 107.

В этом случае уравнение $g(x) = 0$ имеет более двух корней тогда и только тогда, когда $g(x_1)$ и $g(x_2)$ имеют разный знак, то есть $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$.

Вычислим $g(x_1)$ и $g(x_2)$.

$$g(x_1) = \frac{3\left(a - \frac{27 - 4\sqrt{42}}{3}\right) \cdot \left(a - \frac{27 + 4\sqrt{42}}{3}\right)}{(a - 1)^2},$$

$$g(x_2) = \frac{4}{3}a + \frac{23}{3} = \frac{4}{3}\left(a + \frac{23}{4}\right).$$

Решим неравенство $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$ методом интервалов (см. рис. 108), учитывая, что

$$\frac{27 - 4\sqrt{42}}{3} > 0.$$

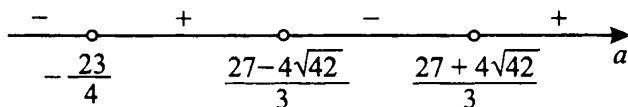


Рис. 108.

Таким образом, $a \in \left(-\infty; -\frac{23}{4}\right) \cup \left(\frac{27 - 4\sqrt{42}}{3}; \frac{27 + 4\sqrt{42}}{3}\right)$.

При $a = -1$ график $y = g(x)$ имеет вид как на рисунке 109, поэтому уравнение $f(x) = 0$ имеет 1 корень.

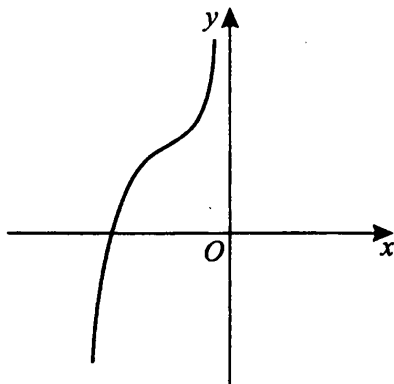


Рис. 109.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{23}{4}\right) \cup \left(\frac{27 - 4\sqrt{42}}{3}; \frac{27 + 4\sqrt{42}}{3}\right)$.

С6. а) Пусть всего x кг яблок, при этом понадобилось k 70-килограммовых ящиков. Тогда по условию задачи

$$\begin{cases} 70(k-1) < x < 70k, \\ 50(k+8) < x < 50(k+9), \\ x = 40(k+17); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 70k - 70 < 40k + 680 < 70k, \\ 50k + 400 < 40k + 680 < 50k + 450, \\ x = 40(k+17); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30k < 750, \\ 30k > 680, \\ 10k < 280, \\ 10k > 230, \\ x = 40(k+17); \end{cases}$$

$$\begin{cases} k < 25, \\ k > 22\frac{2}{3}, \\ k < 28, \\ k > 23, \\ x = 40(k+17). \end{cases}$$

Учитывая, что $k \in \mathbb{Z}$, получим $k = 24$ и $x = 40 \cdot 41 = 1640$.

б) Если 1640 кг яблок раскладывать по ящикам вместительностью 50 кг и 70 кг, то понадобится не меньше 24-х ящиков, так как $\frac{1640}{70} > 23$.

Покажем, что можно полностью заполнить 24 ящика, уместив в них яблоки. Действительно, пусть имеется 2 ящика вместимостью 50 кг и 22 ящика вместимостью 70 кг. Тогда их общая вместимость $50 \cdot 2 + 70 \cdot 22 = 1640$ (кг).

в) Пусть всего x кг яблок, при этом понадобилось k 70-килограммовых ящиков. Тогда по условию задачи $\begin{cases} 70(k-1) < x < 70k, \\ 50(k+8) < x < 50(k+9). \end{cases} \quad (*)$

Отсюда следует, что $\begin{cases} 70(k-1) < 50(k+9), \\ 50(k+8) < 70k; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 26, \\ k > 20. \end{cases}$ Так как

$k \in \mathbb{Z}$, получаем, что $k \geq 21$, откуда $\begin{cases} x > 70(21-1), \\ x > 50(21+8); \end{cases} \Leftrightarrow x > 1450$.

Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, приходим к выводу, что $x \geq 1451$. При $x = 1451$ и $k = 21$ неравенства системы (*) выполнены, а потому наименьшее целое число килограммов равно 1451.

Ответ: а) 1640; б) 24; в) 1451.

Решение варианта 15

В1. 1 кг 700 г = 1,7 кг. Для покупки 1,7 кг апельсинов потребуется заплатить $35 \cdot 1,7 = 59,5$ рублей, тогда покупатель получит $100 - 59,5 = 40,5$ рублей сдачи.

Ответ: 40,5.

В2. На оси «Дни» в период с 14 по 19 февраля находим день, в который наблюдалось наибольшее давление — 18 февраля; ему соответствует по оси «Давление» число 756.

Ответ: 756.

В3. Сторона квадрата равна $AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = 2\sqrt{5}$ (см. рис. 110), тогда его площадь равна $(2\sqrt{5})^2 = 20$ (см²).

Ответ: 20.

В4. На компьютере Амвросия скорость загрузки $\frac{96}{114}$ Мб/с, на компью-

тере Аристарха $\frac{98}{116}$ Мб/с, а на компьютере Ануфрия $\frac{94}{113}$ Мб/с. Среди

чисел $\frac{96}{114}$, $\frac{98}{116}$, $\frac{94}{113}$ выберем наибольшее $\frac{96}{114} = 1 - \frac{18}{114}$, $\frac{98}{116} = 1 - \frac{18}{116}$;

$\frac{94}{113} = 1 - \frac{19}{113}$. Таким образом, из чисел $\frac{18}{114}$, $\frac{18}{116}$, $\frac{19}{113}$ надо выбрать наи-

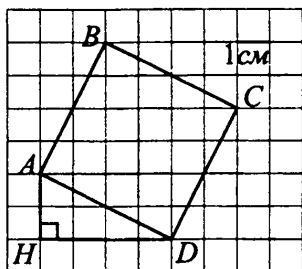


Рис. 110.

меньшее. Очевидно, что $\frac{18}{116} < \frac{18}{114}$. С другой стороны, $\frac{18}{116} < \frac{18}{113} < \frac{19}{113}$.

Значит, наибольшая скорость загрузки $1 - \frac{18}{116} = \frac{98}{116}$ (Мб/с).

$$\frac{3920}{\left(\frac{98}{116}\right)} = \frac{3920}{98} \cdot 116 = 4640 \text{ (с)}.$$

Ответ: 4640.

В5. $\sqrt{\frac{11}{6-4x}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{11}{6-4x} = \frac{1}{4}; \quad 44 = 6 - 4x; \quad -4x = 38;$

$$x = -\frac{38}{4} = -9,5.$$

Ответ: -9,5.

В6. ABCD — описанный четырёхугольник, значит, $AB + CD = AD + BC$.

Обозначим $AB = 4x$, тогда $BC = 7x$, $CD = 9x$. $4x + 9x = AD + 7x$; $AD = 6x$. Тогда периметр равен $4x + 7x + 9x + 6x = 26x$, $26x = 338$, $x = 13$. Большая сторона равна $9x = 117$.

Ответ: 117.

$$\begin{aligned} \text{В7. } \frac{18 \sqrt[65]{\sqrt[33]{a}} - 11 \sqrt[15]{\sqrt[143]{a}}}{14 \sqrt[39]{\sqrt[55]{a}}} &= \frac{18 \sqrt[2145]{a} - 11 \sqrt[2145]{a}}{14 \sqrt[2145]{a}} = \\ &= \frac{(18 - 11) \sqrt[2145]{a}}{14 \sqrt[2145]{a}} = \frac{7}{14} = 0,5. \end{aligned}$$

Ответ: 0,5.

В8. Заметим по графику, что на отрезке $[-2; 3]$ функция $f(x) \geq 0$. Тогда

$\int_{-2}^3 f(x) dx$ равен площади фигуры под графиком на $[-2; 3]$, ограниченной

снизу осью Ox . Эта фигура является трапецией $ABCD$ (см. рис. 111).

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} BH = \frac{3 + 5}{2} \cdot 2 = 8. \quad \int_{-2}^3 f(x) dx = 8.$$

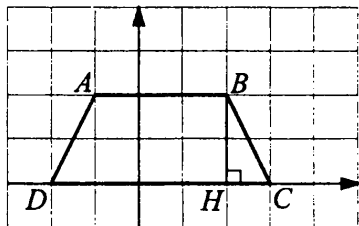


Рис. 111.

Ответ: 8.

В9. Пусть l — образующая конуса, r — радиус его основания.

$S_{\text{бок}} = \pi r l$. По условию $\pi r l = 25\pi$; $r l = 25$, $10r = 25$, $r = 2,5$.

Диаметр $d = 2r = 5$.

Ответ: 5.

В10. По сути, результатом броска является упорядоченная тройка чисел $(a; b; c)$, где a — количество очков на первом кубике, b — количество очков на втором кубике, c — количество очков на третьем кубике. Так как и a , и b , и c принимают целые значения от 1 до 6, всего таких пар $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Пяти очкам соответствуют 6 пар. Отсюда вероятность того, что в сумме выпадет пять очков, равна $\frac{6}{216} \approx 0,03$.

Ответ: 0,03.

В11. Объем части конуса составляет $\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12}$ от объема конуса.

$$V_{\text{конуса}} = \frac{10 \cdot \pi \cdot 6^2}{3} = 120\pi. \quad V = \frac{1}{12} V_{\text{конуса}} = 10\pi. \quad \text{Тогда } \frac{V}{\pi} = 10.$$

Ответ: 10.

В12. Из условия следует, что $E = \frac{0,16 \cdot 4 \cos^2 \pi t}{2}$, $E = 0,32 \cos^2 \pi t$.

Пусть $t \in [0; 1]$. Найдём, при каких t выполняется $E \geq 0,24$, то есть $0,32 \cos^2 \pi t \geq 0,24$; $\cos^2 \pi t \geq \frac{3}{4}$; $\cos \pi t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos \pi t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Учиты-

вая, что $t \in [0; 1]$, получим $\pi t \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ или $\pi t \in \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$, откуда $t \in \left[0; \frac{1}{6}\right]$

или $t \in \left[\frac{5}{6}; 1\right]$. Таким образом, $E \geq 0,24$ на протяжении $\frac{1}{6}$ секунды в начале 1-ой секунды и $\frac{1}{6}$ в конце. И тогда $E \geq 0,24$ на протяжении $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ секунды, $\frac{1}{3} \approx 0,33$.

Ответ: 0,33.

В13. Пусть второй рабочий делает x деталей в час, тогда первый делает $(x - 2)$ детали в час. Так как первый рабочий выполняет заказ на 2 часа медленнее, то получим уравнение $\frac{99}{x-2} = \frac{99}{x} + 2$; $x_1 = -9$, $x_2 = 11$. Так как $x > 0$, $x = 11$.

Ответ: 11.

В14. Каждая из функций $g(x) = 2^{2x}$ и $p(x) = 2^x - 2$ возрастает на промежутке $[-1; 2]$. Тогда их сумма $y = p(x) + g(x)$ также возрастает на промежутке $[-1; 2]$, значит, наименьшее значение принимает при $x = -1$.

$$y(-1) = 2^{-2} + 2^{-1} - 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = -1,25.$$

Ответ: -1,25.

С1. а) ОДЗ: $\cos x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Исходное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} 2 \sin^2 x + 11 \sin x - 6 = 0, \\ 1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0. \end{cases}$$

Решим каждое уравнение совокупности отдельно.

$$1) 2 \sin^2 x + 11 \sin x - 6 = 0, \sin x = \frac{-11 \pm 13}{4}, \sin x = -6, \sin x = \frac{1}{2}.$$

Уравнение $\sin x = -6$ корней не имеет, так как $|\sin x| \leq 1$.

$\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Все эти корни очевидно принадлежат ОДЗ.

$$2) 1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0, \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}, x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, решение исходного уравнения можно представить в виде двух серий:

$$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

б) Найдём подходящие корни в первой серии решений.

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{3\pi}{2},$$

$$n \text{ — чётное, } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{3\pi}{2}; -\frac{2}{3} \leq n \leq \frac{4}{3}, n = 0; x = \frac{\pi}{6}.$$

$$n \text{ — нечётное, } -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{3\pi}{2}; -\frac{1}{3} \leq n \leq \frac{5}{3}, n = 1;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Найдём подходящие корни во второй серии решений $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \pi k \leq \frac{3\pi}{2}, -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{6} + k \leq \frac{3}{2}, -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{4}{3}, k = 0, k = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}.$$

Ответ: а) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

С2. Примем длину стороны основания пирамиды за единицу. Тогда $AB = BC = AC = DH = 1$ (см. рис. 112).

Опустим из точки K перпендикуляр KM на ABC . Так как отрезок AH является проекцией отрезка AD на ABC , $M \in AH$. Отсюда $\angle KHA$ — искомый. AH — радиус описанной около правильного треугольника ABC окружности, $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

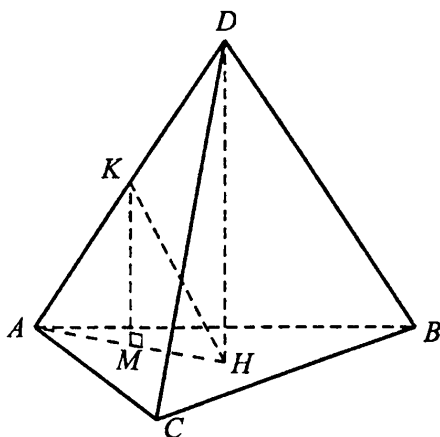


Рис. 112.

KM — средняя линия $\triangle HAD$ (так как $AK = KD$ и $KM \parallel DH$ ввиду $KM \perp ABC$ и $DH \perp ABC$). Отсюда $KM = \frac{DH}{2} = \frac{1}{2}$;

$$MH = \frac{AH}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\operatorname{tg} \angle KHM = \frac{KM}{MH} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \text{ значит, } \angle KHM = 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

$$\text{СЗ. ОДЗ: } \begin{cases} -4x > 0, \\ 2^{x+8} \neq 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} 2^x > 0, \\ -4x \neq 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} 2^x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \neq -\frac{1}{4}, \\ x \neq -1, \\ x \neq -8; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty; -8) \cup (-8; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right).$$

Преобразуем исходное неравенство к виду

$$\frac{\frac{1}{x+8} \log_2 4}{\frac{1}{x+8} (\log_2 4 + \log_2(-x))} \leq \frac{1}{\log_2(-x \log_2 2)}.$$

На ОДЗ имеем

$$\frac{2}{2 + \log_2(-x)} \leq \frac{1}{\log_2(-x)}.$$

Пусть $\log_2(-x) = t$. Тогда $\frac{2}{2+t} - \frac{1}{t} \leq 0$;

$\frac{t-2}{t(2+t)} \leq 0$. Решим это неравенство методом интервалов (см. рис. 113), получим, что $t \in (-\infty; -2) \cup (0; 2]$. Тогда

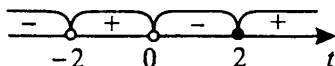


Рис. 113.

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(-x) < -2, \\ \left\{ \begin{array}{l} \log_2(-x) > 0, \\ \log_2(-x) \leq 2; \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(-x) < \log_2 \frac{1}{4}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \log_2(-x) > \log_2 1, \\ \log_2(-x) \leq \log_2 4; \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -\frac{1}{4}, \\ \left\{ \begin{array}{l} x < -1, \\ x \geq -4; \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$x \in [-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in [-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

Ответ: $[-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

С4. Для треугольника ABC выполняется равенство $AC^2 + BC^2 = AB^2$, значит, он прямоугольный с прямым углом C .

Возможны два случая.

1) Точка D лежит вне отрезка BC (см. рис. 114).

Пусть $DB = x$, тогда $CD = 4 + x$. Так как $DC : BD = 3 : 1$, то $(4 + x) : x = 3 : 1$, $4 + x = 3x$, $x = 2$. Итак, $DB = 2$, $CD = 6$.

$$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = 3\sqrt{5}.$$

Пусть $AE = a$; $DF = b$.

Так как отрезки касательных, проведённые из одной точки, равны, то $HC = 3 - a$, $DH = DE = DA - AE = 3\sqrt{5} - a$. $DC = CH + DH$, $6 = (3 - a) + (3\sqrt{5} - a)$, $a = \frac{3\sqrt{5} - 3}{2}$.

Аналогично находим $b = \frac{3\sqrt{5} - 3}{2}$, и тогда

$$EF = AD - AE - FD = AD - a - b = 3.$$

2) Точка D лежит внутри CB (см. рис. 115).

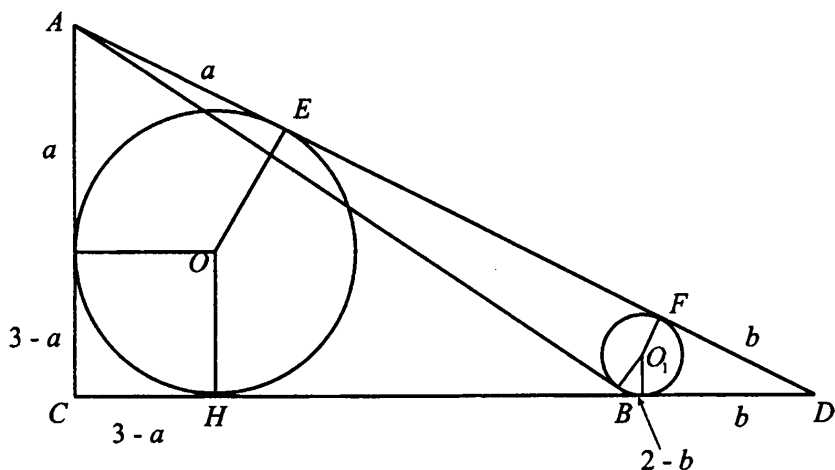


Рис. 114.

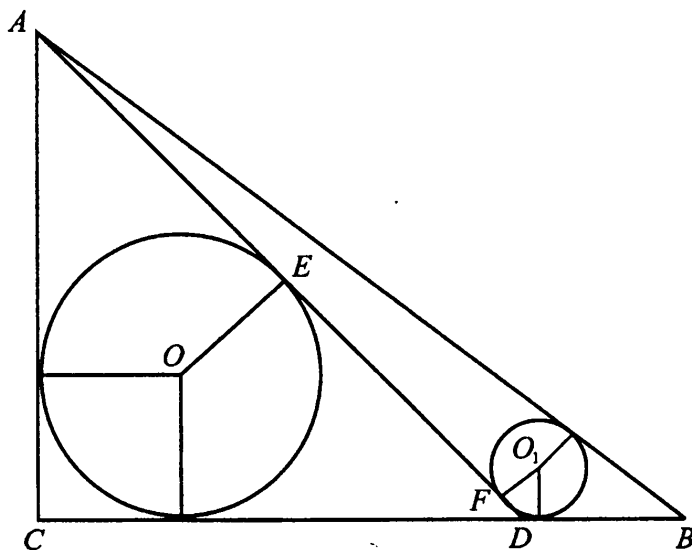


Рис. 115.

Аналогично первому случаю, находим $BD = 1$, $AD = 3\sqrt{2}$,
 $AE = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $FD = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$, и тогда $EF = AD - AE - FD = 2$.

Ответ: 2; 3.

С5. Построим множество точек $(x; a)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $(a + x - 1)(6 + xa) \leq 0$.

Построим графики уравнений $a + x - 1 = 0$ и $6 + xa = 0$.
 $a = -x + 1$ — прямая, $a = -\frac{6}{x}$ — гипербола (см. рис. 116). Эти линии делят плоскость на области. Заштрихуем множество точек, для которых $(a + x - 1)(6 + xa) \leq 0$.

Построим график $a + 4x - x^2 = 1$, $a = x^2 - 4x + 1$. Это парабола с вершиной $(2; -3)$. Для области внутри параболы выполняется $a + 4x - x^2 - 1 \geq 0$. Проведём горизонтальную прямую $a = a_0$. Если эта прямая пересекает множество точек, для которых выполняются оба неравенства, то для a_0 система имеет решения.

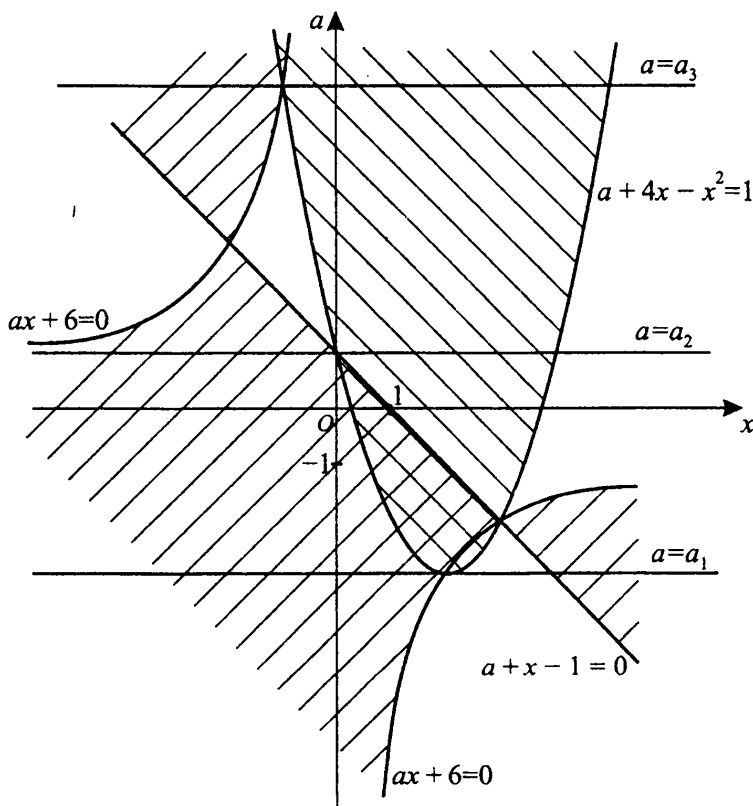


Рис. 116.

По рисунку 116 видно, что решений нет при $a < a_1$ и $a_2 < a < a_3$. Найдём a_1 и a_3 — ординаты точек пересечения линий $6 + xa = 0$ и $a + 4x - x^2 - 1 = 0$.

$$\begin{cases} 6 + xa = 0, \\ a = x^2 - 4x + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a = x^2 - 4x + 1, \\ 6 + x^3 - 4x^2 + x = 0. \end{cases}$$

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0, \quad (x + 1)(x - 2)(x - 3) = 0.$$

При $x = 2$ получаем $a = -3$.

При $x = 3$ получаем $a = -2$.

При $x = -1$ получаем $a = 6$.

Значит, $a_1 = -3$, $a_3 = 6$.

Найдём a_2 — ординату точки пересечения линий $a + 4x - x^2 = 1$ и $a + x - 1 = 0$.

$$\begin{cases} a = x^2 - 4x + 1, \\ a = 1 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 - x, \\ 1 - x = x^2 - 4x + 1, \end{cases} \quad x^2 - 3x = 0;$$

$x = 3, a = -2$.

$x = 0, a = 1$.

$a_2 = 1$.

Система не имеет решений при $a \in (-\infty; -3) \cup (1; 6)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; 6)$.

С6. а) Предположим, что в результате получился 0. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — суммы чисел в каждой из групп. Тогда

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 + 4 + \dots + 19 = \frac{3+19}{2} \cdot 17 = 187. \text{ По}$$

предположению $|x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \dots + |x_2 - x_3| + \dots + |x_4 - x_5| = 0$, откуда следует, что $|x_1 - x_2| = |x_1 - x_3| = |x_1 - x_4| = |x_1 - x_5| = 0$ (сумма неотрицательных чисел равна 0 тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел равно 0). Но в этом случае $x_1 = x_2, x_1 = x_3, x_1 = x_4, x_1 = x_5$, то есть $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$, а значит, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5x_1$, откуда $5x_1 = 187$. Но $x_1 \in N$, а 187 не делится на 5, получили противоречие, следовательно, наше предположение неверно.

б) Предположим, что в результате получилось 1. Введя такие же обозначения, как и в предыдущем пункте, устанавливаем, что один из модулей $|x_i - x_j| = 1$, а остальные равны 0. Пронумеруем x_k так, что $|x_1 - x_2| = 1$. При этом $|x_1 - x_3| = |x_2 - x_3| = 0$, откуда $x_3 = x_1$ и $x_3 = x_2$, а значит, $x_1 = x_2$. Получили противоречие, это означает, что 1 получиться не может.

в) Обозначим сумму всех модулей d . Необходимо найти наименьшее возможное значение d . Как было показано выше, равенство $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ выполняться не может. Предположим, что

среди чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 4 числа равны между собой (в этом случае пронумеруем x_i так, что $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$). Тогда $d = 4|x_5 - x_1| \geq 4$. Если $|x_5 - x_1| = 1$, то $x_5 = x_1 \pm 1$, тогда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5x_1 \pm 1$, откуда $5x_1 \pm 1 = 187$, что выполняться не может. Значит, $|x_5 - x_1| \geq 2$ и $d = 4 \cdot |x_5 - x_1| \geq 8$. Другой возможный вариант случается тогда, когда среди чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 найдётся только 3 равных между собой, скажем, $x_1 = x_2 = x_3, x_1 \neq x_4, x_1 \neq x_5$. Тогда $d = 3|x_4 - x_1| + 3|x_5 - x_1| \geq 6$. Аналогично, если среди чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 найдётся не более двух равных чисел, например, $x_1 = x_2$ и $x_1 \neq x_3, x_1 \neq x_4, x_1 \neq x_5$. В этом случае $d = 2|x_1 - x_3| + 2|x_1 - x_4| + 2|x_1 - x_5| \geq 6$. Если же все x_i различны, то $d \geq C_6^5 = 10$. Для всех возможных ситуаций мы получили оценку $d \geq 6$. Покажем, что d может равняться 6. Для этого разобьём числа от 3 до 19 на группы так, что $x_1 = x_2 = x_3, x_4 = x_5, |x_1 - x_4| = 1$. Тогда $d = 5x_1 \pm 2 = 187$, а отсюда $5x_1 + 2 = 187, x_1 = x_2 = x_3 = 37, x_4 = x_5 = 38$. Выберем такое разбиение: пусть $x_1 = 19 + 18; x_2 = 17 + 16 + 4; x_3 = 15 + 14 + 8; x_4 = 13 + 12 + 10 + 3; x_5 = 11 + 9 + 7 + 6 + 5$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 6.

Решение варианта 16

В1. Стоимость пирожного у поставщика $21 : 1,4 = 15$ рублей. Так как $70 : 15 = 4\frac{2}{3}$, то у поставщика можно купить 4 пирожных.

Ответ: 4.

В2. По графику определяем: в течение 5 дней.

Ответ: 5.

В3. $S_{ABCD} = S_{MFEN} - 2S_{AMB} - 2S_{AFD} = 8 \cdot 6 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 =$
 $= 48 - 5 - 7 = 36$ (см. рис. 117).

Ответ: 36.

В4. Бетонный: $4 \cdot 700 + 45 \cdot 250 = 2800 + 11250 = 14050$.

Пеноблочный: $2200 \cdot 6 + 3 \cdot 250 = 13200 + 750 = 13950$.

Ответ: 13950.

В5. $5^{3x+7} = 0,04; 5^{3x+7} = 5^{-2}; 3x + 7 = -2; 3x = -9; x = -3$.

Ответ: -3.

В6. $ABCD$ — прямоугольник, $AC = BD, OC = OD$ (см. рис. 118). $\angle ABC = 90^\circ$, значит, AC — диаметр.

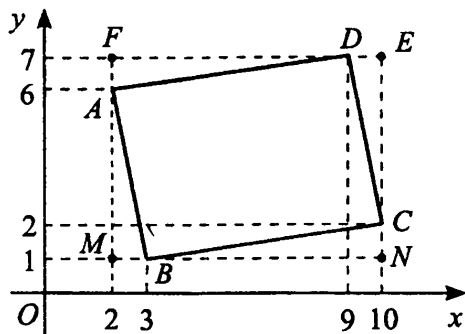


Рис. 117.

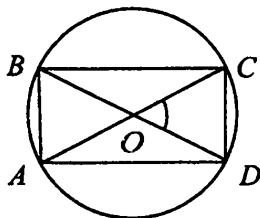


Рис. 118.

В равнобедренном $\triangle COD$ $\angle COD = 60^\circ$, значит, $\triangle COD$ — равно-
сторонний, $OC = CD = 12$.

Ответ: 12.

$$\text{В7. } 17 \cdot \operatorname{tg} 68^\circ \cdot \operatorname{tg} 158^\circ = 17 \cdot \operatorname{tg} 68^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ + 68^\circ) = \\ = 17 \cdot \operatorname{tg} 68^\circ \cdot (-\operatorname{ctg} 68^\circ) = -17.$$

Ответ: -17.

В8. Вычислить определённый интеграл $\int_2^4 f(x)dx$ означает вычислить
площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком некоторой
функции $y = f(x)$ — непрерывной и неотрицательной на отрезке $[2; 4]$,
осью Ox , прямыми $x = 2$ и $x = 4$ (см. рис. 119).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2.$$

Ответ: 2.

В9. $S_{\text{бок. шл}} = 2\pi rh$, по условию $S_{\text{бок. шл}} = 2S_{\text{осн.}}$.
 $2\pi rh = 2\pi r^2$, $h = r$. Так как $r = 7$, то $h = 7$.

Ответ: 7.

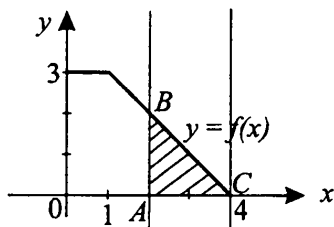


Рис. 119.

В10. Под исходом в данном эксперименте будем понимать упорядоченную пару чисел: очки, выпавшие на первой кости, и очки, выпавшие на второй кости. Всего имеется 36 равновозможных исходов. Событию «в сумме выпадет менее 4-х очков» благоприятствуют три исхода: $(1; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 1)$.

Вероятность этого события равна $\frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 0,08$.

Ответ: 0,08.

В11. Пусть a — сторона основания призмы, h — высота призмы (и цилиндра), R — радиус основания цилиндра.

$$S_{\text{бок. пр.}} = 4ah, \quad 4ah = 12, \quad 8a = 12, \quad a = 1,5.$$

$$2R = a, \quad R = \frac{a}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

В12. Высоту, на которую поднимется уровень воды в колодце после дождя, можно определить как разность расстояний, пролетаемых падающими камушками: $-5(0,4^2 - 0,8^2) = -5(0,16 - 0,64) = 5 \cdot 0,48 = 2,4$ (м).

Ответ: 2,4.

В13. Пусть x деталей шлифует мастер за один час, тогда ученик за один час шлифует $(x - 6)$ деталей. $\frac{264}{x}$ ч — время работы мастера,

$\frac{256}{x - 6}$ ч — время работы ученика.

Составим и решим уравнение: $\frac{256}{x - 6} - \frac{264}{x} = 4, \quad x > 6$.

$256x - 264(x - 6) = 4x(x - 6); 4x^2 - 16x - 1584 = 0; x^2 - 4x - 396 = 0;$
 $x_1 = 22, \quad x_2 = -18$ — не удовлетворяет условию $x > 6$.

Ответ: 22.

В14. Пусть $g(x) = \log_2 x$, тогда на промежутке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ функция $g(x)$ возрастает. Если $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, то $g(x) \in \left[\log_2 \frac{1}{2}; \log_2 2\right]$, то есть $g(x) \in [-1; 1]$. Пусть $p(g) = g^2 - 4g - 3$, тогда $p(g)$ убывает на промежутке $g \leq 2$. Итак, $y(x) = p(g(x))$ на промежутке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ убывает, значит, наибольшее значение $y(x)$ принимает при $x = \frac{1}{2}$.

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2^2 \frac{1}{2} - 4 \log_2 \frac{1}{2} + 3 = 1 + 4 + 3 = 8.$$

Ответ: 8.

С1. а) $\sin^2 x - 2\sqrt{3} \cos^2 x + \sin 2x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \cos x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0;$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

Так как значения x , при которых $\cos x = 0$, не являются корнями уравнения, то, разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим $\operatorname{tg}^2 x + (2 - \sqrt{3}) \operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} = 0$.

Пусть $t = \operatorname{tg} x$. Тогда уравнение примет вид

$$t^2 + (2 - \sqrt{3})t - 2\sqrt{3} = 0.$$

По обратной теореме Виета $t_1 = \sqrt{3}$, $t_2 = -2$. Значит, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$ или $\operatorname{tg} x = -2$; $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

б) 1) $\frac{5}{2}\pi \leq \frac{\pi}{3} + \pi n \leq 4\pi$; $\frac{5}{2} - \frac{1}{3} \leq n \leq 4 - \frac{1}{3}$; $2\frac{1}{6} \leq n \leq 3\frac{2}{3}$.

Следовательно, $n = 3$, так как $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $x = \frac{\pi}{3} + 3\pi = \frac{10}{3}\pi$.

2) Из рисунка 120 (с. 128) следует, что отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ принадлежат корни $3\pi - \operatorname{arctg} 2$ и $4\pi - \operatorname{arctg} 2$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi n$; $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

б) $\frac{10}{3}\pi$; $3\pi - \operatorname{arctg} 2$; $4\pi - \operatorname{arctg} 2$.

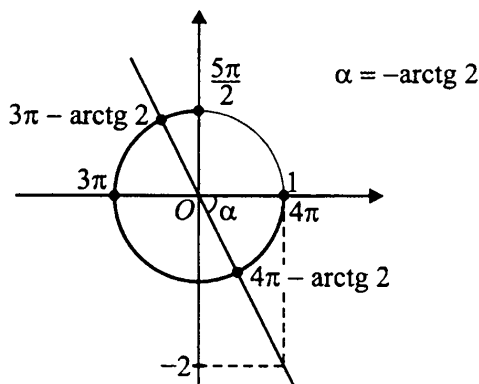


Рис. 120.

C2. Примем длину SH за единицу (см. рис. 121). Тогда $AC = BD = 2$, $AH = \frac{AC}{2} = 1$ (так как H — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$). Опустим из точки K перпендикуляр KM на $ABCD$. Имеем: $KM \parallel SH$; проекцией отрезка AS на $ABCD$ является отрезок $AH \Rightarrow M \in AH$.

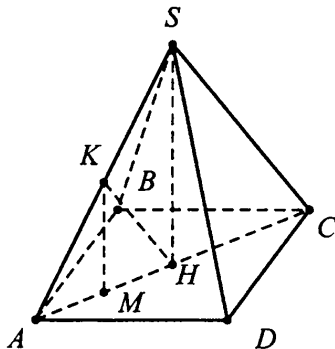


Рис. 121.

Из $\triangle ASH$ по теореме Пифагора: $AS = \sqrt{AH^2 + HS^2} = \sqrt{2}$.

$\triangle AKM \sim \triangle ASH$ по I признаку ($\angle A$ общий, $\angle AKM = \angle ASH = 90^\circ$).

$\frac{AM}{AH} = \frac{KM}{SH} = \frac{AK}{AS} = \frac{1}{3}$ (так как K делит AS в отношении $1 : 2$).

$AM = \frac{AH}{3} = \frac{1}{3}$; $KM = \frac{SH}{3} = \frac{1}{3}$; $MH = AH - MA = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Тогда тангенс искомого угла KHM может быть найден из $\triangle KHM$:

$$\operatorname{tg} \angle KHM = \frac{KM}{MH} = \frac{1}{2}, \angle KHM = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

$$\text{С3. ОДЗ: } \begin{cases} 4^{x-5} \neq 1, \\ -256x > 0, \\ -256x \neq 1, \\ \log_{\frac{1}{4}} 4^x > 0, \\ \log_{\frac{1}{4}} 4^x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5, \\ x < 0, \\ x \neq -\frac{1}{256}, \\ x < 0, \\ x \neq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \neq -\frac{1}{256}, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1}{\log_{64}(-256x)} \leq \frac{1}{\log_4(-x)} \Leftrightarrow \frac{3}{\log_4(-256x)} \leq \frac{1}{\log_4(-x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4 + \log_4(-x)} \leq \frac{1}{\log_4(-x)}. \text{ Пусть } \log_4(-x) = t, \text{ тогда}$$

$$\frac{3}{4+t} \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{3t-t-4}{t(4+t)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2t-4}{t(t+4)} \leq 0,$$

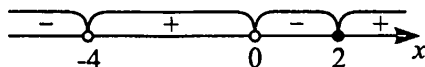


Рис. 122.

При $t < -4$:

$$\log_4(-x) < -4;$$

$$-x < 4^{-4};$$

$$x > -\frac{1}{256};$$

При $0 < t \leq 2$:

$$0 < \log_4(-x) \leq 2;$$

$$1 < -x \leq 16;$$

$$-16 \leq x < -1.$$

Учитывая ОДЗ, получаем: $x \in [-16; -1) \cup \left(-\frac{1}{256}; 0\right)$.

Ответ: $[-16; -1) \cup \left(-\frac{1}{256}; 0\right)$.

С4. Возможны два случая.

1) Точка D лежит на отрезке BC (см. рис. 123 на с. 130).

$$BC = 5, BD : DC = 2 : 3, \text{ значит, } BD = 2, DC = 3.$$

Пусть $AE = x$, $DF = y$. Так как отрезки касательных, проведённых из

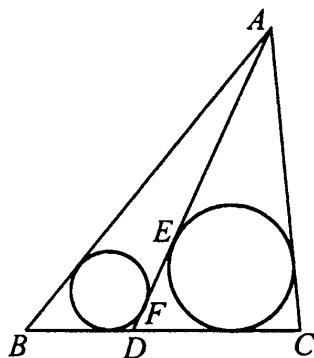


Рис. 123.

одной точки, равны, то $x = AD - ED = AD - (3 - (7 - x)) = AD + 4 - x$,
 $x = \frac{AD}{2} + 2$.

Аналогично $y = \frac{AD}{2} - 3$, и тогда $EF = AD - x - y = 1$.

2) Точка D лежит на прямой BC , вне отрезка BC (см. рис. 124). Тогда $DC : DB = 3 : 2$, $BC : BD = 1 : 2$.

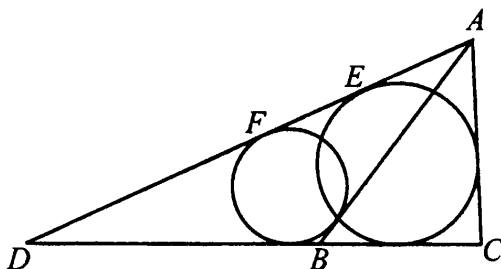


Рис. 124.

Аналогично предыдущему случаю получаем $BD = 10$, $DC = 15$,
 $x = AD - (15 - (7 - x))$, $x = \frac{AD}{2} - 4$, $AE = \frac{AD}{2} - 4$, $FD = \frac{AD}{2} + 1$,
 и тогда $EF = AD - AE - FD = 3$.

Ответ: 1; 3.

С5. Найдём множество точек $(x; a)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам системы.

Линии $(3a - 2x - 6)(x^2 + a^2 - 8x - 10a + 16) = 0$ делят плоскость Oxa на области, в каждой из которых знак выражения $(3a - 2x - 6)(x^2 + a^2 - 8x - 10a + 16)$ одинаков.

$3a - 2x - 6 = 0$ — прямая.

$x^2 + a^2 - 8x - 10a + 16 = 0$, $(x^2 - 8x + 16) + (a^2 - 10a + 25) = 25$,
 $(x - 4)^2 + (a - 5)^2 = 25$ — окружность с центром $(4; 5)$ и радиусом $R = 5$ (см. рис. 125).

$a + x^2 \leq 8x - 8$; $a \leq -x^2 + 8x - 8$; $a \leq -(x - 4)^2 + 8$. $a = -(x - 4)^2 + 8$ — парабола с вершиной $(4; 8)$.

Множество точек — внутренняя часть параболы.

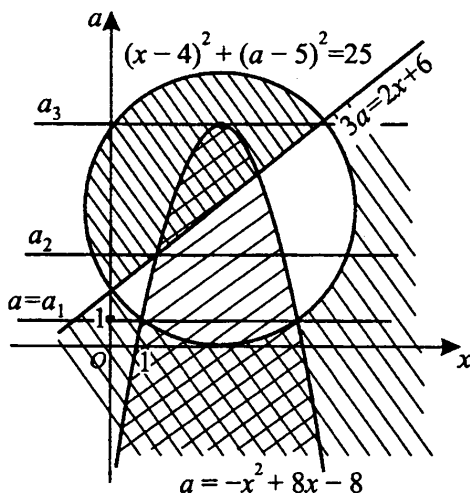


Рис. 125.

По рисунку 125 определяем, что система имеет решения при $a \in (-\infty; a_1] \cup [a_2; a_3]$.

a_3 — ордината вершины параболы, $a_3 = 8$.

a_2 — ордината точки пересечения прямой и параболы.

a_1 — ордината точки пересечения параболы и окружности.

Найдём a_2 .

$$\begin{cases} 3a = 2x + 6, \\ a + x^2 = 8x - 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3a-6}{2}, \\ a + \frac{(3a-6)^2}{4} - \frac{8(3a-6)}{2} + 8 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3a-6}{2}, \\ \frac{9}{4}a^2 - 20a + 41 = 0, \quad a = \frac{40 \pm 2\sqrt{31}}{9}. \end{cases}$$

По рисунку a_2 наименьшее $\Rightarrow a_2 = \frac{40 - 2\sqrt{31}}{9}$.

$$\begin{cases} a + x^2 = 8x - 8, \\ x^2 + a^2 - 8x - 10a + 16 = 0; \end{cases} \quad a^2 - 11a + 8 = 0, \quad a = \frac{11 \pm \sqrt{89}}{2}.$$

$$(x-4)^2 = 8-a, \quad 8-a \geq 0.$$

Так как $a \leq 8$, $a_1 = \frac{11 - \sqrt{89}}{2}$.

Есть решения, если $a \in \left(-\infty; \frac{11 - \sqrt{89}}{2}\right] \cup \left[\frac{40 - 2\sqrt{31}}{9}; 8\right]$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{11 - \sqrt{89}}{2}\right] \cup \left[\frac{40 - 2\sqrt{31}}{9}; 8\right]$.

С6. а) Предположим, что в результате получился 0. Пусть $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ — суммы чисел в каждой из групп. Тогда

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 + 6 + \dots + 23 = \frac{5+23}{2} \cdot 19 = 266. \text{ По пред-}$$

положению $|x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \dots + |x_2 - x_3| + \dots + |x_5 - x_6| = 0$, откуда следует, что $|x_1 - x_2| = |x_1 - x_3| = |x_1 - x_4| = |x_1 - x_5| = |x_1 - x_6| = 0$ (сумма неотрицательных чисел равна 0 тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел равно 0). Но в этом случае $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6$, откуда $6x_1 = 266$. Но $x_1 \in N$, а 266 не делится на 6, получили противоречие, следовательно, наше предположение неверно.

б) Предположим, что в результате получилось 1. Введя такие же обозначения, как и в предыдущем пункте, установим, что один из модулей $|x_i - x_j| = 1$, а остальные равны 0. Пронумеруем x_k так, что $|x_1 - x_2| = 1$. При этом $|x_1 - x_3| = |x_2 - x_3| = 0$, откуда $x_3 = 1$ и $x_3 = x_2$, а значит, $x_1 = x_2$. Получили противоречие, это означает, что 1 получиться не может.

в) Обозначим сумму всех модулей d . Необходимо найти наименьшее возможное значение d . Как было показано в пункте а, равенство

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6$ выполняться не может. Значит, найдутся 2 различных между собой значения. Перенумеруем x_i так, что $x_1 \neq x_2$. Заметим, что для любого $i = 3, 4, 5, 6$ среди чисел $|x_1 - x_i|$ и $|x_2 - x_i|$ хотя бы одно отлично от нуля (иначе $x_1 = x_i, x_2 = x_i \Rightarrow x_1 = x_2$). Тогда $|x_1 - x_i| + |x_2 - x_i| \geq 1$. При этом $|x_1 - x_2| \geq 1$ тоже, а значит, $d \geq |x_1 - x_2| + (|x_1 - x_3| + |x_2 - x_3|) + (|x_1 - x_4| + |x_2 - x_4|) + (|x_1 - x_5| + |x_2 - x_5|) + (|x_1 - x_6| + |x_2 - x_6|) \geq 5$. Заметим также, что $d = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \dots + |x_5 - x_6|$ имеет ту же чётность, что и число $(x_1 + x_2) + (x_1 + x_3) + \dots + (x_5 + x_6) = 5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = 5 \cdot 266$. Таким образом, d — чётное, а потому $d \geq 6$. Предположим, что $d = 6$. Если среди чисел x_3, x_4, x_5, x_6 найдутся 2 неравных ($x_3 \neq x_4$), то, аналогично вышесказанному, $|x_3 - x_4| + (|x_3 - x_5| + |x_4 - x_5|) + (|x_3 - x_6| + |x_4 - x_6|) \geq 3$, а тогда $d \geq 5 + 3, d \geq 8$. Значит, $x_3 = x_4 = x_5 = x_6$. Если $x_1 \neq x_3$ и $x_2 \neq x_3$, то $d = 4|x_1 - x_3| + 4|x_2 - x_3| + |x_1 - x_2| \geq 9$. Значит, либо $x_1 = x_3$, либо $x_2 = x_3$. Будем считать, что $x_2 = x_3$, тогда $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6$, $d = 5|x_1 - x_2|$, d делится на 5, следовательно, $d \neq 6$. Таким образом, $d \geq 8$. Покажем, что d может равняться 8. Для этого разобьём числа от 5 до 23 на группы так, что $x_1 = x_2, x_3 = x_4 = x_5 = x_6, |x_1 - x_3| = 1$. Тогда $d = 6x_1 \pm 4, 6x_1 - 4 = 266, x_1 = x_2 = 45, x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 44$. Выберем соответствующее разбиение чисел по группам. $x_1 = 23 + 22$; $x_2 = 21 + 29 + 5$; $x_3 = 20 + 18 + 6$; $x_4 = 17 + 16 + 11$; $x_5 = 15 + 14 + 8 + 7$; $x_6 = 13 + 12 + 10 + 9$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 8.

Решение варианта 17

В1. Зарплата программиста после вычета 13%-го налога на доходы составит $(1 - 0,13) \cdot 35\,000 = 30\,450$ (руб).

Ответ: 30 450.

В2. С помощью рисунка, на котором изображён график зависимости напряжения в электрической цепи фонарика от времени его работы, находим по горизонтальной оси время, по вертикальной оси — напряжение. В начале работы напряжение было 1,6 вольт, через 5 часов оно стало равным 1,0 вольт. То есть, на $1,6 - 1,0 = 0,6$ (В) упадёт напряжение в электрической цепи фонарика за первые 5 часов работы.

Ответ: 0,6.

В3. Обозначим точки $O(0; 0)$, $A(5; 6)$, $B(9; 4)$, $C(0; 6)$, $D(9; 6)$, $E(9; 0)$. Тогда $S_{OAB} = S_{OCDE} - S_{OCA} - S_{ADB} - S_{OBE}$ (см. рис. 126).

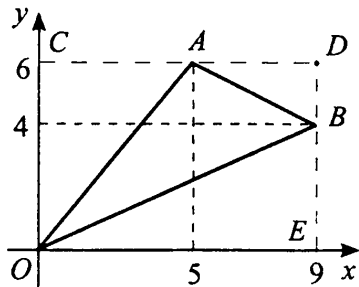


Рис. 126.

Так как $OCDE$ — прямоугольник, OCA , ADB , OBE — прямоугольные треугольники, то

$$S_{OAB} = 9 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 54 - 15 - 4 - 18 = 17.$$

Ответ: 17.

В4. Каменный: $1500 \cdot 8 + 220 \cdot 10 = 12000 + 2200 = 14200$.

Бетонный: $670 \cdot 5 + 220 \cdot 49 = 3350 + 10780 = 14130$.

Самый дешёвый вариант обойдётся в 14,13 тысяч рублей.

Ответ: 14,13.

В5. $-x = \sqrt{15 - 2x}$; $x^2 = 15 - 2x$; $x^2 + 2x - 15 = 0$; $x_1 = -5$; $x_2 = 3$. Проверка показывает, что $x = -5$ — корень исходного уравнения.

Ответ: -5 .

В6. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно найти по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника (см. рис. 127).

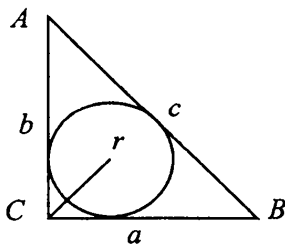


Рис. 127.

По условию $\triangle ABC$ равнобедренный, поэтому $\angle B = 45^\circ$,
 $AB = \frac{AC}{\sin 45^\circ} = (6 + 3\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 6$.

$$r = \frac{(6 + 3\sqrt{2}) \cdot 2 - 6\sqrt{2} - 6}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

$$\text{В7. } 9^{\frac{\ln 6}{\ln 3}} = (3^2)^{\log_3 6} = (3^{\log_3 6})^2 = 6^2 = 36.$$

Ответ: 36.

В8. Если на некотором интервале функция $y = f(x)$ возрастает, то на этом интервале её производная положительна. По графику определяем, что интервалу возрастания принадлежат целые точки 3, 4, 5, 6, 7. Их количество равно 5.

Ответ: 5.

В9. $S_{\text{полн. пов. конуса}} = \pi r(r + l)$, где l — длина образующей конуса, r — радиус основания конуса.

Подставим данные в формулу:

$$180\pi = 6\pi \cdot (6 + l), \quad 6 + l = 30, \quad l = 24.$$

Ответ: 24.

В10. Вероятность того, что карточки с буквами Б, Е и Г расположили подряд, образовав слово БЕГ, равна отношению числа благоприятных исходов — одна позиция БЕГ к числу всех равновозможных исходов: БЕГ, БГЕ, ЕБГ, ЕГБ, ГЕБ, ГБЕ — 6.

$$\frac{1}{6} \approx 0,166... \approx 0,17.$$

Ответ: 0,17.

В11. Пусть a — ребро куба, тогда площадь поверхности куба равна $6a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150$. Если её увеличить на 144, она станет равной $150 + 144 = 294$. Пусть b — увеличенное ребро куба, тогда $6b^2 = 294$, $b = 7$. Ребро куба нужно увеличить на $7 - 5 = 2$.

Ответ: 2.

В12. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$. Найдём p_2 при условии, что совершаемая работа не более чем $345 \cdot 10^3$ Дж, то есть $A \leq 345 \cdot 10^3$.

$$5,75 \cdot 200 \cdot 300 \log_2 \frac{p_2}{1,25} \leq 345 \cdot 10^3,$$

$$\log_2 \frac{p_2}{1,25} \leq \frac{345 \cdot 10^3}{5,75 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^4},$$

$$\log_2 \frac{p_2}{1,25} \leq 1, \log_2 \frac{p_2}{1,25} \leq \log_2 2; \frac{p_2}{1,25} \leq 2, p_2 \leq 2 \cdot 1,25; p_2 \leq 2,5,$$

наибольшее давление равно 2,5 атм.

Ответ: 2,5.

В13. Пусть x литров воды в минуту пропускает вторая труба, тогда первая труба пропускает $(x - 2)$ литров в минуту. Время заполнения резервуара для первой трубы равно $\frac{675}{x-2}$ мин, для второй — $\frac{675}{x}$ мин. Составим и

решим уравнение: $\frac{675}{x-2} - \frac{675}{x} = 2$, где $x > 2$.

$$675x - 675x + 1350 = 2x(x-2); 2x^2 - 4x - 1350 = 0; x^2 - 2x - 675 = 0; x_1 = 27, x_2 = -25. \text{ Условию } x > 2 \text{ удовлетворяет значение } x = 27 \text{ (мин).}$$

Ответ: 27.

В14. На отрезке $[-2,5; 0]$ выполняется $x + 3 > 0$.

$y = 8x - \log_2(x+3)^2 = 8x - 2\log_2(x+3); y' = 8 - \frac{2}{(x+3)\ln 2}$. При $x \in [-2,5; 0]$ выполняется неравенство $y'(x) > 0$. Следовательно, на отрезке $[-2,5; 0]$ функция $y(x)$ возрастает. Значит, наименьшее значение на отрезке функция принимает при наименьшем значении аргумента, то есть $y_{\text{наим.}} = y(-2,5) = 8 \cdot (-2,5) - \log_2(0,5)^2 = -20 + 2\log_2 2 = -18$.

Ответ: -18.

$$\text{С1. а) } 12\cos^4 x = 2\cos^2 x - 1 + 3; 12\cos^4 x - 2\cos^2 x - 2 = 0; 6\cos^4 x - \cos^2 x - 1 = 0.$$

$$\text{Обозначим } \cos^2 x = t, \text{ тогда } t \geq 0, 6t^2 - t - 1 = 0, t_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{12}, t_1 = \frac{1}{2};$$

$$t_2 = -\frac{1}{3} \text{ — не удовлетворяет условию } t \geq 0. \cos^2 x = \frac{1}{2}, |\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Все найденные решения можно объединить в одну серию: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

$$б) \pi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} \leq 2\pi; \quad 1 \leq \frac{1}{4} + \frac{m}{2} \leq 2; \quad \frac{3}{4} \leq \frac{m}{2} \leq \frac{7}{4}; \quad 1,5 \leq m \leq 3,5.$$

При $m = 2$ получаем $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$.

При $m = 3$ получаем $x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

С2. Найдём $\cos \alpha$, где α — угол между \overrightarrow{PO} и $\overrightarrow{CA_1}$. Пусть сторона куба равна a , $a > 0$. Для удобства вычислений примем $a = 10$, так как величина искомого угла не зависит от длины ребра куба.

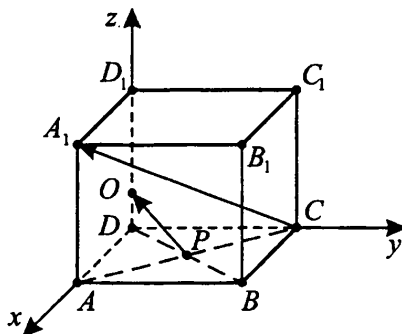


Рис. 128.

Пусть D — начало системы координат (см. рис. 128). Тогда $O(0; 0; 2)$, $P(5; 5; 0)$, $\overrightarrow{PO}(-5; -5; 2)$, $A_1(10; 0; 10)$, $C(0; 10; 0)$, $\overrightarrow{CA_1}(10; -10; 10)$,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{CA_1}| \cdot |\overrightarrow{PO}|} = \\ &= \frac{10 \cdot (-5) + (-10) \cdot (-5) + 10 \cdot 2}{\sqrt{10^2 + (-10)^2 + 10^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{9}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

С3. Пусть $t = 5^{-x^2}$, $0 < t \leq 1$. Тогда неравенство принимает вид:

$$\log_3((t-7)(5^9 \cdot t - 1)) + \log_3 \frac{t-7}{5^9 \cdot t - 1} - \log_3(25t-1)^2 > 0. \text{ Так как}$$

$t-7 < 0$, то $5^9 \cdot t - 1 < 0$; $0 < t < \frac{1}{5^9}$. Тогда

$$\begin{cases} \log_3(t-7)^2 > \log_3(25t-1)^2, \\ 0 < t < 5^{-9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-7)^2 > (25t-1)^2, \\ 0 < t < 5^{-9}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7-t > 1-25t, \\ 0 < t < 5^{-9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{1}{4} \\ 0 < t < 5^{-9}, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < 5^{-9}. \text{ Значит,}$$

$$5^{-x^2} < 5^{-9} \Leftrightarrow x^2 > 9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty).$$

Ответ: $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

С4. Возможны два случая.

1. Точка D лежит на отрезке BC (см. рис. 129). Тогда $BD = \frac{2}{5}BC = 4$,
 $DC = BC - BD = 6$.

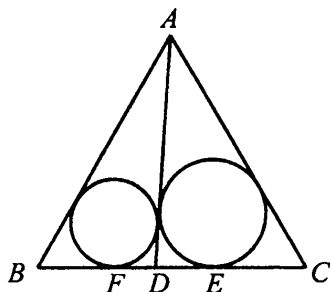


Рис. 129.

По теореме косинусов для треугольника ADC :

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos C;$$

$AD = \sqrt{10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}} = 2\sqrt{19}$. Так как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны, то из треугольника ADC следует, что $2DE = AD + DC - AC$;

$$DE = \frac{AD + DC - AC}{2}. \text{ Аналогично из треугольника } ABD \text{ получаем:}$$

$$2DF = AD + BD - AB; DF = \frac{AD + BD - AB}{2}. \text{ Тогда } EF = DF +$$

$$+ DE = \frac{1}{2}(2AD + BD + DC - AC - AB) = \frac{1}{2}(2 \cdot 2\sqrt{19} + 4 + 6 - 10 - 10) = 2\sqrt{19} - 5.$$

2. Точка D лежит вне отрезка BC (см. рис. 130).

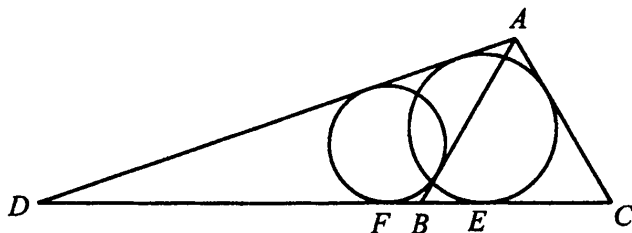


Рис. 130.

Тогда, обозначив $BD = x$, получим: $\frac{BD}{DC} = \frac{x}{x+10} = \frac{2}{3}$. Отсюда $x = BD = 20$, $DC = 30$. Аналогично п.1 получим:

$$DE = \frac{AD + DC - AC}{2}, DF = \frac{AD + BD - AB}{2}. \text{ Тогда } EF =$$

$$= DE - DF = \frac{1}{2}(AD + DC - AC - AD - BD + AB) =$$

$$= \frac{1}{2}(AB + DC - AC - BD) = \frac{1}{2}(10 + 30 - 10 - 20) = 5.$$

Ответ: $2\sqrt{19} - 5$; 5.

С5. Преобразуем исходную систему к виду $\begin{cases} |y + a| = |x| - 5, \\ (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 64. \end{cases}$

Сделаем замену $y + a = t$, тогда

$$\begin{cases} |t| = |x| - 5, \\ (x - 2)^2 + (t - a + 3)^2 = 64. \end{cases}$$

После замены $b = a - 3$ систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} |t| = |x| - 5, \\ (x - 2)^2 + (t - b)^2 = 64. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения будет:

$$1) x \geq 0; t \geq 0; t = x - 5;$$

$$2) x \geq 0; t < 0; t = 5 - x;$$

$$3) x < 0; t \geq 0; t = -x - 5;$$

$$4) x < 0; t < 0; t = x + 5.$$

Графиком второго уравнения является окружность с центром $(2; b)$ и радиусом 8 (см. рис. 131 на с. 140).

Если последняя система имеет решение (x_0, t_0, b_0) , то она имеет решение $(x_0, -t_0, -b_0)$. Поэтому число решений $(x; t)$ для b_0 и $-b_0$ одинаково. Рассмотрим $b \geq 0$. Два решения система имеет при $b \in (b_2; b_1)$, 4 решения

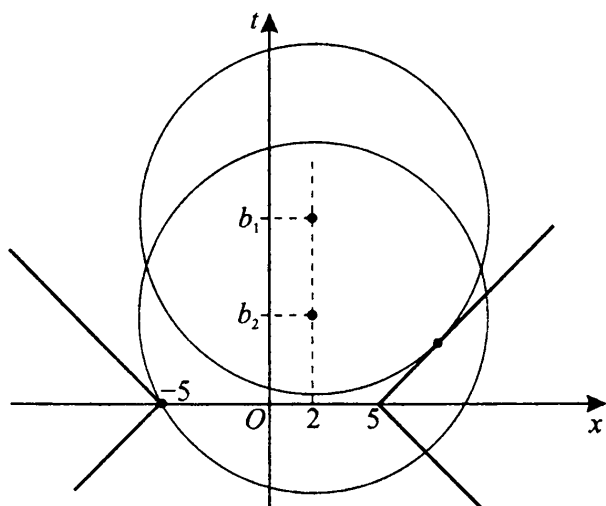


Рис. 131.

при $b \in [0; b_2)$. При $b = b_2$ три решения, при $b = b_1$ одно решение. Найдём b_2 . Окружность проходит через точку $(-5; 0)$. $(-5 - 2)^2 + (0 - b)^2 = 64$; $49 + b^2 = 64$; $b^2 = 15$; $b = \pm\sqrt{15}$, $b_2 = \sqrt{15}$.

Найдём b_1 . Окружность имеет с прямой $t = x - 5$ одну общую точку.

$$\begin{cases} t = x - 5, \\ (x - 2)^2 + (t - b)^2 = 64. \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 4 + (x - 5)^2 - 2b(x - 5) + b^2 = 64,$$

$$2x^2 - 2x(7 + b) + b^2 + 10b - 35 = 0.$$

Единственное решение это уравнение имеет, если $D = 0$;

$$\frac{D}{4} = (7 + b)^2 - 2(b^2 + 10b - 35) = 0,$$

$$-b^2 - 6b + 119 = 0,$$

$$b^2 + 6b - 119 = 0,$$

$b = -3 \pm \sqrt{128}$. Из рисунка 131 видно, что $b_1 > 0$, поэтому $b_1 = -3 + 8\sqrt{2}$.

Чётное ненулевое число решений получаем при

$$b \in (3 - 8\sqrt{2}; -\sqrt{15}) \cup (-\sqrt{15}; \sqrt{15}) \cup (\sqrt{15}; -3 + 8\sqrt{2}).$$

Так как $a = b + 3$, то

$$a \in (6 - 8\sqrt{2}; 3 - \sqrt{15}) \cup (3 - \sqrt{15}; 3 + \sqrt{15}) \cup (3 + \sqrt{15}; 8\sqrt{2}).$$

Ответ: $(6 - 8\sqrt{2}; 3 - \sqrt{15}) \cup (3 - \sqrt{15}; 3 + \sqrt{15}) \cup (3 + \sqrt{15}; 8\sqrt{2})$.

С6. а) Допустим, что на доске выписали 3 последовательных натуральных числа: $k, k + 1, k + 2$. Предположим, что стёрли первое из них, тогда

$(k+1) + (k+2) = 368, k = \frac{365}{2}$ — не является натуральным числом, следовательно, стёртое число не являлось первым. Предположим, что стёрли второе число, тогда $k + (k+2) = 368, k = 183, k \in N$, значит, стёртое число могло быть вторым и при этом равняться $k+1 = 184$. Если стёрли третье число, то $k + (k+1) = 368, k = \frac{367}{2} \notin N$, следовательно, стёртое число не могло быть третьим.

б) Предположим, что на доске выписали 9 последовательных натуральных чисел: $k, k+1, k+2, \dots, k+8$. Их сумма равна $\frac{k+(k+8)}{2} \cdot 9 = 9k+36$. Затем одно число стёрли, обозначим его как $k+\alpha$, $\alpha \in Z, 0 \leq \alpha \leq 8$. По условию $(9k+36) - (k+\alpha) = 2554, 8k = 2518 + \alpha; 8k = 8 \cdot 314 + 6 + \alpha$, значит, $(\alpha+6)$ делится на 8, откуда $\alpha = 2$. Тогда $8k = 2520, k = 315$. Стёртое число равно $k+\alpha = 315+2 = 317$.

в) Предположим, что на доске выписано n натуральных чисел: $k, k+1, \dots, k+n-1$, и одно из них стёрли, это число мы обозначим как $k+\alpha, 0 \leq \alpha \leq n-1, \alpha \in N$, тогда $S = \frac{k+k+n-1}{2} \cdot n - (k+\alpha)$, то есть

$$5000 = k(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} - \alpha. \text{ Учитывая, что } -\alpha \geq -(n-1), \text{ получим}$$

$$5000 \geq k(n-1) - (n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = (k-1)(n-1) + \frac{n(n-1)}{2}, \text{ откуда}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 5000; n^2 - n - 10^4 \leq 0,$$

$$n \in \left[\frac{1 - \sqrt{1+4 \cdot 10^4}}{2}; \frac{1 + \sqrt{1+4 \cdot 10^4}}{2} \right], n \leq \frac{1 + \sqrt{1+4 \cdot 10^4}}{2}. \text{ Но}$$

$n \in N$, значит, $n \leq 100$. Покажем, что n может быть равно 100. Действительно, пусть на доске выписаны числа $1, 2, \dots, 100$, их сумма равна 5050. Если стереть число 50, то сумма оставшихся будет равна 5000.

Ответ: а) 184; б) 317; в) 100.

Решение варианта 18

В1. 11. $\frac{10\,000}{100} = 1100$ литров бензина расходует такси за месяц. Тогда ежемесячные затраты равны: $1100 \cdot 21,2 = 23\,320$ рублей.

Ответ: 23 320.

В2. Напряжение 1,2 В было через 2 ч работы фонарика, а 0,8 В — через 8 ч работы. Напряжение упало с 1,2 В до 0,8 В за 6 ч.

Ответ: 6.

В3. $S_{MBFN} = S_{ABCD} - S_{AMN} - S_{NFD} - S_{BCF}$ (см. рис. 132).

$$S_{ABCD} = 9 \cdot 6 = 54; \quad S_{AMN} = \frac{7 \cdot 1}{2} = 3,5; \quad S_{NFD} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3;$$

$$S_{BCF} = \frac{3 \cdot 9}{2} = \frac{27}{2} = 13,5.$$

$$\text{Итак, } S_{MBFN} = 54 - 3,5 - 3 - 13,5 = 34.$$

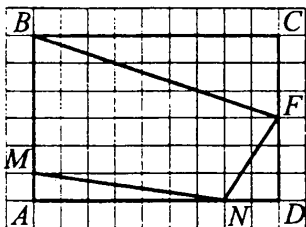


Рис. 132.

Ответ: 34.

В4. А: $8 \cdot 20 \cdot 12 + 2500 \cdot 2 = 6920$.

Б: $9,5 \cdot 23 \cdot 12 + 2350 \cdot 2 = 7322$.

В: $15 \cdot 13 \cdot 12 + 2300 \cdot 2 = 6940$.

Наименьшая сумма — 6920 рублей.

Ответ: 6920.

В5. $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x+1} = 125$, $(5^{-2})^{2x+1} = 5^3$, $-4x - 2 = 3$, $x = -1,25$.

Ответ: $-1,25$.

В6. В правильном треугольнике со стороной a радиус вписанной окружности $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. По условию $r = 5\sqrt{3}$. $a = \frac{6r}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 30$.

Ответ: 30.

В7. $5 \sin^2 \alpha + 12 \cos^2 \alpha = 9$, $\frac{5 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{12 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{9}{\cos^2 \alpha}$;

$5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 12 = 9(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)$, $4 \operatorname{tg}^2 \alpha = 3$, $\operatorname{tg}^2 \alpha = 0,75$.

Ответ: 0,75.

В8. Производная функции отрицательна в точках, принадлежащих интервалам убывания функции. Число таких целых точек на графике равно четырём.

Ответ: 4.

В9. $\triangle ABC$ равнобедренный, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = \angle C = 45^\circ$, $AB = AC$. $BC = \sqrt{2}AB$. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC , $SA \perp AB$, $SA \perp AC$. $\triangle ABS = \triangle ACS$ по двум катетам, значит, $SC = SB$. Найдём BC из $\triangle SBC$. $\triangle SBC$ равнобедренный, значит, $\angle SBC = \angle SCB = 60^\circ$, $SB = SC = CB = 2\sqrt{2}$. $AB = BC : \sqrt{2} = 2$. Из $\triangle SAB$ по теореме Пифагора $SA^2 = SB^2 - AB^2$, $SA = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2$.

Ответ: 2.

В10. Вероятность вытащить первой карточку с буквой «О» равна $\frac{1}{5}$. Если первой вытащили эту карточку, останутся четыре карточки, и вероятность вытащить карточку с буквой «Й» равна $\frac{1}{4}$. Вероятность получить слово

«ОЙ» равна $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0,05$.

Ответ: 0,05.

В11. $V = S_{\text{осн}} \cdot h = 3\sqrt{3}$, $h = \frac{3\sqrt{3}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 4}{6 \cdot 2^2 \sqrt{3}} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

В12. Подставим заданные величины в формулу

$$28 = 0,7 \cdot \frac{4200 \cdot 0,2}{21} \log_2 \frac{65 - 25}{T - 25}, \log_2 \frac{40}{T - 25} = 1, \frac{40}{T - 25} = 2;$$
$$T - 25 = 20, T = 45(^{\circ}\text{C}).$$

Ответ: 45.

В13. Пусть x литров в минуту пропускает первая труба, тогда $(x + 4)$ литров в минуту пропускает вторая труба; t минут — время, за которое вторая труба наполнит резервуар объёмом 375 литров.

По условию задачи составим систему уравнений.

$$\begin{cases} x(t + 1) = 336, \\ (x + 4)t = 375; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xt + x = 336, \\ xt + 4t = 375; \end{cases} \Rightarrow 4t - x = 39; \quad x = 4t - 39.$$

Подставляя выражение для переменной x во второе уравнение системы, получим: $4t^2 - 35t - 375 = 0$; $t_1 = 15$, $t_2 = -6,25$. Так как $t_2 < 0$, то $t = 15$.

Тогда $x(15 + 1) = 336$; $x = 21$. Первая труба пропускает 21 литр в минуту.

Ответ: 21.

$$\text{В14. } y = 6x - \log_2(x + 6)^2 = 6x - 2\log_2(x + 6), y' = 6 - \frac{2}{(x + 6) \ln 2}.$$

При $x \in [-5, 5; 0]$ выполняется неравенство $y'(x) > 0$. Следовательно, на отрезке $[-5, 5; 0]$ функция $y(x)$ возрастает. Значит, наименьшее значение на отрезке функция принимает на его левой границе, то есть

$$y_{\text{наим.}} = y(-5, 5) = 6 \cdot (-5, 5) - \log_2(0, 5)^2 = -33 + 2\log_2 2 = -31.$$

Ответ: -31.

$$\text{С1. а) ОДЗ: } \sin x \neq 0, \cos x \neq 0, x \neq \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{2} \sin 4x, \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \sin 4x, \sin 2x = 2 \sin 2x \cos 2x;$$

$$\sin x \cos x(1 - 2 \cos 2x) = 0.$$

$$\text{Учитывая ОДЗ, } \cos 2x = \frac{1}{2}; 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

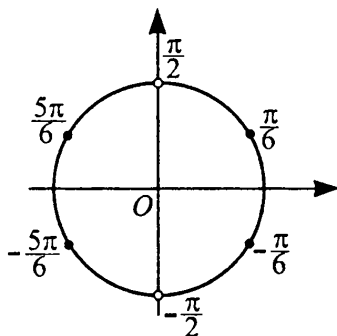


Рис. 133.

б) Выберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (см. рис. 133).

Получим искомые корни: $x = -\frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$.

С2. Введём систему координат, как показано на рис. 134.

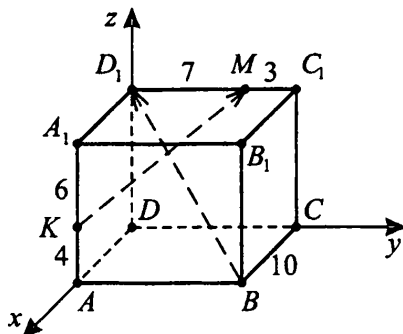


Рис. 134.

Из условия получим:

$$K(10; 0; 4), M(0; 7; 10), \overrightarrow{KM}(-10; 7; 6);$$

$$B(10; 10; 0), D_1(0; 0; 10), \overrightarrow{BD_1}(-10; -10; 10).$$

Пусть α — искомый угол. Тогда $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{KM}| \cdot |\overrightarrow{BD_1}|} =$

$$= \frac{(-10) \cdot (-10) + 7 \cdot (-10) + 6 \cdot 10}{\sqrt{10^2 + 7^2 + 6^2} \cdot \sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2}} = \frac{9}{\sqrt{555}}.$$

Ответ: $\frac{9}{\sqrt{555}}.$

С3. $\log_2 \left((2^{-x^2} - 4)(2^{-x^2+1} - 1) \right) - \log_2 \frac{2^{-x^2} - 4}{2^{-x^2+1} - 1} \geq \log_2 (2^{5-x^2} - 8)^2.$

Заметим, что при любых x выполняется $2^{-x^2} - 4 < 0$.

ОДЗ. $\begin{cases} (2^{-x^2} - 4)(2^{-x^2+1} - 1) > 0, \\ 2^{5-x^2} - 8 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{-x^2+1} - 1 < 0, \\ 2^{5-x^2} \neq 2^3; \end{cases}$

$\begin{cases} -x^2 + 1 < 0, \\ x^2 \neq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} |x| > 1, \\ |x| \neq \sqrt{2}. \end{cases}$

$$\log_2 \frac{(2^{-x^2} - 4)(2^{-x^2+1} - 1)(2^{-x^2+1} - 1)}{(2^{-x^2} - 4)} \geq \log_2 (32 \cdot 2^{-x^2} - 8)^2,$$

$$\log_2 (2^{-x^2+1} - 1)^2 \geq \log_2 (32 \cdot 2^{-x^2} - 8)^2,$$

$|2^{-x^2+1} - 1| \geq |32 \cdot 2^{-x^2} - 8|$. Учитывая, что на ОДЗ $2^{-x^2} < 2^{-1}$, получим

$$1 - 2 \cdot 2^{-x^2} \geq |32 \cdot 2^{-x^2} - 8|,$$

$$\left[\begin{cases} 32 \cdot 2^{-x^2} - 8 \geq 0, \\ 1 - 2 \cdot 2^{-x^2} \geq 32 \cdot 2^{-x^2} - 8, \\ 32 \cdot 2^{-x^2} - 8 < 0, \\ 1 - 2 \cdot 2^{-x^2} \geq 8 - 32 \cdot 2^{-x^2}; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} |x| \leq \sqrt{2}, \\ 2^{-x^2} \leq \frac{9}{34}, \\ |x| > \sqrt{2}, \\ 2^{-x^2} \geq \frac{7}{30}; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} |x| \leq \sqrt{2}, \\ -x^2 \leq \log_2 \frac{9}{34}, \\ |x| > \sqrt{2}, \\ -x^2 \geq \log_2 \frac{7}{30}; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} |x| \leq \sqrt{2}, \\ |x| \geq \sqrt{\log_2 \frac{34}{9}}, \\ |x| > \sqrt{2}, \\ |x| \leq \sqrt{\log_2 \frac{30}{7}}. \end{cases} \right.$$

Заметим, что $\log_2 \frac{34}{9} < \log_2 4 = 2$, $\log_2 \frac{30}{7} > \log_2 4 = 2$. Тогда получим

$$\sqrt{\log_2 \frac{34}{9}} \leq |x| \leq \sqrt{\log_2 \frac{30}{7}}.$$

Учитывая ОДЗ, получим $\sqrt{\log_2 \frac{34}{9}} \leq |x| < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < |x| \leq \sqrt{\log_2 \frac{30}{7}}$.

Ответ: $\sqrt{\log_2 \frac{34}{9}} \leq |x| \leq \sqrt{\log_2 \frac{30}{7}}$, $|x| \neq \sqrt{2}$.

С4. Возможны два случая.

1. Точка D лежит на отрезке BC (см. рис. 135).

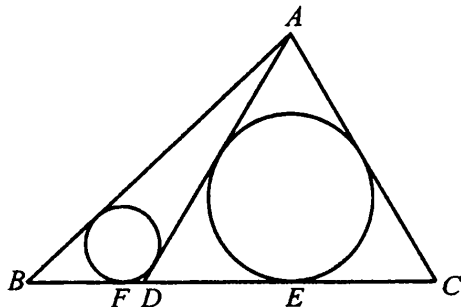


Рис. 135.

Тогда $BD = \frac{2}{7}BC = 4$; $DC = BC - BD = 10$. По теореме косинусов для треугольника ABC : $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C$;

$\cos C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC} = \frac{14^2 + 10^2 - 4 \cdot 39}{2 \cdot 14 \cdot 10} = \frac{1}{2}$, $\angle C = 60^\circ$. Так как $\triangle ADC$ равнобедренный, то $\angle A = \angle D = 60^\circ$ и $AD = DC = AC = 10$. Так как отрезки касательных, проведённые к окружностям из одной точки, равны, то из треугольника ADC следует, что $2DE = AD + DC - AC$; $DE = \frac{AD + DC - AC}{2} = 5$. Аналогично из треугольника ABD получаем: $2DF = AD + BD - AB$; $DF = \frac{AD + BD - AB}{2} = 7 - \sqrt{39}$. Тогда $EF = DE - DF = 12 - \sqrt{39}$.

2. Точка D лежит вне отрезка BC (см. рис. 136).

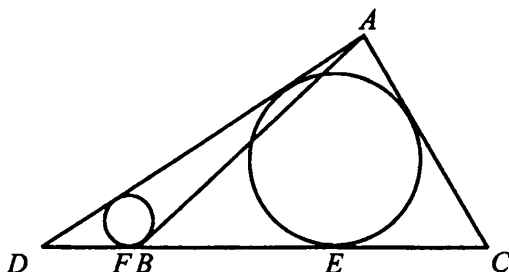


Рис. 136.

Тогда, обозначив $BD = x$, получим: $\frac{BD}{DC} = \frac{x}{x + 14} = \frac{2}{5}$.

$x = BD = \frac{28}{3}$, $DC = \frac{70}{3}$. Аналогично п. 1 получим:

$$DE = \frac{AD + DC - AC}{2}, DF = \frac{AD + BD - AB}{2}. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} EF &= DE - DF = \frac{1}{2}(AD + DC - AC - AD - BD + AB) = \\ &= \frac{1}{2}(AB + DC - AC - BD) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{39} + \frac{70}{3} - 10 - \frac{28}{3}\right) = \sqrt{39} + 2. \end{aligned}$$

Ответ: $12 - \sqrt{39}$; $2 + \sqrt{39}$.

С5. Пусть $x + a = t$, $x = t - a$, тогда исходную систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} |y| = |t| + 2, \\ (t - a - 2)^2 + (y - 4)^2 = 49. \end{cases}$$

После замены $a + 2 = b$ система примет вид

$$\begin{cases} |y| = |t| + 2, \\ (t - b)^2 + (y - 4)^2 = 49. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения будет:

1) $y = t + 2, y \geq 0; t \geq 0;$

2) $y = -t + 2, y \geq 0; t < 0;$

3) $y = t - 2, y < 0; t < 0;$

4) $y = -t - 2, y < 0; t \geq 0.$

Графиком второго уравнения системы будет окружность с центром в точке $(b; 4)$ и радиусом 7 (см. рис. 137).

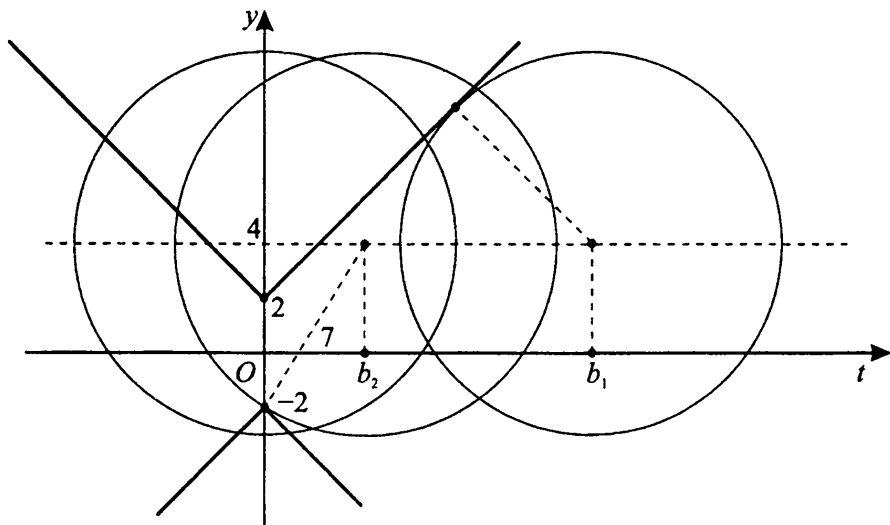


Рис. 137.

Из симметрии видно, что если при некотором b_0 есть решение $(t_0; y_0)$, то при $b = -b_0$ есть решение $(-t_0; y_0)$, поэтому достаточно рассмотреть $b \geq 0$.

По рисунку 137 видно, что при $b = 0$ система имеет 4 решения. Чётное ненулевое число решений будет при $b \in [0; b_2) \cup (b_2; b_1)$ и для противоположных значений b .

Найдём b_2 . Окружность проходит через $(0; -2)$.

$$(0 - b)^2 + (-2 - 4)^2 = 49; b^2 = 13; b = \pm\sqrt{13}, b_2 = \sqrt{13}.$$

Найдём b_1 . Окружность касается прямой $y = t + 2$.

$$(t - b)^2 + (t + 2 - 4)^2 = 49,$$

$2t^2 - 2t(b+2) + b^2 + 4 - 49 = 0$. Для касания должно выполняться условие $D = 0$;

$$(b+2)^2 - 2(b^2 - 45) = 0; \quad b^2 + 4b + 4 - 2b^2 + 90 = 0; \quad -b^2 + 4b + 94 = 0; \\ b^2 - 4b - 94 = 0, \quad b = 2 \pm 7\sqrt{2}, \quad b_1 = 2 + 7\sqrt{2}.$$

$b \in [0; \sqrt{13}) \cup (\sqrt{13}; 2 + 7\sqrt{2})$. Учитывая, что противоположные значения b также удовлетворяют условию задачи, чётное ненулевое число решений будет при $b \in (-2 - 7\sqrt{2}; -\sqrt{13}) \cup (-\sqrt{13}; \sqrt{13}) \cup (\sqrt{13}; 2 + 7\sqrt{2})$. Тогда $a \in (-4 - 7\sqrt{2}; -2 - \sqrt{13}) \cup (-\sqrt{13} - 2; \sqrt{13} - 2) \cup (\sqrt{13} - 2; 7\sqrt{2})$.

Ответ: $(-4 - 7\sqrt{2}; -2 - \sqrt{13}) \cup (-\sqrt{13} - 2; \sqrt{13} - 2) \cup (\sqrt{13} - 2; 7\sqrt{2})$.

С6. а) Допустим, что на доске выписали 3 последовательных натуральных числа: $k, k+1, k+2$. Предположим, что стёрли первое из них, тогда

$$(k+1) + (k+2) = 478, \quad k = \frac{475}{2} \text{ — не является натуральным числом, сле-}$$

довательно, стёртое число не являлось первым. Предположим, что стёрли второе число, тогда $k + (k+2) = 478, k = 238, k \in N$, значит, стёртое число могло быть вторым и при этом оно равнялось $k+1 = 239$. Если стёрли третье число, то $k + (k+1) = 478, k = \frac{477}{2} \notin N$, следовательно, стёртое число не могло быть третьим.

б) Предположим, что на доске выписали 8 последовательных натуральных чисел: $k, k+1, k+2, \dots, k+7$. Их сумма равна

$$\frac{k + (k+7)}{2} \cdot 8 = 8k + 28. \text{ Затем одно число стёрли, обозначим его как}$$

$$k + \alpha, \alpha \in Z, 0 \leq \alpha \leq 7. \text{ По условию } (8k + 28) - (k + \alpha) = 2423,$$

$$7k = 2395 + \alpha; \quad 7k = 7 \cdot 342 + 1 + \alpha, \text{ значит, } (\alpha + 1) : 7, \text{ откуда } \alpha = 6. \text{ Тогда } k = 343. \text{ Стёртое число равно } k + \alpha = 343 + 6 = 349.$$

в) Предположим, что на доске выписано n натуральных чисел: $k, k+1, \dots, k+n-1$ и одно из них стёрли. Обозначим стёртое число $k + \alpha$,

$$\alpha \in Z, 0 \leq \alpha \leq n-1, \text{ тогда } S = \frac{k + k + n - 1}{2} \cdot n - (k + \alpha), \text{ то есть}$$

$$4000 = k(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} - \alpha. \text{ Учитывая, что } -\alpha \geq -(n-1), \text{ по-}$$

$$\text{лучим, что } k(n-1) - \alpha \geq 0 \text{ и } \frac{n(n-1)}{2} \leq 4000, \quad n^2 - n - 8000 \leq 0,$$

$$n \in \left[\frac{1 - \sqrt{1 + 32000}}{2}; \frac{1 + \sqrt{1 + 32000}}{2} \right], \quad n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 32000}}{2}. \text{ Но}$$

$n \in N$, значит, $n \leq 89$. Покажем, что n может быть равно 89. Действи-

тельно, пусть на доске выписаны числа $1, 2, \dots, 89$, их сумма равна 4005. Если стереть число 5, то сумма оставшихся чисел будет равна 4000.

Ответ: а) 239; б) 349; в) 89.

Решение варианта 19

В1. Новая цена составляет $\frac{5852}{6650} \cdot 100\% = 88\%$ от старой, значит, цена была снижена на 12%.

Ответ: 12.

В2. По рисунку определяем, что 9 ноября 1 евро стоил 35 рублей, а 20 ноября — 36 рублей. Таким образом, купив евро 9, а продав 20 ноября, человек получит по одному рублю дохода на каждый евро, то есть всего 100 рублей.

Ответ: 100.

В3. Обозначим вершины $A(-20; 0)$, $B(0; 21)$, $C(-20; 21)$ и отметим их на координатной плоскости (см. рис. 138). Получившийся треугольник — прямоугольный, AB — его гипотенуза. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Искомым центром является точка T — середина AB . Абсцисса точки T равна $\frac{-20+0}{2} = -10$.

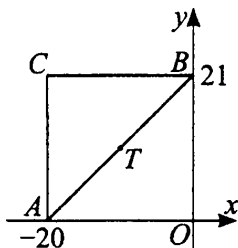


Рис. 138.

Ответ: -10.

В4. А: $6,5 \cdot 15 \cdot 16 + 3670 \cdot 2 = 8900$ (руб.).

Б: $9,6 \cdot 20 \cdot 15 + 3200 \cdot 2 = 9280$ (руб.).

В: $13,2 \cdot 15 \cdot 15 + 3250 \cdot 2 = 9470$ (руб.).

Наименьшая сумма — 8900 рублей.

Ответ: 8900.

B5. $\log_{\frac{1}{4}}(1-3x) = -2$; $1-3x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; $1-3x = 16$; $3x = -15$; $x = -5$.

Ответ: -5.

B6. $CH^2 = CB^2 - HB^2 = 64 - 28 = 36$, $CH = 6$ (см. рис. 139).

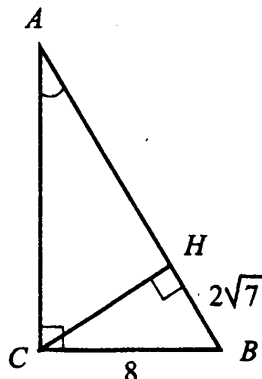


Рис. 139.

$$\triangle ABC \sim \triangle CHB \Rightarrow \angle A = \angle HCB \Rightarrow$$

$$\cos \angle A = \cos \angle HCB = \frac{CH}{CB} = \frac{6}{8} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

B7. $2x - 7 + \sqrt{4x^2 - 20x + 25} = 2x - 7 + \sqrt{(2x-5)^2} = 2x - 7 + |2x-5|$.

Подставим $x = 2,5$, получим $2x - 7 + |2x - 5| = -2$.

Ответ: -2.

B8. На промежутке $(-3; 10)$ точек экстремума функции $y = f(x)$ ровно пять. Сумма их абсцисс равна: $(-2) + (-1) + 2 + 4 + 8 = 11$.

Ответ: 11.

B9. Дано: $SABCD$ — правильная пирамида (см. рис. 140 на с. 152),

$$\angle ASC = 90^\circ, AB = \sqrt{2}.$$

Найти SO — высоту.

Так как пирамида $SABCD$ — правильная, то основание $ABCD$ — квадрат, следовательно, $AB = BC = \sqrt{2}$. По теореме Пифагора находим $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $AC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4$, $AC = \sqrt{4} = 2$.

В $\triangle SAC$ по условию $\angle ASC = 90^\circ$, $AC = 2$, $SA = SC = x$, $x > 0$. По теореме Пифагора $SA^2 + SC^2 = AC^2$, $x^2 + x^2 = 4$, $2x^2 = 4$, $x^2 = 2$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$ (не удовлетворяет условию $x > 0$), таким образом, $SA = SC = \sqrt{2}$.

ника равна: $S_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4h} = \frac{9}{4h}$. Объём пирамиды равен:

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\Delta} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4h} \cdot h = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

В12. $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$.

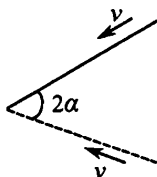


Рис. 141.

Для ответа на вопрос, под каким наименьшим углом 2α должны двигаться тела (см. рис. 141), чтобы в результате соударения выделилось не менее 24 джоулей, составим и решим неравенство:

$$3 \cdot 4^2 \sin^2 \alpha \geq 24.$$

$$\sin^2 \alpha \geq \frac{24}{48}, \sin^2 \alpha \geq \frac{1}{2}, \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \geq 0.$$

Обозначим $\sin \alpha = t$, $0 < t \leq 1$.
$$\begin{cases} \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0, \\ 0 < t \leq 1; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1 \text{ (см. рис. 142), } t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ — наименьшее значение. } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$, $2\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ — наименьший угол, под которым должны двигаться тела.

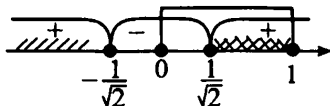


Рис. 142.

Ответ: 90.

В13. Обозначим массу первого сплава x кг, а второго — $(x + 2)$ кг, тогда масса третьего сплава равна $x + (x + 2) = (2x + 2)$ кг. В первом сплаве содержится $0,15x$ кг железа, во втором — $0,3(x + 2)$ кг, а в третьем —

$0,25 \cdot (2x + 2)$ кг. Зная, что третий сплав получили из первых двух, составим уравнение:

$$0,15x + 0,3(x + 2) = 0,25(2x + 2).$$

$$0,15x + 0,3x - 0,25 \cdot 2x = 0,25 \cdot 2 - 0,3 \cdot 2,$$

$$0,45x - 0,50x = 0,5 - 0,6,$$

$$0,05x = 0,1,$$

$$x = 0,1 : 0,05 = 2.$$

$$x = 2.$$

$$2 \cdot 2 + 2 = 6 \text{ (кг)} — \text{масса третьего сплава.}$$

Ответ: 6.

В14. Задана функция $y = x^{\frac{5}{2}} - 6 \cdot x^{\frac{3}{2}} + 18$. ОДЗ: $x \geq 0$. Найдём производную функции $y'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - 6 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$; $y'(x) = 0$, $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot (5x - 18) = 0$,

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{18}{5} = 3,6.$$

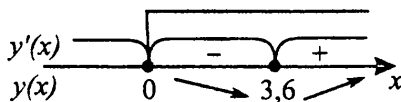


Рис. 143.

$x = 3,6$ — точка минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с минуса на плюс (см. рис. 143).

Ответ: 3,6.

С1. а) $2 \log_4^2 \sin x - 7 \log_4 \sin x + 21 = (\sqrt{25 - x^2})^2 + x^2,$

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ 25 - x^2 \geq 0, \\ 2 \log_4^2 \sin x - 7 \log_4 \sin x + 21 = 25 - x^2 + x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ -5 \leq x \leq 5, \\ 2 \log_4^2 \sin x - 7 \log_4 \sin x - 4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \pi, -5 \leq x < -\pi, \\ 2 \log_4^2 \sin x - 7 \log_4 \sin x - 4 = 0; \end{cases}$$

$$2 \log_4^2 \sin x - 7 \log_4 \sin x - 4 = 0, \text{ сделаем замену } y = \log_4 \sin x.$$

$$2y^2 - 7y - 4 = 0, y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = 4. \text{ Если } \log_4 \sin x = 4, \text{ то } \sin x = 4^4 —$$

$$\text{нет решений. То есть } \log_4 \sin x = -\frac{1}{2}, \sin x = 4^{-\frac{1}{2}}, \sin x = \frac{1}{2},$$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. С учётом условий получаем $x = \frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.

б) Указанному промежутку принадлежит только число $x = -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

С2. 1. Пусть AK — высота треугольника ABC , проведённая из вершины A к стороне BC (см. рис. 144). Так как по условию $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = AC = 10$) и A, B, C лежат на поверхности шара, то проекцией точки O на плоскость ABC является точка O_1 — центр описанной окружности треугольника ABC и $O_1 \in AK$. Следовательно, угол между прямой AO и плоскостью треугольника равен $\angle OAK$.

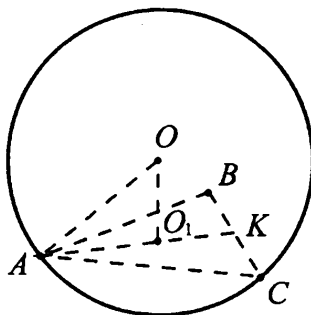


Рис. 144.

2. Рассмотрим $\triangle ABC$ (см. рис. 145). Пусть прямая l является серединным перпендикуляром к стороне AC и $L = l \cap AC$. Тогда $AL = LC$, $O_1 \in l$, $\triangle ALO_1$ — прямоугольный.

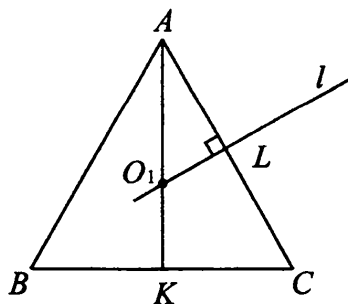


Рис. 145.

$\triangle ALO_1 \sim \triangle KAC$ ($\angle A$ — общий, $\angle ALO_1 = \angle AKC = 90^\circ$).

$$\frac{AK}{AL} = \frac{AC}{AO_1} \Rightarrow$$

$$AO_1 = \frac{AC \cdot AL}{AK} = \frac{AC \cdot \frac{1}{2}AC}{\sqrt{AC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10}{\sqrt{10^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2}} = \frac{25}{4}.$$

3. Из $\triangle AOO_1$ находим $\cos \angle O_1AO = \frac{AO_1}{AO} = \frac{25}{4 \cdot 12,5} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle OAK = \angle O_1AO = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

С3. 1) Решим первое неравенство системы.

$$(2^x)^2 - (2^{100} + 2^{\frac{7}{2}}) \cdot 2^x + 2^{100} 2^{\frac{7}{2}} < 0. \text{ Сделаем замену } t = 2^x, \text{ тогда}$$

$$t^2 - (2^{100} + 2^{\frac{7}{2}})t + 2^{100} \cdot 2^{\frac{7}{2}} < 0.$$

$$\text{Решим уравнение } t^2 - (2^{100} + 2^{\frac{7}{2}})t + 2^{100} 2^{\frac{7}{2}} = 0. \text{ Получим } t_1 = 2^{100},$$

$$t_2 = 2^{\frac{7}{2}}.$$

$$2^{\frac{7}{2}} < t < 2^{100}; \frac{7}{2} < x < 100 \Leftrightarrow \frac{7}{2} < x < 100 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{7}{2}; 100\right).$$

2) Решим второе неравенство системы.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x - 2 > 0, \\ \frac{x-3}{\sqrt{x-2}} > 0, \\ \frac{x-3}{\sqrt{x-2}} \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x > 3, \\ x - 3 \neq \sqrt{x-2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 6x + 9 \neq x - 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 7x + 11 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x \neq \frac{7 + \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Решим неравенство на ОДЗ. Обозначим $t = \log_3 \frac{x-3}{\sqrt{x-2}}, t + \frac{1}{t} \leq 2$;

$$\frac{t^2 - 2t + 1}{t} \leq 0, t \in (-\infty; 0) \cup \{1\}. \text{ Вернёмся к исходной переменной.}$$

$$\text{а) } \log_3 \frac{x-3}{\sqrt{x-2}} < 0, \frac{x-3}{\sqrt{x-2}} < 1, x \in \left(3; \frac{7 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

$$6) \log_3 \frac{x-3}{\sqrt{x-2}} = 1, \frac{x-3}{\sqrt{x-2}} = 3; x-3 = 3\sqrt{x-2}; x^2 - 6x + 9 = 9x - 18, \\ x^2 - 15x + 27 = 0, x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 108}}{2} = \frac{15 \pm 3\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Учитывая, что } x > 3, \text{ получим } x = \frac{15 + 3\sqrt{13}}{2}.$$

$$3) \text{ Найдём решение исходной системы. Заметим, что } 3 < \frac{7}{2} < \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \\ \text{и } \frac{15 + 3\sqrt{13}}{2} < 100, \text{ получаем } x \in \left(\frac{7}{2}; \frac{7 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left\{\frac{15 + 3\sqrt{13}}{2}\right\}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{7}{2}; \frac{7 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left\{\frac{15 + 3\sqrt{13}}{2}\right\}.$$

С4. Из условия следует, что K, L, M, N — середины соответствующих сторон трапеции. Следовательно, $KLMN$ — параллелограмм, и его площадь равна половине площади трапеции. Возможны два случая:

1) $\angle ABD$ — острый и 2) $\angle ABD$ — тупой. На рис. 146 изображён случай 2.

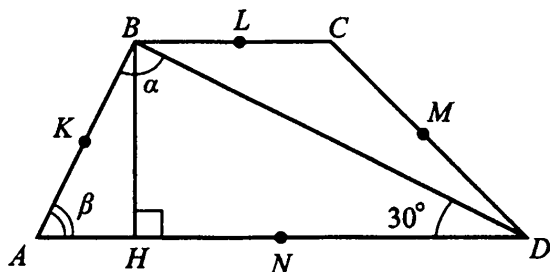


Рис. 146.

Обозначим $\alpha = \angle ABD$, $\beta = \angle BAD$.

По теореме синусов для $\triangle ABD$ имеем:

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AD}{\sin \alpha}, \quad AD = \frac{AB \cdot \sin \alpha}{\sin 30^\circ} = 6 \cdot \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = 8.$$

$BH = \frac{1}{2}BD$ как катет, лежащий против угла в 30° в прямоугольном $\triangle BHD$.

$$\sin \beta = \sin\left(\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6}.$$

Так как возможны два случая, то $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

$$\text{Тогда } \sin \beta = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}}{6}.$$

$$\text{Из } \triangle ABH: \sin \beta = \frac{BH}{AB}; BH = AB \cdot \sin \beta = 2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{Итак, } S_{KLMN} &= \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BH = \\ &= \frac{1}{4} (8 + 6) \cdot (2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}) = \frac{7}{2} (2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{7}{2} (2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}).$$

С5. 1) Решим уравнение $x^2 + (a - 5)x + 4 - a = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{(5 - a) \pm \sqrt{a^2 - 10a + 25 + 4a - 16}}{2} = \frac{(5 - a) \pm (a - 3)}{2};$$

$x_1 = 1, x_2 = 4 - a$. Таким образом, $x^2 + (a - 5)x + 4 - a < 0$ для всех x , лежащих между корнями x_1 и x_2 , и $x^2 + (a - 5)x + 4 - a \geq 0$ для всех оставшихся значений x .

2) Пусть $f(x) = x^2 + (1 - 5a)x + 2a^2 + a + |x^2 + (a - 5)x + 4 - a|$, тогда

$$f(x) = \begin{cases} (6 - 6a)x + 2a^2 + 2a - 4 & \text{при } x, \text{ лежащих между } x_1 \text{ и } x_2, \\ 2x^2 + (-4 - 4a)x + 2a^2 + 4 & \text{при всех оставшихся значениях } x. \end{cases}$$

Таким образом, график $f(x)$ представляет собой параболу, из которой исключён фрагмент, соответствующий $x \in [x_1; x_2]$ или $x \in [x_2; x_1]$, концы оставшихся частей параболы соединены отрезком (см. рис. 147). При $x_1 = x_2$ ($a = 3$) графиком $f(x)$ является парабола (см. рис. 147 д).

Парабола $g(x) = 2x^2 + (-4 - 4a)x + 2a^2 - 4$ имеет вершину при $x_B = a + 1$.

В случаях a и $б$, когда точки x_1 и x_2 лежат по одну сторону от вершины параболы $g(x)$, и в случае $д$, когда $a = 3$, наименьшее значение $f(x)$ принимает в точке $x_B = a + 1$.

Условие того, что точки x_1 и x_2 лежат по одну сторону от x_B , записывается в виде $(x_1 - x_B)(x_2 - x_B) \geq 0$, то есть $(1 - (a + 1))(4 - a - (a + 1)) \geq 0$, $-a(3 - 2a) \geq 0, a(2a - 3) \geq 0, a \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. В этом случае

$$f(a + 1) = 2(a + 1)^2 - 4(a + 1)^2 + 2a^2 + 4 = -2a^2 - 4a - 2 + 2a^2 + 4 = -4a + 2.$$

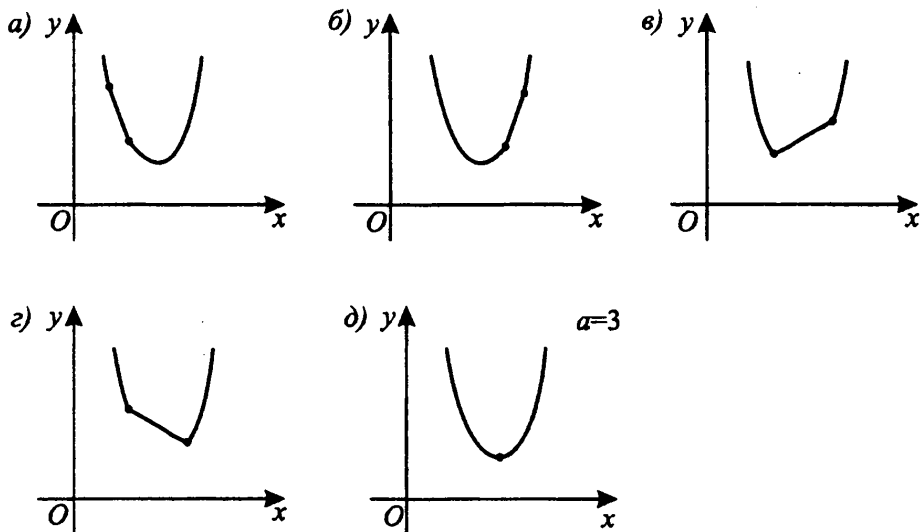


Рис. 147.

$f(a+1) < 4$ означает, что $-4a + 2 < 4$, то есть $a > -\frac{1}{2}$. С учётом того, что $a \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$, получим $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Если x_1 и x_2 лежат по разные стороны от x_b , то $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. Заметим, что в этом случае $f(1) < 4$. Действительно, условие $f(1) < 4$ равносильно неравенству $a^2 - 2a - 1 < 0$, решением которого является интервал $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$. При этом интервал $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ является частью интервала $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$. Значит, для всех $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ выполняется $f_{\text{наим}} \leq f(1) < 4$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

С6. По условию задачи все города делятся на 2 группы. Внутри каждой группы все города попарно соединены прямыми дорогами, а между городами из разных групп дорог нет. Пусть в первой группе x_1 город, а во второй — x_2 ($x_1, x_2 \in N, x_1 + x_2 = 20$).

а) В первой группе из каждого города выходит $(x_1 - 1)$ дорога, во второй — $(x_2 - 1)$. Если $x_1 - 1 = x_2 - 1$, то $x_1 = x_2$. Но так как $x_1 + x_2 = 20$,

получим $x_1 = x_2 = 10$. Значит, такая ситуация возможна, при этом из каждого города выходит 9 дорог.

б) Если из столицы выходит 11 дорог, то в этой группе, к которой относится столица, 12 городов, тогда в другой группе $20 - 12 = 8$ городов. Посчитаем количество дорог, соединяющих города в той группе, к которой относится столица: из 12 городов выходит по 11 дорог $12 \cdot 11 = 132$, но при таком подсчёте каждую дорогу мы посчитали дважды, значит, искомым дорог $\frac{132}{2} = 66$. Аналогично города второй группы соединяются

$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ дорогами. Всего получается $28 + 66 = 94$ дороги.

в) Если в первой группе x_1 город, во второй x_2 ($1 \leq x_1 \leq 19$, $1 \leq x_2 \leq 19$, $x_1 + x_2 = 20$), то всего $\frac{x_1(x_1 - 1)}{2} + \frac{x_2(x_2 - 1)}{2}$ дорог.

Учитывая, что $x_2 = 20 - x_1$, получаем, что всего дорог

$$\begin{aligned} \frac{x_1(x_1 - 1)}{2} + \frac{(20 - x_1)(19 - x_1)}{2} &= \frac{x_1^2 - x_1 - 39x_1 + x_1^2 + 20 \cdot 19}{2} = \\ &= x_1^2 - 20x_1 + 190. \end{aligned}$$

Пусть $f(x) = x^2 - 20x + 190$ — графиком такой функции является парабола с вершиной с абсциссой $x_v = 10$, ветви которой направлены вверх (см. рис. 148). Наибольшее значение $f(x)$ достигается при тех значениях x , которые наиболее удалены от $x_v = 10$. Среди натуральных чисел от 1 до 19 это $x_1 = 1$ и $x_1 = 19$, при этом $f(1) = f(19) = 171$.

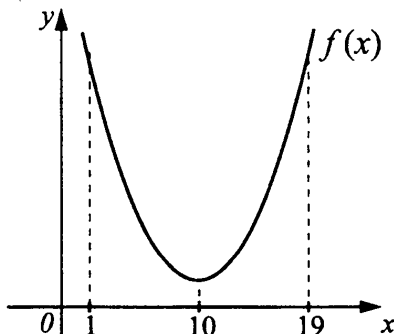


Рис. 148.

Ответ: а) да; б) 94; в) 171.

Решение варианта 20

В1. Цитрусовых фруктов в магазине $1000 \cdot (1 - 0,76) = 240$, из них $240 \cdot (1 - 0,65) = 84$ апельсина.

Ответ: 84.

В2. Пусть в пакете было n акций. Учитывая, что цена одной акции 20 июля была 200 рублей, а 4 августа стала 300 рублей, получим уравнение $300n - 200n = 2700$, $100n = 2700$, $n = \frac{2700}{100} = 27$.

Ответ: 27.

В3. $|\overrightarrow{AM}|^2 = AC^2 - MC^2 = (3\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 27 - \frac{27}{4} = \frac{3 \cdot 27}{4} = \frac{81}{4}$.

$|\overrightarrow{AM}| = \frac{9}{2} = 4,5$, $AM = 4,5$.

Ответ: 4,5.

В4. А. $20\,000 - 400 = 19\,600$ (руб.).

$19\,600 + 19\,600 \cdot 0,04 = 19\,600 + 784 = 20\,384$ (руб.).

Б. $20\,000 - 20 \cdot 12 = 20\,000 - 240 = 19\,760$ (руб.).

$19\,760 \cdot 0,035 + 19\,760 = 691,6 + 19\,760 = 20\,451,6$ (руб.).

В. $20\,000 + 20\,000 \cdot 0,02 = 20\,000 + 400 = 20\,400$ (руб.).

Наибольшая сумма будет в банке Б. Она равна 20 451,6 руб.

Ответ: 20 451,6.

В5. $\log_3(7x + 1) = 3 \log_9 4$; $\log_3(7x + 1) = \frac{3}{2} \log_3 4$;

$\log_3(7x + 1) = \log_3 4^{\frac{3}{2}}$; $7x + 1 = 8$; $x = 1$.

Ответ: 1.

В6. $BH = BC \sin \angle C$ (см. рис. 149).

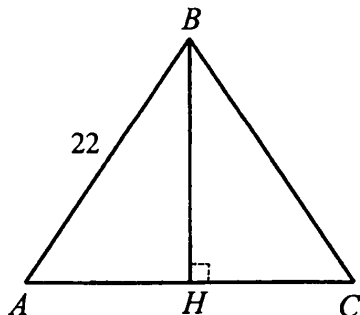


Рис. 149.

$$BH = BC\sqrt{1 - \cos^2 \angle C} = 22\sqrt{1 - \frac{96}{121}} = 22\sqrt{\frac{25}{121}} =$$

$$= 22 \cdot \frac{5}{11} = 10.$$

Ответ: 10.

В7. Учитывая условие $3 < a < 7,5$, получим:

$$\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(2a-15)^2} = |a-2| + |a-3| + |2a-15| =$$

$$= a-2+a-3-2a+15=10.$$

Ответ: 10.

В8. Из графика следует, что $f'(x)$ отрицательна в целых точках $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ и положительна в остальных целых точках из области определения. Следовательно, из целых точек в промежутки убывания функции $y = f(x)$ входят только перечисленные выше. Сумма этих целых точек равна $-5 - 4 - 3 - 2 - 1 + 1 + 2 + 3 = -9$.

Ответ: -9 .

В9. Так как пирамида $SABCD$ — правильная, то основание $ABCD$ — квадрат (см. рис. 150). В $\triangle SOD$ $\angle O = 90^\circ$, $SO = 11$,

$DO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$, $DO = 5\sqrt{3}$. По теореме Пифагора

$$SD^2 = SO^2 + DO^2.$$

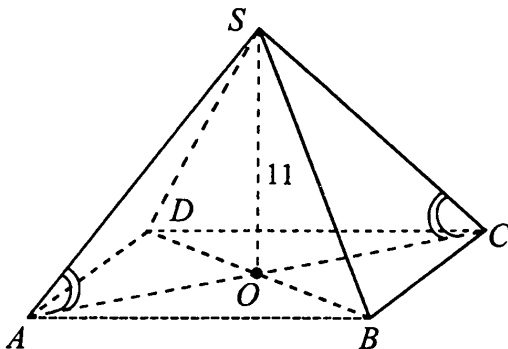


Рис. 150.

$$SD^2 = 11^2 + (5\sqrt{3})^2,$$

$$SD^2 = 121 + 75 = 196 = 14^2,$$

$$SD = 14.$$

Ответ: 14.

В10. Вероятность того, что 2 человека, случайно севшие за одну парту, родились в один и тот же день недели, равна отношению $1 : 7 \approx 0,14$.

Ответ: 0,14.

В11. Пусть a — ребро куба. Тогда объём пирамиды A_1BC_1D может быть вычислен следующим образом:

$$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} - 4V_{ABDA_1} = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot a = \frac{1}{3}a^3.$$

$$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = 3V_{A_1BC_1D} = 3 \cdot 3 = 9.$$

Ответ: 9.

В12. $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $L = 12,8$ м, $v_0 = 16$ м/с, $g = 10$ м/с². По условию $L \geq 12,8$;

$$\sin 2\alpha \geq \frac{Lg}{v_0^2};$$

$$\sin 2\alpha \geq \frac{128}{256}, \quad \sin 2\alpha \geq \frac{1}{2}, \quad 30^\circ \leq 2\alpha \leq 150^\circ, \quad 15^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ.$$

Ответ: 15.

В13. Обозначим общий доход семьи x рублей. Если стипендию сына (обозначим a) увеличить в 5 раз, то общий доход семьи увеличится на 18%.

Следовательно, $5a - a = 0,18x$.

$$4a = 0,18x,$$

$$a = 0,045x \text{ — стипендия сына.}$$

Если зарплату мужа (обозначим b) уменьшить в 11 раз, то общий доход семьи x уменьшится вдвое: $\frac{10b}{11} = 0,5x$, $b = 0,55x$ зарплата мужа.

Зарплата жены будет составлять $x - (0,045 + 0,55)x = 0,405x$, то есть $0,405 \cdot 100\% = 40,5\%$ от общего дохода семьи.

Ответ: 40,5.

В14. $y = (x^2 + 8x + 17) \cdot e^{x-3} + 1$, $x \in [0; 3]$

$$y(0) = 17 \cdot e^{-3} + 1 = \frac{17}{e^3} + 1,$$

$$y(3) = (9 + 24 + 17) \cdot e^0 + 1 = 51.$$

$$y'(x) = (2x + 8) \cdot e^{x-3} + (x^2 + 8x + 17) \cdot e^{x-3}.$$

$$y'(x) = 0, \quad e^{x-3} \cdot (2x + 8 + x^2 + 8x + 17) = 0.$$

$$x^2 + 10x + 25 = 0, \quad e^{x-3} \neq 0,$$

$$(x + 5)^2 = 0,$$

$$x = -5, \quad -5 \notin [0; 3].$$

$y(3) = 51$ — наибольшее значение функции на данном отрезке $[0; 3]$.

Ответ: 51.

С1. а) $(\cos 4x + 1) - (5 - 2 \cos 4x) = -5,5; 3 \cos 4x - 4 = -5,5; \cos 4x = -0,5.$

$$4x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

б) Найдём корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right]$.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq \frac{\pi}{4}, -\frac{4}{3} \leq n \leq \frac{1}{6}, n = -1; n = 0.$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\pi}{6}.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq \frac{\pi}{4}, -\frac{2}{3} \leq n \leq \frac{5}{6}, n = 0.$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$.

С2. Пусть O_1 — проекция точки O на плоскость ABC (см. рис. 151). Тогда угол между прямой AO и плоскостью ABC равен $\angle OAO_1$.

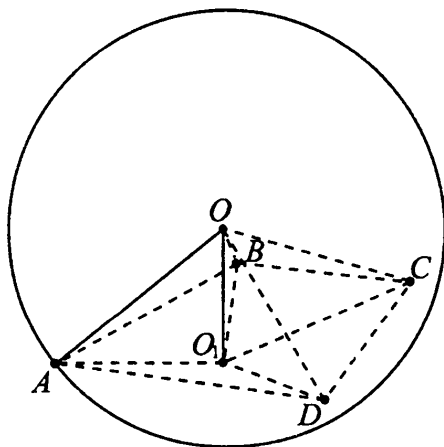


Рис. 151.

Так как $AO = BO = CO = OD$ (точки A, B, C, D лежат на поверхности шара), то $AO_1 = BO_1 = CO_1 = DO_1$. Следовательно, O_1 — центр описанной окружности около трапеции $ABCD$.

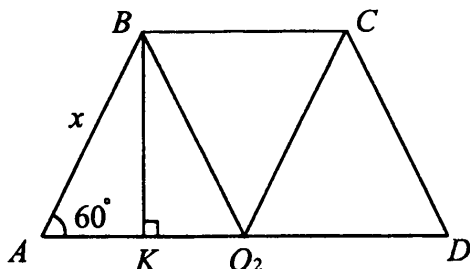


Рис. 152.

Пусть O_2 — середина стороны AD , $BK \perp AD$, $AB = BC = CD = x$ (см. рис. 152). Из $\triangle ABK$ находим $AK = AB \cos \angle BAK = x \cos 60^\circ = \frac{x}{2}$.

С другой стороны, $AK = \frac{AD - BC}{2} = \frac{2AO_2 - x}{2}$, значит,

$\frac{2AO_2 - x}{2} = \frac{x}{2}$; $AO_2 = x$. Но тогда $\triangle ABO_2$ — равнобедренный с углом 60° , следовательно, $\triangle ABO_2$ — равносторонний, $BO_2 = AO_2$. Аналогично $CO_2 = O_2D = AO_2$. Значит, O_1 совпадает с O_2 — центром описанной окружности.

По условию $AD = AO$. Тогда $AO = 2x$. Из $\triangle OAO_1$ (см. рис. 151) находим $\cos \angle OAO_1 = \frac{AO_1}{AO} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$; $\angle OAO_1 = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

СЗ. 1) Решим второе неравенство системы. $4^x(3^x - 2) - 5(3^x - 2) \leq 0$, $(4^x - 5)(3^x - 2) \leq 0$, $x \in [\log_3 2; \log_4 5]$.

2) Решим первое неравенство системы.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2 - x - x^2 \geq 0, \\ x^2 + 6x + 32 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) \leq 0, \\ (x+3)^2 + 23 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 1].$$

На ОДЗ первое неравенство выполняется, так как

$$\sqrt{2 - x - x^2} = \sqrt{2,25 - (x + 0,5)^2} \leq \sqrt{2,25} < 2,$$

$$\sqrt{x^2 + 6x + 32} = \sqrt{(x + 3)^2 + 23} \geq \sqrt{23} > 4.$$

3) Общим решением исходной системы является $x \in [\log_3 2; 1]$.

Ответ: $[\log_3 2; 1]$.

С4. Возможны 2 случая: 1) центр описанной окружности находится внутри трапеции (см. рис. 153); 2) центр описанной окружности — вне трапеции (см. рис. 154).

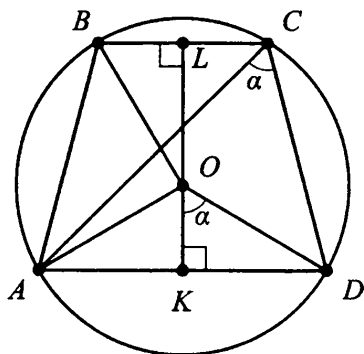


Рис. 153.

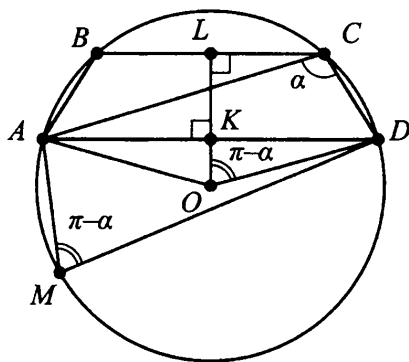


Рис. 154.

1) $h = OL + OK = 4 + 3 = 7$ — высота трапеции.
 $\angle AOD = 2\angle ACD$ как центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну дугу.

$\triangle AOD$ — равнобедренный, OK — высота. Значит, $\angle KOD =$
 $= \frac{1}{2}\angle AOD = \angle ACD$.

$$\triangle OKD — \text{прямоугольный}, \Rightarrow AD = 2KD = 2OK \cdot \operatorname{tg} \alpha = \\ = 2OK \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 8.$$

В прямоугольном $\triangle BOL$ $OL = 4$, $BO = OD = \sqrt{KD^2 + OK^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Значит, $BL = \sqrt{OB^2 - OL^2} = 3$, $BC = 2BL = 6$ ($\triangle BOC$ — равнобедренный).

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h = \frac{1}{2}(8 + 6) \cdot 7 = 49.$$

$$\text{Площадь искомого четырёхугольника } S = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{49}{2} = 24,5.$$

2) Высота трапеции $h = OL - OK = 4 - 3 = 1$.

$\angle AMD = \pi - \alpha$, так как $\sphericalangle ABD + \sphericalangle AMD = 2\pi$.

$$\angle KOD = \frac{1}{2}\angle AOD = \angle AMD = \pi - \alpha.$$

Из $\triangle OKD$ получим $OD = \frac{OK}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{OK}{-\cos \alpha} = \frac{3}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 5$ ($\cos \alpha < 0$, α — тупой угол).

$$AD = 2 \cdot KD = 2 \cdot \sqrt{OD^2 - OK^2} = 8.$$

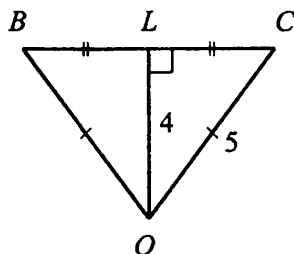


Рис. 155.

Из $\triangle BOC$ (см. рис. 155) $BC = 2LC = 2\sqrt{OC^2 - OL^2} = 6$.

Площадь искомого четырёхугольника

$$S = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(AD + BC)}{2} \cdot h = 3,5.$$

Ответ: 3,5; 24,5.

С5. Заметим, что $x^2 - (a + 5)x + 2(a + 3) = 0$ при $x_1 = a + 3$ и $x_2 = 2$. Таким образом, $x^2 - (a + 5)x + 2a + 6 < 0$ при x , лежащих между x_1 и x_2 и $x^2 - (a + 5)x + 2a + 6 \geq 0$ в противном случае. Пусть $f(x) = |x^2 - (a + 5)x + 2(a + 3)| + x^2 + (5 - 3a)x + 2a^2 - 6$, тогда

$$f(x) = \begin{cases} (10 - 2a)x + 2a^2 - 2a - 12 & \text{при } x, \text{ лежащих между } x_1 \text{ и } x_2, \\ 2x^2 - 4ax + 2a^2 + 2a, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вершина параболы $g(x) = 2x^2 - 4ax + 2a^2 + 2a$ расположена в точке с абсциссой $x_B = a$. Так как $a + 3 > a$, то для графика $y = f(x)$ возможны несколько случаев (см. рис. 156).

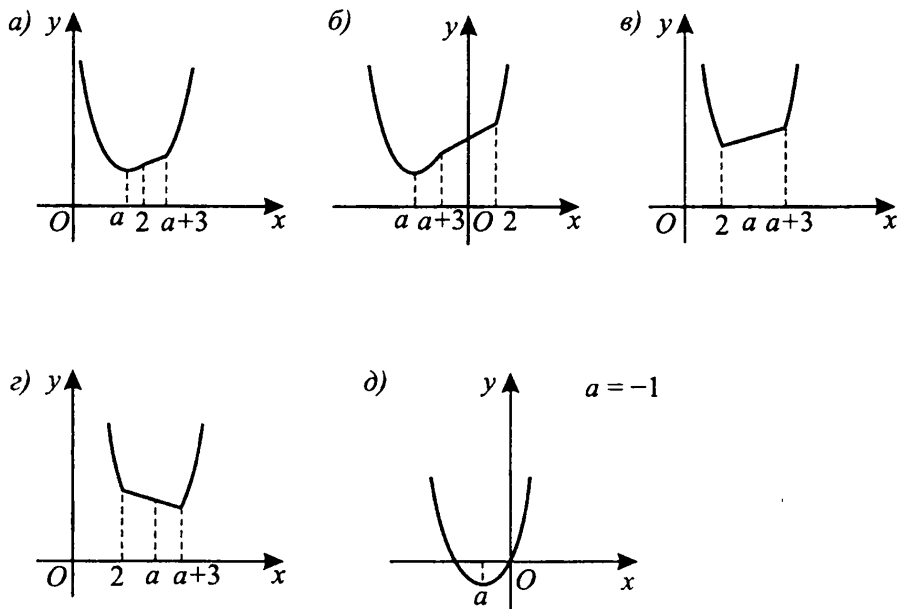


Рис. 156.

Из рисунка видно, что при $2 > a$ $f_{\text{наим.}} = f(a)$, тогда $f(a) = 2a^2 - 4a^2 + 2a^2 + 2a = 2a$; $2a > 8 \Leftrightarrow a > 4$ — нет решений при $a < 2$.

При $2 \leq a$ должно выполняться

$$\begin{cases} f(2) > 8, \\ f(a+3) > 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 6a + 8 > 8, \\ 2a + 18 > 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty), \\ a \in (-5; +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-5; 0) \cup (3; +\infty).$$

Так как $a \geq 2$, то $a \in (3; +\infty)$.

Ответ: $(3; +\infty)$.

С6. По условию задачи все города делятся на 2 группы. Внутри каждой группы все города попарно соединены прямыми дорогами, а между го-

родами из разных групп дорог нет. Пусть в первой группе x_1 город, а во второй — x_2 ($x_1, x_2 \in N, x_1 + x_2 = 23$).

а) В первой группе из каждого города выходит $(x_1 - 1)$ дорога, во второй $(x_2 - 1)$. Если $x_1 - 1 = x_2 - 1$, то $x_1 = x_2$ и $x_1 + x_2$ — чётное, но $x_1 + x_2 = 23$ — следовательно, такого быть не может.

б) Если из столицы выходит 6 дорог, то в этой группе, к которой относится столица, 7 городов, тогда в другой группе $23 - 7 = 16$ городов. Посчитаем количество дорог, соединяющих города в той группе, к которой относится столица: из 7 городов выходит по 6 дорог $7 \cdot 6 = 42$, но при таком подсчёте каждую дорогу мы посчитали дважды, значит, искомым дорог $\frac{42}{2} = 21$. Аналогично города другой группы соединяются

$\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ дорогами. Всего получается $21 + 120 = 141$ дорога.

в) Если в первой группе x_1 город, во второй — x_2 , то всего

$$\frac{x_1(x_1 - 1)}{2} + \frac{x_2(x_2 - 1)}{2} \text{ дорога.}$$

Учитывая, что $x_2 = 23 - x_1$, получаем, что всего дорог

$$\begin{aligned} \frac{x_1(x_1 - 1)}{2} + \frac{(23 - x_1)(22 - x_1)}{2} &= \frac{x_1^2 - x_1 + x_1^2 - 45x_1 + 22 \cdot 23}{2} = \\ &= x_1^2 - 23x_1 + 253. \end{aligned}$$

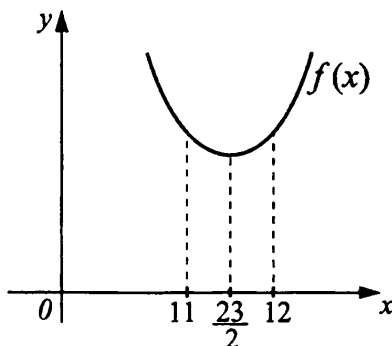


Рис. 157.

Найдём точку минимума функции $f(x) = x^2 - 23x + 253$, она совпадёт с абсциссой вершины соответствующей параболы: $x_v = \frac{23}{2}$. Так как график $f(x)$ — парабола, ветви которой направлены вверх (см. рис. 157),

то целые значения x , при котором $f(x)$ минимально, — это ближайшее целое число к числу $\frac{23}{2}$, то есть $x_1 = 11$ и $x_1 = 12$, при этом $f(11) = f(12) = 11^2 - 23 \cdot 11 + 253 = 121$.

Ответ: а) нет; б) 141; в) 121.

Решение варианта 21

В1. $100\% - 13\% = 87\%$; $\frac{13\,485 \cdot 100}{87} = 15\,500$.

Ответ: 15 500.

В2. Предприниматель 9 декабря потратил $30 \cdot 150 = 4\,500$ (руб). Учитывая прибыль, он должен продать акции за $4\,500 + 4\,500 = 9\,000$ (руб). Значит, он должен продать каждую акцию по цене $9\,000 : 30 = 300$ (руб). Из графика следует, что такая стоимость одной акции будет 13 декабря.

Ответ: 13.

В3. $S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{BCF} + S_{EDF} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 26$
(см. рис. 158).

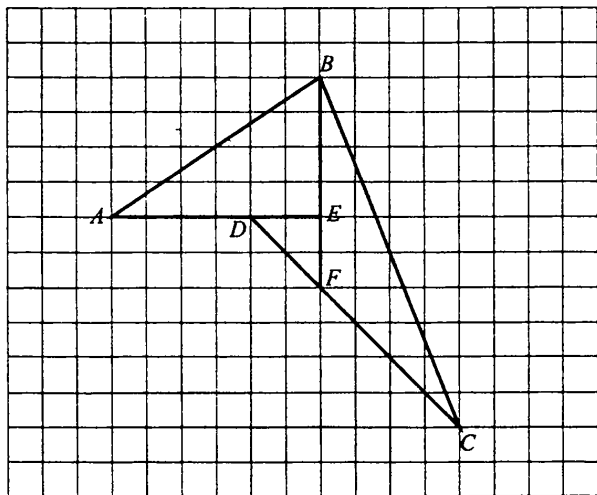


Рис. 158.

Ответ: 26.

В4. Найдём доход от продажи каждого из видов продукции.

1) Куртка «Зимняя»: $6400 \cdot 0,04 = 256$ (руб).

2) Футболка «Королевская»: $3000 \cdot 0,07 = 210$ (руб).

3) Куртка «Осенняя»: $4800 \cdot 0,06 = 288$ (руб).

4) Куртка «Тёплая»: $5600 \cdot 0,05 = 280$ (руб).

Наибольший доход соответствует куртке «Осенняя». Он равен 288 рублей.

Ответ: 288.

$$\text{В5. } \cos \frac{\pi(4x-7)}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{\pi(4x-7)}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \quad 4x-7 = \pm 2 + 6k;$$

$$\begin{cases} 4x = 9 + 6k, \\ 4x = 5 + 6k; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}k, \\ x = \frac{5}{4} + \frac{3}{2}k; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Выбираем наименьший положительный корень в каждой серии:

$$\begin{cases} x = 0,75, \text{ при } k = -1, \\ x = 1,25, \text{ при } k = 0; \end{cases} \quad x = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

В6. Пусть O — центр описанной окружности, $OB = R$ (см. рис. 159).

Тогда $BD = BO + OD$, $4 = R + \sqrt{R^2 - 9}$, $4 - R = \sqrt{R^2 - 9}$,

$$16 - 8R + R^2 = R^2 - 9; \quad R = \frac{25}{8} = 3,125.$$

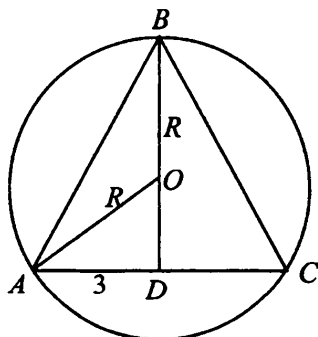


Рис. 159.

Ответ: 3,125.

$$\text{В7. } \log_4 5 \cdot \log_5 64 = \frac{1}{\log_5 4} \cdot \log_5 4^3 = \frac{3 \log_5 4}{\log_5 4} = 3.$$

Ответ: 3.

В8. По графику определяем, что на отрезке $[1; 3]$ функция $f(x) \leq 0$. Тогда

$$S = \int_1^3 (-f(x)) = (-F(3)) - (-F(1)) = 3 - 1 = 2.$$

Ответ: 2.

В9. В равностороннем треугольнике ABC высота $AH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Так как AH является медианой, $AO : OH = 2 : 1$. Тогда

$OH = \frac{AH}{3} = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника SOH по теореме

Пифагора $SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{12 - 3} = 3$.

Ответ: 3.

В10. Игральную кость подбросят ровно 3 раза, если при первых двух бросках «4» не выпадет, а при третьем — выпадет «4». При одном броске вероятность выпадения «4» равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что «4» не выпа-

дет, равна $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Так как все броски независимы, искомая вероятность

равна $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,12$.

Ответ: 0,12.

В11. $V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 \cdot h = \pi\sqrt{3}$, $R^2 h = \sqrt{3}$.

$V_{DABC} = \frac{1}{3} DO \cdot S_{\triangle ABC}$ (см. рис. 160).

$S_{\triangle ABC} = 3R^2\sqrt{3}$, тогда $V_{DABC} = \frac{1}{3} h \cdot 3R^2\sqrt{3} = R^2 h \sqrt{3} = 3$.

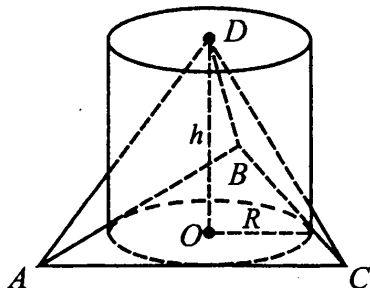


Рис. 160.

Ответ: 3.

В12. Для решения задачи необходимо решить уравнение $H(t) = 0$ и выбрать наименьший положительный корень.

$$0,64t^2 - 2,08t + 1,69 = 0; \quad 64t^2 - 208t + 169 = 0; \quad (8t - 13)^2 = 0; \quad t = 1,625.$$

Ответ: 1,625.

В13. Предположим, что рабочие прокладывали дорогу n дней. Обозначим количество километров, проложенных в первый день, как a_1 , во второй — a_2 и т.д. Тогда числа a_1, a_2, \dots, a_n образуют конечную арифметическую прогрессию. По условию $a_1 = 0,5$; $a_n = 1,9$; $S_n = 9,6$. Найдём n .

$$\frac{0,5 + 1,9}{2} \cdot n = 9,6; \quad 2,4n = 19,2; \quad n = 8.$$

Ответ: 8.

В14. $y' = \frac{7}{\cos^2 x} - 2$. Так как $\frac{7}{\cos^2 x} \geq 7$, то $y' > 0$. Следовательно,

функция $y(x)$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Значит, наименьшее значение $y(x)$ на этом отрезке равно $y(0) = 7 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 5 = 5$.

Ответ: 5.

С1. а) ОДЗ: $x^2 - 9 > 0$, $x^2 > 9$, $x < -3$ и $x > 3$ ($x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$).

$$\begin{cases} 1 - \cos^2 x = 0, \\ x^2 - 9 = 1; \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x^2 = 10; \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x_1 = -\sqrt{10}, x_2 = \sqrt{10}. \end{cases}$$

Учитывая, что $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$, получим $k \neq 0$.

б) Выберем корни, принадлежащие $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, учитывая, что

$$-5 < -\frac{3\pi}{2} < -4: \quad x = \pm\pi, \quad x = \pm\sqrt{10}, \quad x = 2\pi.$$

Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0; -\sqrt{10}; \sqrt{10};$ б) $\pm\sqrt{10}; \pm\pi; 2\pi$.

С2. Из условия следует, что $CO \perp AB$, $DO \perp AB$ и $\angle COD = 30^\circ$ (см. рис. 161 на с. 174). Тогда $\alpha = \angle CBD$ — искомый угол.

1) Пусть R — радиус сферы. $\triangle ACB$ — прямоугольный, так как $\angle ACB$ опирается на диаметр AB . По теореме Пифагора $AB^2 = 2BC^2$; $(2R)^2 = 2BC^2$. Отсюда $BC^2 = 2R^2$. Аналогично $BD^2 = 2R^2$.

2) По теореме косинусов для $\triangle COD$:

$$CD^2 = CO^2 + DO^2 - 2CO \cdot DO \cdot \cos 30^\circ;$$

одного решения.) Корень находим подбором: $t = -2$.

Тогда
$$\begin{cases} x - 8 = 5^4, \\ x - 8 = 5^{-2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 633, \\ x = 8\frac{1}{25}. \end{cases}$$

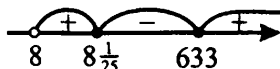


Рис. 162.

Ответ: $\left(8; 8\frac{1}{25}\right] \cup [633; +\infty)$.

С4. По условию возможны 2 случая (см. рис. 163, 164), рассмотрим каждый из них. Обозначим $AE = 3x$, тогда $EK = 2x$, $KC = 4x$. Заметим, что $S_{ABD} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ ($S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot h$; $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot h$, где h — их общая высота, проведённая к BC).

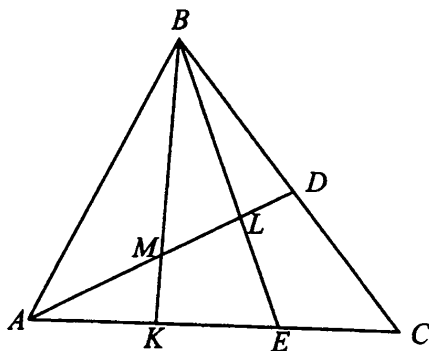


Рис. 163.

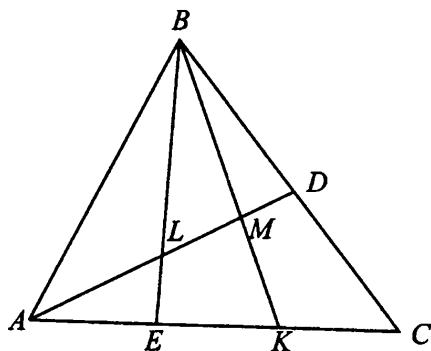


Рис. 164.

I случай (см. рис. 165). Проведём $DD_1 \parallel BE$, $DD_2 \parallel BK$. Тогда по теореме Фалеса $\frac{CD_1}{D_1E} = \frac{CD}{DB}$, $\frac{CD_1}{D_1E} = 1$, $CD_1 = D_1E$. Но

$$CD_1 + D_1E = 6x \Rightarrow ED_1 = 3x. \text{ Далее по теореме Фалеса } \frac{AL}{LD} = \frac{AE}{ED_1};$$

$$\frac{AL}{LD} = \frac{3x}{3x}; AL = LD, AL = \frac{1}{2}AD. \text{ Тогда } S_{ABL} = \frac{1}{2}S_{ABD} = \frac{S_{ABC}}{4}.$$

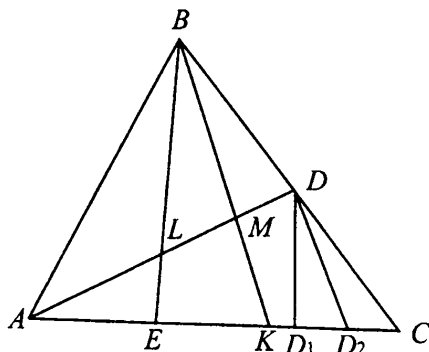


Рис. 165.

Аналогично $\frac{CD_2}{D_2K} = \frac{CD}{DB}$; $CD_2 = D_2K = 2x$. $\frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KD_2}$;

$\frac{AM}{MD} = \frac{5x}{2x}$; $AM = \frac{5}{2}MD \Rightarrow AM = \frac{5}{7}AD$. Тогда

$S_{AMB} = \frac{5}{7} \cdot S_{ABD} = \frac{5}{14}S_{ABC}$.

$S_{LMB} = S_{ABM} - S_{ALB} = \left(\frac{5}{14} - \frac{1}{4}\right)S_{ABC} = \frac{10-7}{28}S_{ABC} = \frac{3}{28}S_{ABC}$.

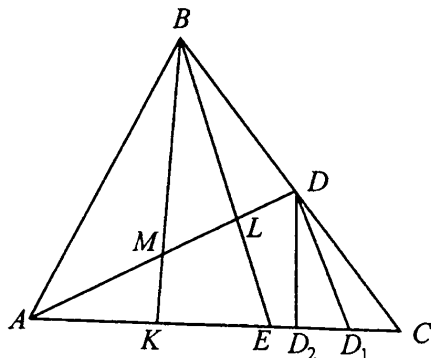


Рис. 166.

II случай (см. рис. 166). В этом случае $EC = KC - KE = 2x$, $AK = x$. Аналогично первому случаю проведём $DD_1 \parallel BE$ и $DD_2 \parallel BK$. Тогда $\frac{CD_1}{D_1E} = \frac{CD}{DB} = 1$; $CD_1 = D_1E = x$.

$$\frac{AL}{LD} = \frac{AE}{ED_1} = \frac{3x}{x} = 3 \Rightarrow AL = \frac{3}{4}AD, \text{ откуда}$$

$$S_{ABL} = \frac{3}{4}S_{ABD} = \frac{3}{8}S_{ABC}. \text{ Далее имеем}$$

$$\frac{CD_2}{D_2K} = \frac{CD}{DB} = 1, CD_2 = D_2K = 2x. \frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KD_2};$$

$$\frac{AM}{MD} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}; AM = \frac{1}{3}AD, S_{ABM} = \frac{1}{3}S_{ABD} = \frac{1}{6}S_{ABC}.$$

$$S_{MLB} = S_{ABL} - S_{ABM} = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{6}\right)S_{ABC} = \frac{5}{24}S_{ABC}.$$

Ответ: $\frac{3}{28}; \frac{5}{24}.$

С5. $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 3; (x-4)^2 + (y-1)^2 = 3$. Это уравнение окружности с радиусом $R = \sqrt{3}$ и центром $(4; 1)$ (см. рис. 167).

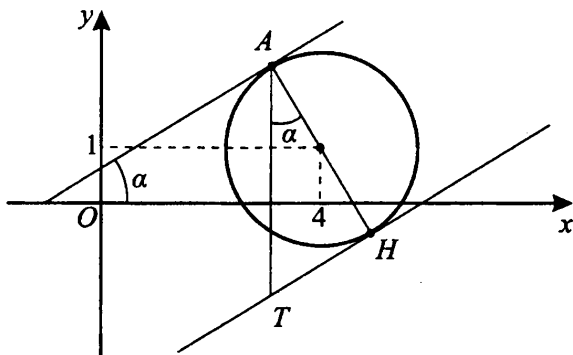


Рис. 167.

Пусть $b = ax + y - 4$. При заданном a это уравнение задаёт множество точек $b(x; y)$, при этом условию задачи удовлетворяют те из них, которые принадлежат окружности.

$y = -ax + b + 4$. Рассмотрим прямую $y = kx + B$, где $k(a) = -a$, $B = b + 4$.

$$b_{\text{наиб.}} - b_{\text{наим.}} = B_{\text{наиб.}} - B_{\text{наим.}} = AT, AT \parallel Oy.$$

Для заданного a имеет место равенство $k(a) = \operatorname{tg} \alpha$,

$$AT = \frac{AH}{\cos \alpha} = \frac{2R}{\cos \alpha} = 2R\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2R\sqrt{1 + a^2} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + a^2}.$$

По условию $AT \leq 12$.

$$2\sqrt{3} \cdot \sqrt{1+a^2} \leq 12, 1+a^2 \leq 12, a^2 \leq 11; -\sqrt{11} \leq a \leq \sqrt{11}.$$

Ответ: $[-\sqrt{11}; \sqrt{11}]$.

С6. Равенство $\left(\frac{1}{n^5}\right)^k = \left(\frac{1}{k^5}\right)^n$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\left(\left(\frac{1}{n}\right)^k\right)^5 = \left(\left(\frac{1}{k}\right)^n\right)^5, \text{ то есть когда } \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{k}\right)^n \Leftrightarrow k \ln \frac{1}{n} = n \ln \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k} \ln k = \frac{1}{n} \ln n \Leftrightarrow f(k) = f(n), \text{ где } f(x) = \frac{1}{x} \ln x, x > 0.$$

Так как $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\ln x - \ln e}{x^2}$, то

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, 0 < x \leq e, \\ f'(x) \leq 0, x \geq e. \end{cases}$$

При этом, если $x \neq e$, то $f'(x) \neq 0$. Значит, функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0; e]$ и убывает на интервале $[e; +\infty)$. Так как $k < n$, то равенство $f(n) = f(k)$ выполняется тогда и только тогда, когда $k < e < n$, то есть $k = 1$ или $k = 2$. При этом каждому значению k соответствует не более одного значения n .

Пусть $k = 1$. Тогда $f(n) = f(1); \frac{1}{n} \ln n = 0$. Следовательно, $n = 1$.

Противоречит тому, что $k < n$.

Пусть $k = 2$. Тогда $f(n) = f(2); \frac{1}{n} \ln n = \frac{1}{2} \ln 2$. Этому уравнению удовлетворяет значение $n = 4$. В силу убывания функции $f(x)$ на промежутке $[e; +\infty)$ других решений на этом промежутке нет.

Ответ: $k = 2; n = 4$.

Решение варианта 22

В1. Так как $1609 \text{ м} = 1,609 \text{ км}$, то $75 \text{ (миль/час)} = 75 \cdot 1,609 = 120,675 \text{ (км/ч)}$. Округляя до целого, получаем скорость 121 км/ч .

Ответ: 121.

В2. Наименьшая стоимость одной акции в первую неделю равна 10 руб. ; $10 \cdot 18 = 180 \text{ (руб.)}$. Наибольшая стоимость одной акции на второй неделе равна 80 руб. ; $80 \cdot 18 = 1\,440 \text{ (руб.)}$. Разность между ними и есть наибольшая возможная прибыль: $1\,440 - 180 = 1\,260 \text{ (руб.)}$.

Ответ: 1260.

$$\text{В3. } S_{EKL T} = 11 \cdot 6 = 66 \text{ (см. рис. 168); } S_{CDL} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6;$$

$$S_{CKB} = \frac{3 \cdot 7}{2} = 10,5; \quad S_{EBA} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10; \quad S_{ATD} = \frac{1 \cdot 7}{2} = 3,5.$$

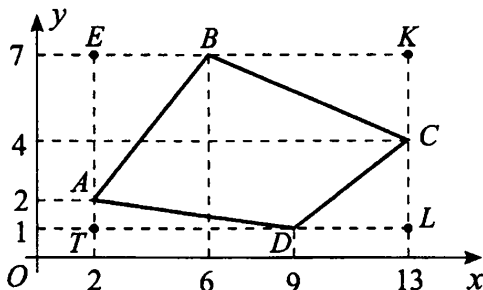


Рис. 168.

$$S_{ABCD} = S_{EKL T} - S_{CDL} - S_{CKB} - S_{EBA} - S_{ATD} = 66 - 6 - 10,5 - 10 - 3,5 = 36.$$

Ответ: 36.

В4. Составим таблицу выбора тарифного плана.

Тарифный план	Абонентская плата (руб.)	Плата за трафик (руб.)	Итого (руб.)
План «0»	0	$3 \cdot 700 = 2100$	2100
План «400»	500 руб. за 400 Мб трафика	$2 \cdot (700 - 400) = 600$	1100
План «800»	750 руб. за 800 Мб трафика	0	750

Из таблицы следует, что наиболее выгодным для запланированных 700 Мб трафика в месяц является тарифный план „План «800»“. По этому тарифному плану за месяц пользователь заплатит 750 рублей.

Ответ: 750.

$$\text{В5. } \sin \frac{\pi(x-3)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi(x-3)}{2} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi(x-3)}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-3 = \frac{1}{2} + 4n, n \in \mathbb{Z}, \\ x-3 = \frac{3}{2} + 4n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3,5 + 4n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = 4,5 + 4n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

При $n \geq 0$ все корни исходного уравнения положительные.

При $n = -1$ $x = 3,5 + 4 \cdot (-1) = -0,5$ или $x = 4,5 + 4(-1) = 0,5$.

При $n < -1$ корни исходного уравнения меньше $-0,5$.

Наибольший отрицательный корень $-0,5$.

Ответ: $-0,5$.

В6. Опишем окружность около $\triangle ABD$ и проведём касательную AT (см. рис. 169).

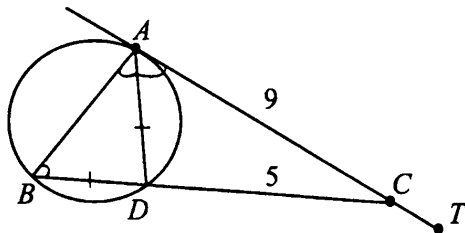


Рис. 169.

$\angle TAD = \frac{1}{2} \text{ } \frown AD$ как угол между касательной и секущей,

$\angle ABD = \frac{1}{2} \text{ } \frown AD$ как вписанный, следовательно, $\angle TAD = \angle ABD$. Отсюда $\angle CAD = \angle TAD$, точка C лежит на прямой AT . По свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки:

$$CD \cdot CB = CA^2; \quad 5 \cdot CB = 81; \quad CB = 16,2.$$

$$BD = CB - CD = 11,2; \quad AD = BD = 11,2.$$

Ответ: 11,2.

$$\text{В7. } \log_{625} 7 \cdot \log_7 5 = \frac{1}{\log_7 625} \cdot \log_7 5 = \frac{\log_7 5}{\log_7 5^4} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

В8. Заштрихованная фигура состоит из четырёх равных фигур. Её площадь $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 4 \left(F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) \right) = 4 \left(\sin \frac{2\pi}{4} - \sin 0 \right) = 4$.

Ответ: 4.

В9. Отрезок AE — проекция AE_1 на плоскость ABC (см. рис. 170). По теореме Пифагора $AE_1 = \sqrt{AE^2 + EE_1^2}$. Найдём AE .

$$AE = 2AH = \frac{2 \cdot a \sqrt{3}}{2} = a \sqrt{3}, \text{ где } a \text{ — сторона основания.}$$

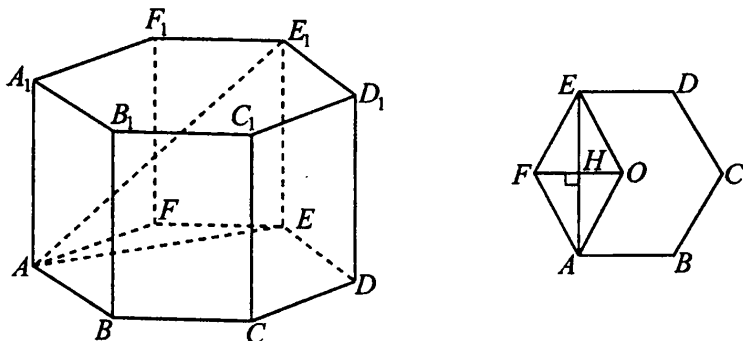


Рис. 170.

$$AE = 6\sqrt{3}; \quad AE_1 = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{108 + 36} = \sqrt{144} = 12.$$

Ответ: 12.

В10. Игральную кость подбросят не менее 3-х раз прежде чем выпадет 2. Это значит, что первые два раза 2 не выпадет.

$$\text{Искомая вероятность } p = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} \approx 0,694 \approx 0,69.$$

Ответ: 0,69.

$$\text{В11. } V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 \cdot h, \quad V_{DABC} = \frac{1}{3} DO \cdot S_{\triangle ABC} \text{ (см. рис. 171).}$$

$$S_{\triangle ABC} = 3R^2\sqrt{3}, \text{ тогда } V_{DABC} = \frac{1}{3}h \cdot 3R^2\sqrt{3} = R^2h\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}, \text{ откуда}$$

$$R^2h = \frac{1}{\pi}. \quad V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2h = \pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1.$$

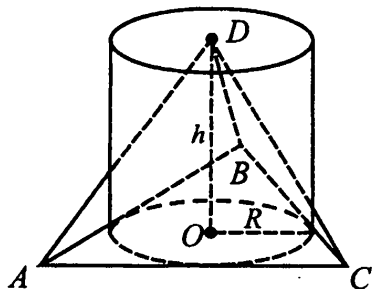


Рис. 171.

Ответ: 1.

В12. Необходимо найти наибольшее значение x , при котором $y(x) \geq 19$. Имеем

$$-\frac{1}{270}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \geq 19;$$

$$-x^2 + 180x + 630 \geq 5130;$$

$$x^2 - 180x + 4500 \leq 0;$$

$$(x - 30)(x - 150) \leq 0;$$

$$30 \leq x \leq 150.$$

Наибольшее значение x равно 150.

Ответ: 150.

В13. Пусть v км/ч — искомая скорость, а S км — расстояние от A до B . Тогда первый мотоциклист проехал весь путь за $\frac{S}{v}$ часов, а второй —

за $\frac{S}{2(v-20)} + \frac{S}{2 \cdot 126}$ часов. Так как мотоциклисты прибыли в пункт B

одновременно, то получим уравнение $\frac{S}{2(v-20)} + \frac{S}{2 \cdot 126} = \frac{S}{v}$.

Умножив обе части уравнения на $2 \cdot 126v(v-20)$ и разделив на S , получим:

$$126v + v(v-20) = 2 \cdot 126(v-20); v^2 - 146v + 5040 = 0; v_1 = 56, v_2 = 90.$$

По условию $v > 60$, значит, $v = 90$.

Ответ: 90.

$$\mathbf{B14.} y' = (4 \operatorname{ctg} x + 4x + 3 - 2\pi)' = -\frac{4}{\sin^2 x} + 4 = 4\left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= 4\left(1 - \left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right)\right) = -4 \operatorname{ctg}^2 x. \text{ Видно, что } y'(x) < 0 \text{ для любого}$$

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$. Следовательно, $y(x)$ убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right]$. Тогда

наибольшее значение y достигается при $x = \frac{\pi}{2}$.

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} + 3 - 2 \cdot \pi = 3.$$

Ответ: 3.

$$\mathbf{C1. a)} \sin\left(\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos(2 \sin x + 1);$$

$$\sin\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos(2 \sin x + 1);$$

$$\sin\left(-\sin x - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos(2\sin x + 1);$$

$$-\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \sin x\right) = \cos(2\sin x + 1);$$

$$\cos(\sin x) - \cos(2\sin x + 1) = 0;$$

$$-2\sin \frac{\sin x + 2\sin x + 1}{2} \cdot \sin \frac{\sin x - 2\sin x - 1}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin \frac{3\sin x + 1}{2} = 0, \\ \sin \frac{-\sin x - 1}{2} = 0; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \frac{3\sin x + 1}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{-\sin x - 1}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}, \\ \sin x = -1 - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Учитывая, что $|\sin x| \leq 1$, имеем

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{3}, \\ \sin x = -1; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

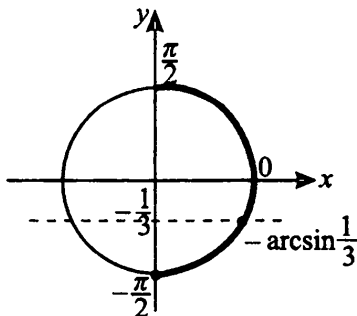


Рис. 172.

$$x = -\frac{\pi}{2}; x = -\arcsin \frac{1}{3} \text{ (см. рис. 172).}$$

$$\text{Ответ: а) } (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{б) } x = -\frac{\pi}{2}; x = -\arcsin \frac{1}{3}.$$

С2. Из условия следует, что расстояние от точек C и D до диаметра сферы AB максимальное и равно радиусу сферы. То есть, $CO = DO = R$, где R — радиус сферы. Так как $CO \perp AB$, $DO \perp AB$ (см. рис. 173), то $\alpha = \angle COD$ — искомый угол.

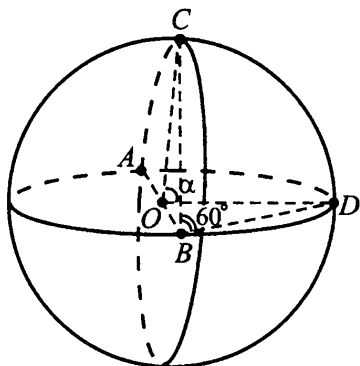


Рис. 173.

1) В прямоугольных треугольниках BOC и BOD по теореме Пифагора $BC^2 = 2R^2$ и $BD^2 = 2R^2$, значит, $BC = BD$ и $\triangle CBD$ — равнобедренный.

2) Так как $\triangle CBD$ равнобедренный и $\angle CBD = 60^\circ$, то он равносторонний. Значит, $CD^2 = BC^2 = 2R^2$.

3) $\alpha = 90^\circ$, так как $\triangle COD$ прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора.

Ответ: 90° .

С3. ОДЗ: $x > 2$.

Решим неравенство методом интервалов. Рассмотрим уравнение $\log_3^2(x-2) + 3(x-2)(2\log_3 \sqrt{x-2} + 3) - 7\log_3(x-2) - 30 = 0$ на промежутке $x > 2$.

Замена $x-2 = 3^t$ приводит к уравнению

$$t^2 - 7t - 30 + 3 \cdot 3^t(t+3) = 0,$$

$$(t+3)(t-10) + 3 \cdot 3^t(t+3) = 0,$$

$$(t+3)(t-10+3 \cdot 3^t) = 0.$$

$$\begin{cases} t = -3, \\ 3 \cdot 3^t = 10 - t. \end{cases}$$

Уравнение $3 \cdot 3^t = 10 - t$ имеет корень $t = 1$. Других корней нет, так как слева от знака равенства возрастающая функция, а справа — убывающая.

$$\text{Тогда } \begin{cases} x - 2 = 3^{-3}, \\ x - 2 = 3^1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{27}, \\ x = 5. \end{cases}$$

Решим исходное неравенство (см. рис. 174), получим $x \in (2; 2\frac{1}{27}] \cup [5; +\infty)$.



Рис. 174.

$$\text{Ответ: } (2; 2\frac{1}{27}] \cup [5; +\infty).$$

С4. I случай: $AK < AN$ (см. рис. 175).

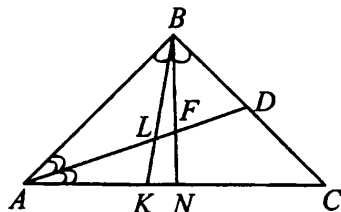


Рис. 175.

По условию $AL : LF : FD = 14 : 2 : 5$. Пусть $AL = 14x$, $LF = 2x$, $FD = 5x$.

$\frac{AL}{LD} = \frac{14x}{7x} = 2 : 1$, BK — медиана, следовательно, точка L — точка пересечения медиан $\triangle ABC$. Получили, что AD — биссектриса и медиана $\triangle ABC$, значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = AC$) и $BD = DC$.

В $\triangle ABD$ выполняется $\frac{AF}{FD} = \frac{AB}{BD}$ по свойству биссектрисы BF ,

$$BD = \frac{AB \cdot FD}{AF} = \frac{AB \cdot 5x}{16x} = \frac{5}{16} AB.$$

$$BC = 2BD = \frac{5}{8}AB,$$

$$AB : BC : AC = AB : \frac{5}{8}AB : AB = 8 : 5 : 8.$$

II случай: $AK > AN$ (см. рис. 176).

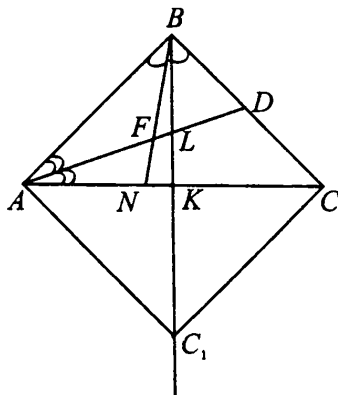


Рис. 176.

По условию $AL : LF : FD = 14 : 2 : 5$, тогда
 $AF : FL : LD = 12 : 2 : 3$.

Пусть $AF = 12x$, $FL = 2x$, $LD = 3x$, $FD = 5x$, $AL = 14x$.

Продолжим медиану BK за точку K и отложим $KC_1 = BK$. Тогда четырёхугольник $ABCC_1$ — параллелограмм, так как его диагонали BC_1 и AC делятся точкой пересечения K пополам.

$\triangle BLD \sim \triangle C_1LA$ ($\angle BLD = \angle C_1LA$ как вертикальные, $\angle DBL = \angle AC_1L$ как накрест лежащие при $BC \parallel AC_1$ и секущей BC_1).

Из подобия следует $\frac{BD}{AC_1} = \frac{LD}{AL}$, $AC_1 = BC$, тогда

$$BD = \frac{BC \cdot 3x}{14x} = \frac{3}{14}BC,$$

$$DC = BC - BD = \frac{11}{14}BC.$$

В $\triangle ABD$ по свойству биссектрисы BF выполняется $\frac{AF}{FD} = \frac{AB}{BD}$,

$$AB = \frac{BD \cdot AF}{FD} = \frac{3BC \cdot 12x}{14 \cdot 5x} = \frac{18}{35}BC.$$

В $\triangle ABC$ по свойству биссектрисы AD

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}, AC = \frac{DC \cdot AB}{BD} = \frac{11BC \cdot 18BC \cdot 14}{14 \cdot 35 \cdot 3 \cdot BC} = \frac{66}{35}BC.$$

$$\text{Получили } AB = \frac{18}{35}BC, AC = \frac{66}{35}BC.$$

$$AB + BC = \frac{18}{35}BC + BC = \frac{53}{35}BC,$$

$$\frac{53}{35}BC < \frac{66}{35}BC.$$

Неравенство $AB + BC > AC$ не выполняется, следовательно, треугольника с такими сторонами не существует.

Ответ: 8 : 5 : 8.

$$\text{C5. } (x+3)^2 + (y-5)^2 = 2, \left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y-5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

$$\text{Сделаем замену } \frac{x+3}{\sqrt{2}} = \cos t, \frac{y-5}{\sqrt{2}} = \sin t.$$

$$x = \sqrt{2} \cos t - 3, y = \sqrt{2} \sin t + 5.$$

Пусть $f = x - ay + 13$. Если точка $(x; y)$ принадлежит указанной окружности, то $f(x, y) = \sqrt{2} \cos t - 3 - a(\sqrt{2} \sin t + 5) + 13$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{2} \cos t - a\sqrt{2} \sin t + 10 - 5a = \\ &= \left(\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2} \right) \sin(t + \varphi) + 10 - 5a = \\ &= \sqrt{2 + 2a^2} \sin(t + \varphi) + 10 - 5a, \text{ где} \end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \frac{-a\sqrt{2}}{\sqrt{2 + 2a^2}}; \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + 2a^2}}.$$

Таким образом, $f(t)$ принимает значения от $-\sqrt{2 + 2a^2} + 10 - 5a$ до $\sqrt{2 + 2a^2} + 10 - 5a$; разница между наибольшим и наименьшим значениями равна $2\sqrt{2 + 2a^2}$. По условию должно выполняться $2\sqrt{2 + 2a^2} > 22$.

$$\sqrt{2 + 2a^2} > 11; 2 + 2a^2 > 121; 2a^2 > 119; a^2 > \frac{119}{2}; |a| > \sqrt{\frac{119}{2}};$$

$$a \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{119}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{119}{2}}; +\infty\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\sqrt{\frac{119}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{119}{2}}; +\infty\right).$$

С6. а) За первый ход изменим чётность у одного числа, за второй — у двух других чисел, за третий — у трёх пока не изменённых чисел. После этого в таблице будет 6 нечётных чисел и 3 чётных числа. За четвёртый ход

3 нечётных числа сделаем чётными и 1 чётное — нечётным. Останется 5 чётных чисел, которые и преобразуем в нечётные за 5-й ход. Таким образом, так преобразовать числа в таблице возможно.

б) За третий ход нужно поменять чётность у $(n-1)^3$ чисел. Всего же в таблице n^2 чисел. Заметим, что $(n-1)^3 > n^2$ при достаточно больших n (так как $(n-1)^3 - n^2 = n^3 - 4n^2 + 3n - 1 > 0$ при $n^3 - 4n^2 > 0$, то есть при $n > 4$). Значит, сделать можно не более 2-х ходов. Но тогда нечётными станут не более $(n-1) + (n-1)^2 = n(n-1)$ чисел. Так как $n(n-1) < n^2$, то требуемое невозможно.

в) Для произвольного n это возможно. Можно поступить следующим образом: в начале сделаем k ходов, изменяя чётность у ещё неизменённых чисел, до тех пор пока это возможно. Таким образом, после k -го хода на доске будет $1 + 2 + \dots + k$ нечётных чисел и m чётных, где $m < k + 1$, то есть $m \leq k$. Обозначим $N = 1 + 2 + \dots + k = \frac{(k+1)k}{2}$. Далее у $(k+1)$

нечётного числа изменим чётность, сделав их опять чётными, после чего у $(k+2)$ чисел изменим чётность с чётного числа на нечётное. На доске станет $N + 1$ нечётное число. Продолжим аналогичные действия, увеличивая количество нечётных чисел на 1 за каждые 2 хода. Через m ходов все числа станут нечётными. Остаётся показать, что так сделать возможно, то есть всегда найдётся требуемое количество нечётных чисел, которые надо сделать чётными. Действительно, если уже было сделано $k + 2l$ ходов ($l = 0, 1, 2, \dots, m-1$), то на доске $\frac{(k+1)k}{2} + l$ нечётных чисел, из которых $k + 2l + 1$ надо сделать чётными. Покажем, что

$$\frac{k(k+1)}{2} + l > k + 2l + 1 \Leftrightarrow k(k+1) > 2k + 2l + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - k > 2l + 2.$$

С другой стороны, $2l + 2 < 2k + 2$, а значит, если выполнено $k^2 - k > 2k + 2$, то выполнено и $k^2 - k > 2l + 2$. Решим неравенство $k^2 - k > 2k + 2$, получим

$$k > \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \text{ то есть } k \geq 4. \text{ Для } n = 3 \text{ возможность выполнения нужных}$$

действий была показана выше (см. пункт а). Для $n = 2$: на доске 4 числа, за первый ход делаем 1 число нечётным, за второй — возвращаем ему чётность, делая нечётным другое число. За третий ход делаем нечётными 3 чётных числа. Для $n = 1$ — очевидно.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

Иванов Сергей Олегович
Коннова Елена Генриевна
Кулабухов Сергей Юрьевич
Нужа Галина Леонтьевна
Ольховая Людмила Сергеевна
Резникова Нина Михайловна
Ханин Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК.
УЧЕБНО-ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ.
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2013

Учебно-методическое пособие

Под редакцией **Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова**

Обложка *В. Кириченко*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *Н. Пимонова*

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 13.12.2012.
Формат 60х84¹/₁₆. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 11.
Тираж 5000 экз. Заказ № 313

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждений. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»

Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в ЗАО «Полиграфобъединение». 347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6 В.